

# 이동질량의 속도가 등분포종동력을 받는 단순보의 동특성에 미치는 영향

## Influence of a the Velocity of Moving Mass on Dynamic Behavior of Simple Beam Subjected to Uniformly Distributed Follower Forces

윤한익 · 임순홍

H. I. Yoon and S. H. Im

**Key Words** : Follower Force(종동력), Nonconservative Force(비보존력), Dynamic Behavior(동특성), Moving Mass(이동질량), Mode(진동형), Coupling Effect(연성효과)

**Abstract** : On the dynamic behavior of a simple beam subjected to an uniformly distributed tangential follower force, the influences of the velocities and magnitudes of a moving mass have been studied by numerical method. The instant amplitude of a simple beam is calculated and analyzed for each position of the moving mass represented by the time functions. The uniformly distributed tangential follower force is considered within its critical value of a simple beam, and four values of velocity is also chosen. Their coupling effects on the deflections of a simple beam are inspected too.

When a moving mass moves after middle zone of a simple beam at the low velocities, its deflection is increased by the coupling of an uniformly distributed tangential follower force and moving mass.

### 1. 서론

이동질량을 지지하는 탄성보의 진동과 안정성 문제는 이동질량의 속도가 증가함에 따라서 더욱 중요시되며, 또한 탄성보에 작용하는 종동력(follower force)이 계의 진동과 안정성에 미치는 영향에 대한 연구는 매우 관심있는 과제이다. 비보존력(nonconservative force)의 대표적인 종동력은 시간과 속도에 관계없이 그 작용방향이 변환되는 일정한 크기의 힘<sup>1)</sup>으로 그 작용선은 탄성계의 변형에 의하여 결정된다. 탄성보에 작용하는 축하중은 집중종동력과 분포종동력으로 나누어 지며, 집중종동력은 변형된 탄성보의 자유단에서 그 접선 방향으로 작용하며<sup>2)</sup> 분포종동력은 변형된 탄성보의 축선을 따라서 그 접선방향으로 분포되어 작용하는 하중이다<sup>3)</sup>. 이 종동력을 받는 탄성보는 플러터(flutter)에 의하여 안정성을 잃게 되므로<sup>4,5)</sup> 작용

방향이 일정한 축하중에 비하여 탄성보의 안정성을 크게 향상시킨다<sup>6,7,8)</sup>.

Leipholz<sup>9)</sup>는 비보존적 탄성계의 운동에너지와 변형에너지 이외의 비보존력에 의하여 이루어진 일을 포함하는 전체에너지를 도입함으로써 새로운 에너지 방법으로 비보존적 탄성계의 운동방정식을 유도하여 계의 안정성을 해석하였다.

본 연구에서는 이동질량이 높은 온도를 가졌거나 또는 주기적으로 많은 수의 질량이 이동함으로써 그 마찰열에 의하여, 이동질량을 지지하는 단순보가 가열되는 경우를 고려한다. 그 가열에 의하여 단순보가 팽창 또는 연화되어 탄성을 잃고 소성변형되는 점을 방지하기 위하여 단순보에 파이프를 부착하고 냉각수를 통과시키는 냉각장치를 부과한다. 이때 냉각수의 무게가 단순보의 무게에 비하여 매우 작다고 가정하면 점성이 큰 냉각수의 이동에 의하여 발생하는 힘은 단순보의 축선을 따라 분포되는 등분포 종동력으로 된다. 따라서 이동질량의 속도와 크기 그리고 이 등분포 종동력이 단순보의 동특성에 미치는 영향을 단순보의 진폭을 구하여

접수일 : 2000년 11월 1일  
윤한익 : 동의대학교 기계산업시스템공학부  
임순홍 : (주)진영금융

해석하였다 그리고 단순보의 진폭에 영향을 미치는 이들 세 인자의 상호 연성관계를 고찰하였다.

## 2. 이론해석

등분포접선종동력이 작용하는 단순지지된 탄성보의 위에 집중질량이 일정속도로 이동하는 탄성계의 개략도는 Fig.1과 같다.

등분포접선종동력의 크기, 이동질량의 크기 그리고 그 이동속도가 단순보의 동특성에 미치는 영향을 해석하기 위하여 Lagrange 방정식을 이용하여 계의 운동방정식을 유도한다.

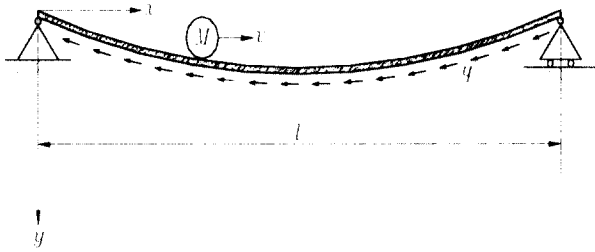


Fig. 1 A simple beam with a moving mass upon and subjected to uniformly distributed follower forces.

### 2.1 단순보의 에너지식

단순보의 진동형은  $\sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i(x)$ 로 표현되므로 단순보의 횡변위와 속도는

$$y = \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i(x) \quad (1)$$

$$\dot{y} = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i(t) \phi_i(x) \quad (2)$$

이다. 여기서  $\phi_i(x)$ 는

$$\phi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l} \quad (3)$$

로써 단순보의 정규직교 고유함수이며,  $d_i(t)$ 는 시간의 함수이다.

그러므로 단순보의 운동에너지는

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int (\dot{y})^2 dm \\ &= \frac{ml}{4} \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \end{aligned} \quad (4)$$

이고,  $m$ 은 단순보의 단위 길이당 질량,  $l$ 은 단순

보의 길이이다.

단순보의 포텐셜에너지는

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_0^l EI (y'')^2 dx \\ &= \frac{(i\pi)^4}{2} \frac{EI}{2l^3} \sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(t) \end{aligned} \quad (5)$$

이다. 여기서 EI는 단순보의 굽힘강성계수이다.

### 2.2 등분포접선종동력 q에 의한 일량

비보존적인 등분포 접선 종동력에 의한 일은 등분포 접선 종동력의 보존력 성분(conservative force component)에 의한 일과 비보존력성분(nonconservative force component)에 의한 일로 구분된다.

#### 2.2.1 q의 보존력 성분에 의한 일량

$$\begin{aligned} W_c &= \frac{1}{2} \int_0^l q(l-x) (y')^2 dx \\ &= \frac{1}{8} (i\pi)^2 q \sum_{i=1}^{\infty} d_i^2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

#### 2.2.2 q의 비보존력 성분에 의한 일량

$$W_N = - \int_0^l q(y')(y) dx \quad (7)$$

### 2.3 이동질량 M의 에너지 식

이동질량 M의 수평속도가 v이면 그 수평변위는

$$x = \int_0^t v dt \quad (8)$$

이고, 수직 변위를  $y_M$ 이라고 하면 이동질량 M은 집중질량이므로 그 운동에너지는

$$T_M = \frac{1}{2} M (\dot{y}_M^2 + v^2) \quad (9)$$

이고, 그 포텐셜에너지는

$$V_M = -Mg y_M \quad (10)$$

이다. 여기서 g는 중력가속도이고,  $y_M$ 은 이동질량 M의 연직방향 변위인 동시에 단순보의 횡변위이다. 즉 이동질량 M은 단순보와 분리되지 않고 접촉된 상태로 이동한다고 본다.

따라서

$$y_M = y(x, t)|_{x=l} \quad (11)$$

$$\dot{y}_M = \left( \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial t} \right) \Big|_{x=f(t)} \quad (12)$$

이다. 여기서

$$x = f(x) = \int_0^t v dt \quad (13)$$

임을 고려하고, 식(1)을 식(12)에 대입하면

$$\dot{y}_M = v \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \phi_i[f(t)] + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i(t) \phi_i[f(t)] \quad (14)$$

이다. 식(14)를 식(9)에 대입하여 정리하면 이동질량  $M$ 의 운동에너지는 다음 식(15)와 같다.

$$T_M = \frac{1}{2} M \left\{ v^2 \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \phi_i^2[f(t)] + 2v \sum_{i=1}^{\infty} d_i(t) \dot{d}_i(t) \phi_i[f(t)] \phi_i'[f(t)] + \sum_{i=1}^{\infty} \dot{d}_i^2(t) \phi_i'^2[f(t)] \right\} \quad (15)$$

### 2.4 계의 운동방정식

계의 운동방정식을 유도하기 위하여 앞에서 구한 일과 에너지 식을 다음의 Lagrange 방정식에 대입하여 정리하면 계의 운동방정식은 다음 식(16)과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{ml}{2} + M \sin^2 \left( \frac{i\pi vt}{l} \right) \right\} \ddot{d}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ Mv^2 \left( \frac{i\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{i\pi vt}{l} \right) - \frac{(i\pi)^4 EI}{2l^3} + \frac{(i\pi)^2}{2} q \right\} d_i \\ &+ Mg \sum_{i=1}^{\infty} \sin \left( \frac{i\pi vt}{l} \right) + \frac{1}{2} Mv^2 \end{aligned} \quad (16)$$

계의 운동방정식(16)을 무차원화 시키기 위하여 다음의 무차원 매개변수를 도입한다.

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{M}{ml}, \quad \bar{E} = \frac{EI}{ml^3}, \quad \bar{q} = \frac{q}{ml}, \quad \bar{g} = \frac{g}{l}, \\ \bar{d} &= \frac{d}{l}, \quad \bar{v} = \frac{v}{l}, \quad \beta = \pi vt \end{aligned} \quad (17)$$

무차원 매개변수 (17)을 계의 운동방정식(16)에 대입하여 정리하면 식(18)과 같이 무차원화된 계의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} + \bar{M} \sin^2(i\beta) \right\} \ddot{\bar{d}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ (i\beta)^2 \bar{v}^2 \bar{M} \cos^2(i\beta) \frac{1}{2} (i\pi)^4 \bar{E} \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{4} (i\pi)^2 \bar{q} \right\} \bar{d}_i + \bar{q} \sum_{i=1}^{\infty} \sin(i\beta) \quad (18)$$

운동방정식(18)은 2계 상미분방정식 이므로 다음과 같이 보조기호

$$\bar{z}_i = \bar{d}_i, \quad \bar{z}_i' = \dot{\bar{d}}_i = f(\bar{d}_i, \bar{z}, t) \quad (19)$$

를 사용하여 변수를 치환하면 1계 상미분방정식계로 변환된다.

따라서 1계상미분방정식계는 행렬을 사용하여 다음 식(20)으로 나타내어 진다.

$$[A] \{ \bar{X} \} = [B] \{ \bar{X} \} + \{ C \} \quad (20)$$

## 3. 수치계산

### 3.1 수치계산결과 및 고찰

계의 동특성을 지배하는 세 가지의 등분포접선 종동력과 이동질량의 크기 그리고 이동 속도의 크기를 네 가지 양으로 선택하고, 단순보의 동특성을 계산하여 그림으로 나타내고 비교하였다.

이동질량이 단순보 위를 통과하는 시간을 40등분하여 이동질량이 단순보 위에 위치하는 각 순간의 단순보의 변위 즉 순간 진폭을 계산함으로써 이동질량이 통과하는 과정 중의 보의 동특성의 변화를 나타내었다.

수치계산을 위한 입력 데이터로써, 단순보의 종탄성계수는  $206 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , 단면2차 모우멘트는  $4.0 \times 10^6 \text{ m}^4$ , 길이는 10m, 그리고 단위 길이당의 질량은 150kg으로 하였다.

#### 3.1.1 이동질량의 속도 영향

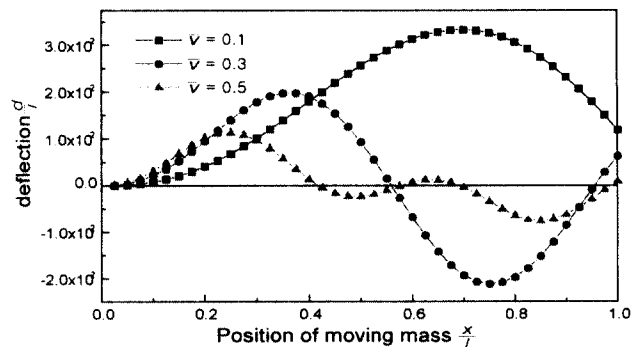


Fig. 2 Time variation of deflection of simple beam  $\bar{M} = 0.067$   $\bar{q} = 0.0$  and first mode

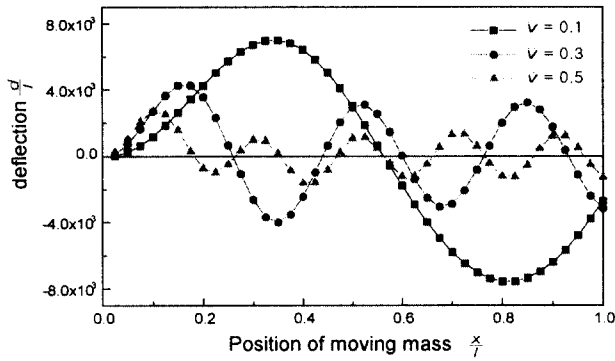


Fig. 3 Time variation of deflection of simple beam  $\bar{M} = 0.067$   $\bar{q} = 0.0$  and second mode

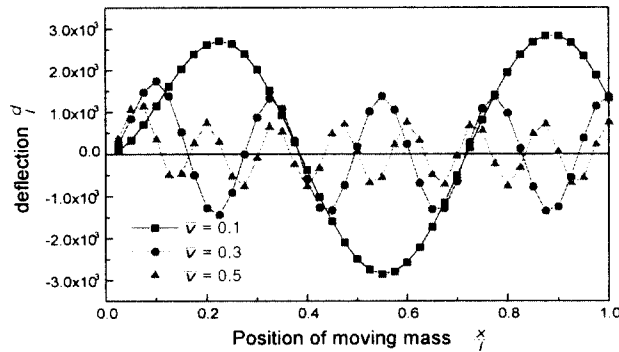


Fig. 4 Time variation of deflection of simple beam  $\bar{M} = 0.067$   $\bar{q} = 0.0$  and third mode

Fig. 2~Fig. 4는 등분포접선중동력이 영이고  $\bar{M} = 0.067$ 의 이동질량이 등속도로 이동할 때 이동질량의 속도영향을 단순보의 진동모드별로 나타내었다. Fig.2는 단순보의 1차모드 진동으로 이동질량의 속도가 0.1인 경우 단순보의 후반부에서 보의 최대 처짐을 보이고 있다. 속도가 0.3인 경우에는 0.1인 경우보다 앞쪽에서 최대 처짐을 보이며 초기에는 0.1보다 큰 변위를 나타낸다. 속도가 0.5인 경우는 이동질량의 위치가 단순보의 초반에서 큰 변위를 나타내지만 후반으로 갈수록 변위가 줄어드는 경향을 보인다. Fig 3은 단순보의 2차모드 진동으로 단순보의 횡변위가 속도 0.1에 비하여 50% 정도로 작아지고 속도 0.1에서는 단순보의 횡변위는 이동질량의 위치가 전반부에서는 양의 변위를 나타내며 증가하고 후반부에서는 음의 변위를 따라 감소하며 중단에서 다시 증가한다. 이동질량의 속도가 0.3인 경우는 1차모드에서와 마찬가지로 단순보의 초기위치에서는 속도 0.1보다 큰 변위가 나타나지만 후반으로 갈수록 조금씩 감소함을 보인다. 이동질량의 속도가 0.5인 경우는 속도 0.1보다

복잡한 진동 형태를 보여주고 있으며 그 변위도 초기에는 크지만 단순보의 후반까지 거의 일정한 변위의 변화를 보여주고 있다. Fig 4는 단순보의 3차모드 진동에서의 이동질량의 속도 영향을 나타내고 있다. 3차모드에서는 1,2차보다 훨씬 더 복잡한 진동형태를 보이고 있으며 단순보의 횡변위도 2차모드에 비해 약 50% 정도로 줄었음을 볼 수 있다. 이동질량의 속도영향에서 굽힘강성계수( $EI$ ) 값이 단순보의 진동에 미치는 영향을 고려하기 위해 단면 형상 변화로 굽힘강성계수 값을 조절하여 고찰한 결과 진동 형태는 변함이 없고 단순보의 변위에만 변화가 있음을 알 수 있었다.

### 3.1.2 등분포접선중동력의 영향

Fig. 5~Fig. 7은 등분포접선중동력이 단순보의 횡진동 변위에 미치는 영향을 검토하기 위하여 등분포접선중동력 0, 3.33 그리고 6.67에 대하여 해석하였다.

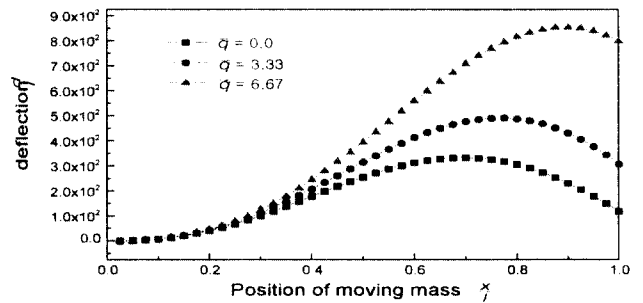


Fig. 5 Time variation of deflection of simple beam  $\bar{M} = 0.067$   $\bar{v} = 0.1$

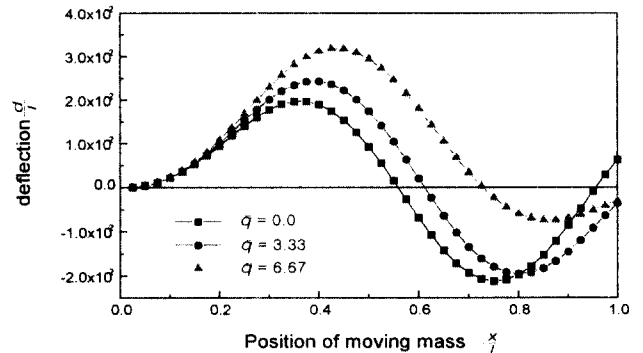


Fig. 6 Time variation of deflection of simple beam  $\bar{M} = 0.067$   $\bar{v} = 0.3$

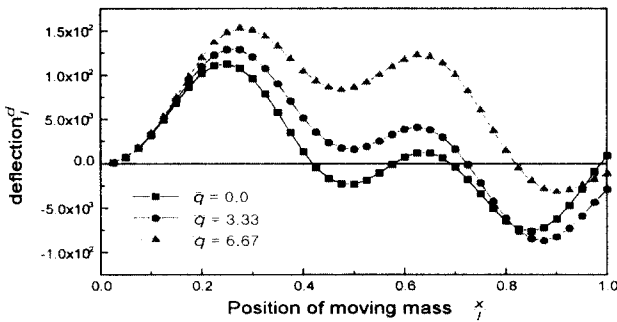


Fig. 7 Time variation of deflection of simple beam  
 $\bar{M} = 0.067 \quad \bar{v} = 0.5$

Fig.5는 이동질량의 속도와 크기가 각각  $\bar{v}=0.1$  과  $\bar{M} = 0.067$  일때의 그림이다. 등분포접선종동력이 커질수록 이동질량의 위치가 보의 중앙부에 있을 때 단순보의 횡변위가 증가하며, 등분포접선종동력이  $\bar{q} = 6.67$ 이 되면 단순보의 횡변위는 양의 변위를 지속한다. Fig.6에서는 단순보의 변위가 증감을 계속 반복하며 이동질량의 초기위치에서 전체적으로 증가하는 추세를 보이며 후반부에서는 감소하며 증감을 계속한다. 등분포접선종동력의 영향으로  $\bar{q}$  가 증가할수록 단순보의 변위도 증가한다. Fig.6은 등분포종동력의 영향이 Fig.5와 비슷한 양상을 보이나  $\bar{q} = 6.67$ 에서 좀더 많은 변위의 증가를 볼 수 있다. 속도 성분이 큰 Fig. 7에서는 등분포종동력  $\bar{q} = 6.67$ 에서 큰 영향을 보이며 이동질량의 위치 후반부에서 변위가 증가를 하지 못하고 계속 감소하며 종반에서 약간 증가하는 모습을 보이고 있다.

#### 4. 결 론

단순보에 작용하는 등분포접선종동력과 이동질량의 크기 및 속도가 단순보의 횡진동변위에 미치는 영향을 수치해석으로 연구하였다. 이동질량의 위치는 시간의 함수로 나타내고 각 위치에 대한 단순보의 순간변위를 계산하여 단순보의 동특성을 검토하였다. 이동질량의 속도는 가속도가 없는 일정한 속도를 선택하였으며 등분포접선종동력은 이동질량이 없는 단순보의 임계 등분포접선종동력 범위 내에서 그 값을 선택하여, 단순보의 횡진동 특성에 미치는 이들 각각의 영향과 그 연성 효과를 해석한 결과는 다음과 같다.

- 1) 이동질량이 저속일 때 단순보의 횡변위는 중·고속에 비하여 크며 그 변화폭도 매우 커서 양

의 변위와 음의 변위를 반복한다.

- 2) 이동질량의 속도가  $\bar{v} = 0.5$  와 1.0 에서 단순보의 횡변위는 매우 복잡하게 변화한다.
- 3) 이동질량의 위치가 단순보의 중앙부에 있을 때 등분포접선종동력은 이동질량과 연성되어 단순보의 횡변위를 증가시킨다.

#### 참고문헌

1. Ziegler, H., "Die Principles of Structural Stability," Blaisdell Pub. CO., Waltham, 1968
2. Beck, M., "Die Knicklast des Einseitig Eingespannten," Tangential Gedruckten Stabes, ZAMP. vol. 3, 1952, pp. 225~228
3. Leipholz, H., "Stability Theory", Academy Press Inc. New York," 1970
4. Bolotin, V. V., "Nonconservation Problems of the theory of Elastic Stability," Pergamon press, Oxford, 1963
5. Ziegler, H., "Die Stabilitatskriterien der Elastomechanik, Ingenieur Archiv," Vol. 20, 1952, pp. 49~56
6. Leipholz, H., "Six Lectures on Stability of Elastic Systems, University of Waterloo Press," 1975, pp. 18~19
7. Ziegler, H., "Stabilitatsprobleme bei Geraden Staben und Wellen, ZAMP." Vol. 2, 1953, pp. 265~289
8. Ziegler, H., "Knickung Gerader Stabe unter Torsion, ZAMP," Vol. 3, 1952, pp. 96~119
9. Leipholz, H., "on the Application of the Energy. Method of the Stability problems of the Nonconservative Mechanical Systems," Acta Mechanica, Vol. 28, 1977, pp. 113~138