

재질의 공간적 변동이 재료강도시험결과에 미치는 영향

Effect of Spatial Distribution of Material Properties on its Experimental Estimation

김 선 진

S. J. Kim

Key Words : Spatial Distribution(공간분포), Averaging Length(평균화 거리), Variance(분산), Autocorrelation Function(자기상관함수), Size Effect(치수효과), Correlation Length(상관 거리), Random Process(확률과정)

Abstract : Some engineering materials are often known to have considerable spatial variation in their resisting strength and other properties. The objective of this study is to investigate the averaging effect and the applicability of extremal statistic for the statistical size effect. In the present study, it is assumed that the material property is a stationary random process in space. The theoretical autocorrelation function of the material strength are discussed for several correlation lengths. And, in order to investigate the statistical size effect, the material properties was simulated by using the non-Gaussian random process method. The material properties were plotted on the Weibull probability papers. The main results are summarized as follows: The autocorrelation function of the material properties are almost independent of the averaging length. The variance decreases with increasing the averaging length. As correlation length is smaller, the slope is larger. And also, it was found that Weibull statistics based on the weakest-link model could not explain the spatial variation of material properties with respect to the size effect satisfactory.

1. 서 론

기계·구조물의 안전성 및 건전성을 확보하기 위해서는 무엇보다도 그 강도해석이 중요하다. 그러나 이들의 강도는 하중 등의 환경조건, 재료강도, 설계수법, 제조공정이나 검사방법 등의 많은 불확실성을 갖는 요인의 영향을 강하게 받고 있다¹⁾. 그 때문에 고도의 신뢰성 및 안전성을 확보할 필요가 있는 중요한 기계·구조물에 대해서는 통계적 데이터를 합리적으로 활용한 확률론적 방법을 이용한 신뢰성 설계가 요구되고 있다. 그러므로 강도에 대한 확률분포의 추정 및 파악은 기계·구조물의 신뢰성에 기초한 설계나 안전성 평가에 있어서 아주 중요하다. 강도에 대한 확률모델적 고찰이나 신뢰성 평가, 해석 방법에 대해서는 많은 연구가 행하여져 왔다²⁻⁴⁾. 대부분의 강도시험 결과는 통상

소수의 시험편 또는 소수 장소에서의 관측치 혹은 계측간격에 의한 균열선단부근의 재질의 평균치가 이용되고 있다.

일반적으로 재료강도시험에 의해서 얻어지는 통계량은 어떤 종류의 평균치인 경우가 많다. 예를 들면, 세라믹스 등의 노치가 있는 시험편에서 파괴인성치의 변동이 작다고 하는 것은 재질에 변동이 없다고도 생각되지만 또 다른 하나의 이유로서는 이 값이 균열선단의 어떤 미소 영역에서 평균화되었기 때문이라 생각할 수 있다. 피로파괴가 문제되는 경우에 있어서도 피로균열전파율의 계측치는 어떤 계측간격에 의한 미소구간에서의 평균치라는 것은 말할 것도 없다. 균열전파의 시뮬레이션에 의하여 수명예측을 행하는 경우에는 실험에서 얻은 전파율에 관한 파라미터는 어떤 유한 구간에서의 평균전파율로부터 얻어지는 평균적인 값의 확률분포함수이고 자기상관함수인 것에 유의해서 결과를 해석하지 않으면 안된다. 이와 같이 평균화되어 있는 실험결과를 기초로 해서 구조물, 부재 등의 신

접수일 : 2000년 3월 2일

김선진 : 부경대학교 기계공학부

뢰성 및 안전성을 추정하려고 하면 불합리한 추정이 될 가능성이 있다. 즉, 실험에서 얻은 파괴인성치가 큰 변동을 보이지 않았다고 하여 확정적으로 취급하여도 좋다고 할 수는 없다. 또, 실험에서 얻은 확률분포를 시험편 치수보다도 아주 작은 미소부분의 파괴인성의 확률분포로 변화해서 최약링크가설을 적용하는 것은 곤란하다. 이러한 것은 재질의 평균화 거리와 재질의 상관관계에 의존하는 것이라 생각된다.

이러한 관점에서, 본 연구에서는 재질의 변동을 공간적 확률과정이라 생각하여 평균화된 재질이 자기상관함수 및 분산에 미치는 영향을 검토하고, 또한 공간상관을 비가우스 확률과정의 시뮬레이션에 의해서 치수효과에 의한 최약링크모델의 적용가능성에 대해서 검토한다.

2. 평균화의 영향 해석

재질의 공간적 분포상황, 미세한 결함의 분포상황 및 그곳에서의 파괴현상의 확률적 특성을 안다면 시뮬레이션에 의해서 강도분포의 추정이 가능하다. 현실적으로 결함의 분포를 추정하는 것은 매우 곤란하지만, 만일 재질의 확률변수가 아니라면 강도는 결함의 분포만으로 결정되기 때문에 문제는 간단히 된다.

노치가 있는 시험편에서의 파괴인성치는 거의 변동하지 않는다고 하고 있기 때문에 먼저 이점에 대해서 다음과 같이 검토를 행하였다.

인공 노치를 이용하지 않는 한 파단시에 균열을 관측하고 형상을 특정짓는 것은 곤란하지만, 역으로 파단시의 균열선단의 재료정수가 구하여진다고 한다. 이 값이 Fig. 1과 같이 균열선단 부근의 어떤 미소영역 δ 에 대한 평균치라고 하면 평균화된 확률변수 $S_\delta(x, y, z)$ 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$S_\delta(x, y, z) = \frac{1}{V} \int_V S(x, y, z) dx dy dz \quad (1)$$

여기서 $S(x, y, z)$ 는 장소 x, y, z 의 함수인 공간적 확률과정으로서의 재질이다. 이것을 연속한 함수라 가정한다. 간단히 하기 위하여 1차원 문제로 취급하지만 정성적으로 얻어지는 결론에는 영향이 없다. 즉, 평균화된 재질 $S_\delta(x)$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_\delta(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} S(x) dx \quad (2)$$

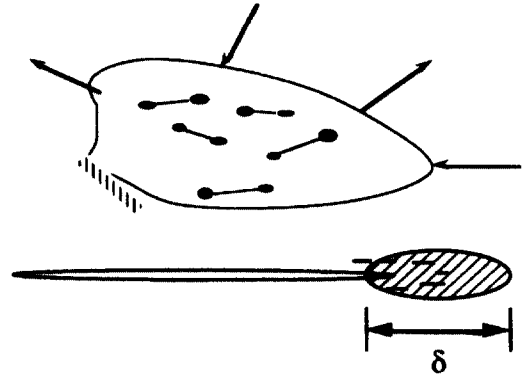


Fig. 1 Schematic diagram of local average

S_δ 의 평균치는 S 의 평균치와 일치하는 것을 쉽게 알 수 있다. 즉, 식 (2)의 양변에 기대치를 취하면,

$$\begin{aligned} E[S_\delta(x)] &= \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} E[S(x)] dx \\ &= E[S(x)] \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, E 는 기대치(expectation)를 나타낸다. 그러나 S_δ 의 분산은 S 의 분산과 일치하지 않는 것은 당연하고 이것은 확률과정 $S(x)$ 의 공간적 분포에 의존한다. 이하에서는 평균을 영(zero)으로 취급한다. $S(x)$ 가 정상확률과정이라 하면, 그 분산은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \text{Var}[S(x)] &= E[S(x)S(x)] \\ &= R_{ss}(0) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, R_{ss} 는 S 의 자기상관함수이다.

만약 그 상관함수가 다음과 같이 주어져 있다고 하면,

$$R_{ss}(\xi) = E[S(x)S(x+\xi)] \quad (5)$$

S_δ 의 자기상관함수는 다음과 같이 구하여진다.

$$\begin{aligned} R_{\delta\delta}(\xi) &= E[S_\delta(x) S_\delta(x+\xi)] \\ &= E\left[\frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} S(x) dx \frac{1}{\delta} \int_{x+\xi}^{x+\xi+\delta} S(x) dx\right] \\ &= E\left[\frac{1}{\delta^2} \int_x^{x+\delta} d\eta \int_{x+\xi}^{x+\xi+\delta} d\zeta S(\eta)S(\zeta)\right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\delta^2} \int_x^{x+\delta} d\eta \int_{x+\xi}^{x+\xi+\delta} d\zeta E[S(\eta)S(\zeta)]$$

$$= -\frac{1}{\delta^2} \int_x^{x+\delta} d\eta \int_{x+\xi}^{x+\xi+\delta} R_{ss}(\eta - \zeta) d\zeta \quad (6)$$

또한, 그 분산은 $R_{\delta\delta}(0)$ 인 것을 알 수 있다. 따라서, 식(6)으로부터 분산을 구하면 다음과 같다.

$$R_{\delta\delta}(0) = -\frac{1}{\delta^2} \int_x^{x+\delta} d\eta \int_x^{x+\delta} R_{ss}(\eta - \xi) d\xi \quad (7)$$

재질의 공간적 변동을 백색잡음(white noise)⁵⁾과 유연하게 변화하는 변동의 조합인 지수여현형이라 하면, 즉 그 자기상관함수는

$$R_{ss}(\xi) = \exp(-a_0 \xi) \cos(a_1 \xi)$$

$$= \text{Re}[\exp(-a\xi)] \quad (8)$$

여기서, Re 는 복소수의 실수(real number)이고, $a=a_0+a_1i$ 이라 하여 평균화된 재질의 자기상관함수를 구하면 다음과 같다.

$$R_{ss}(\xi) = \text{Re}\left[\frac{1}{a^2 \delta^2} e^{-a\xi} (e^{a\delta} + e^{-a\delta} - 2)\right] \quad (9)$$

또한, 그 분산은 다음과 같다.

$$\text{Var}[S_\delta] = \text{Re}\left[\frac{2}{a^2 \delta^2} e^{-a\xi} (a\delta + e^{-a\delta} - 1)\right] \quad (10)$$

최소의 δ 를 1로 하여 평균화된 재질의 자기상관함수($a_0=10$, $a_1=\pi/10$)를 계산한 결과를 Fig. 2에 나타낸다. 또한 a_0 가 1, 0.1인 경우에 대한 분산을 δ 에 대하여 계산한 결과를 Fig. 3에 나타낸다. 그림에서 알 수 있듯이 자기상관함수는 평균화의 거리 δ 에 의존하지 않고 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 분산은 평균화의 거리가 증가하면 감소하는 경향을 나타내고 있으며, 상관거리가 작은 경우에는 δ 의 증가와 더불어 분산이 급격히 감소하고 있다. 이것은 재질이 급격히 변동하고 있을 경우는 미소구간에서의 평균치가 전체적 평균에 접근하고 국부적 평균치를 이용해서 통계적 변동을 취급하려고 하면 변동을 작게 추정할 우려가 있음을 나

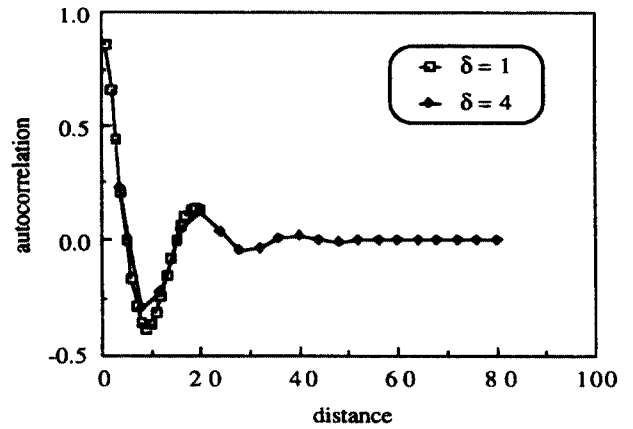


Fig. 2 Effect of averaging length on the autocorrelation function

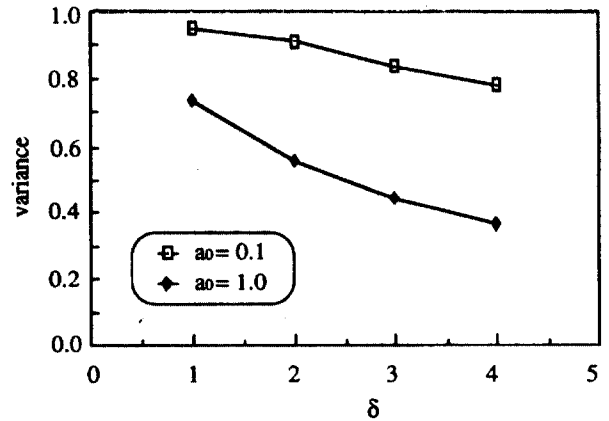


Fig. 3 Effect of averaging length on the variance

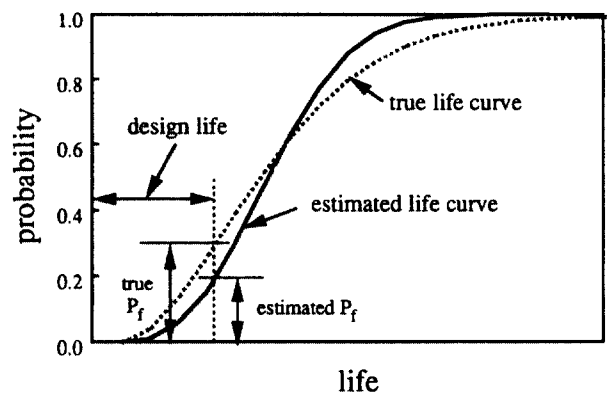


Fig. 4 The difference of the true probability of failure and the estimated one

타낸다. 정성적으로는 Fig. 4와 같이 되고 파괴확률을 낮게 추정할 위험측의 추정이 될 수 있다. 공간 상관거리가 작다고 하는 것은 어떤 부분의 재

질과 그 점에서 떨어진 부분의 재질이 서로 독립한 확률변수로 되어 있다고 하는 의미이므로 극치통계학적 취급에는 적용하고 있지만, 실험으로부터 얻은 확률분포함수가 실제의 확률분포함수에 충분히 가까운지를 확인하지 않으면 안된다. 또 공간상관거리가 큰 경우에는 분산에 미치는 평균화의 영향은 그렇게 크지 않다. 그러므로 실험적으로 얻어지는 확률분포함수는 실제의 확률분포함수에 가깝다고 생각된다. 그러나 이 경우에도 치수효과 설명에 극치통계학⁷⁾을 적용하려고 하면 주의할 필요가 있다고 생각된다. 따라서, 이하에서는 공간상관을 여러 가지로 변화시켜서 재료강도 시험결과를 시뮬레이션하여 극치통계에 의한 치수효과 설명이 유효한지를 검토한다.

3. 최약링크모델에 의한 치수효과

3.1 해석방법

Fig. 5와 같이 3차원 공시재를 생각하여 그 공시재에서 장소를 지정하여 시험편을 작성하는 것으로 한다. 3차원적 재질의 분포상황을 시뮬레이션할 수 있다면 재료강도 시험결과를 얻는 것이 가능하다. 그러나 본 연구의 목적인 공간상관의 영향 여부를 확인하기 위해서는 반드시 3차원적인 시뮬레이션을 행할 필요는 없다고 생각된다. 이하 간단히 하기 위하여 1차원적인 문제로 생각하지만 정성적으로 얻어지는 결론에는 영향이 없다.

확률과정의 시뮬레이션 방법에는 몇 가지가 있지만, 본 연구에서는 Shinozuka등에 의해서 개발된 정상 비가우스 확률과정(non-Gaussian random process) 시뮬레이션법⁸⁾을 이용하여, 2 파라메터 와이블분포(2-parameter Weibull distribution)에 따르는 확률과정을 발생시켜 재료강도의 공간적 변동을 시뮬레이트 한다. 그 확률분포함수와 자기상관함수는 다음과 같다.

$$F_S(s) = 1 - \exp\left\{\left(-\frac{s}{\beta}\right)^{\alpha}\right\} \quad (11)$$

$$R(\xi) = \exp(-a_0 \xi), \xi \geq 0 \quad (12)$$

여기서, α 는 형상계수(shape parameter)이고 β 는 척도계수(scale parameter)이다. 또한, a_0 는 공간상관을 나타내는 계수이다. 자기상관함수의 아래 부분의 면적을 공간상관거리(correlation length 혹은 scale)라고 한다. 즉, 상관거리⁹⁾ θ_s 는 다음과 같다.

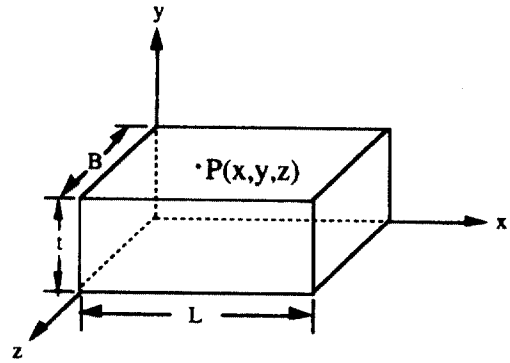


Fig. 5 Shape of test specimen

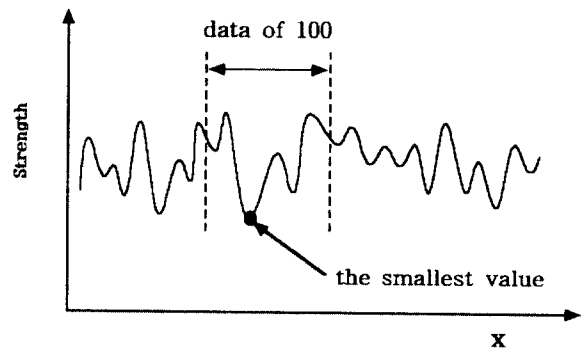


Fig. 6 Random strength in spatial length

$$\begin{aligned} \theta_s &= \int_0^{\infty} R(\xi) d\xi \\ &= \int_0^{\infty} e^{-a_0 \xi} d\xi = \frac{1}{a_0} \end{aligned} \quad (13)$$

상관거리 $1/a_0$ 를 0.05, 0.1, 1.0, 5.0, 10.0 및 20으로 하고, 분포함수의 형상계수 α 를 4.0, 척도계수 β 를 1.0으로 하였다. 역푸리에 변환의 크기는 $4096(2^{12})$ 으로 하였으며 Δx 를 0.1로 하였다. 즉, 상관거리가 1인 경우 그 사이에 10점의 불규칙한 강도를 데이터로써 발생시키는 것으로 된다. 또 상관거리가 0.05인 경우 Δx 가 0.1이라면, 발생된 데이터는 거의 독립한 확률변수로 보는 것이 가능하다.

기준 시험편 치수는 $100 \times \Delta x$ 로 하였으며, 그 시험편의 강도는 Fig. 6과 같이 100개의 연속한 강도 중 최소치로 결정하였다. 1회의 시뮬레이션에서 40개의 시험결과가 얻어진다. 따라서 100개 시험편에 대한 기준 시험편의 강도를 구하려고 하면 3회의 시뮬레이션을 수행하면 충분하다. 또한 치수효과를 검토하기 위하여 기준 시험편의 치수를 2, 4배로 한 경우에도 동일한 방법으로 최소치의 분포를 구하였다.

3.2 결과와 고찰

Fig. 7은 상관거리가 10인 경우에 대한 강도를 와이블 확률지에 나타낸 것이다. 강도분포는 거의 직선적 분포를 하고 있으며, 2 파라미터 와이블 분포에 따르고 있음을 알 수 있다. 그림 중의 실선은 직접탐색법으로 구한 형상계수와 척도계수를 이용하여 그린 것이다. 기준 시험편에 대한 형상계수와 척도계수는 각각 3.3 및 0.74의 값을 얻었다. 극치통계학에 의하면 척도계수는 $\beta = 0.32(4\sqrt{1/100})$ 로 되어야 하지만 이 값 보다도 아주 큰 β 값을 얻었다. 시험편 치수를 2배, 4배한 경우에 대해서도 그림 중에 나타내었다. 2배, 4배한 경우의 형상계수와 척도계수의 값은 각각 $\alpha = 3.0$, $\beta = 0.65$ 및 $\alpha = 3.0$, $\beta = 0.53$ 을 얻었다. 시험편의 치수가 증가하면 척도계수가 감소하는 경향을 보여 주고 있다. 이 결과만 보면 치수효과에 의해서 강도가 변화하고 있음을 알 수 있다.

기준 시험편의 $\beta = 0.74$ 에서 2배, 4배의 경우에 대한 극치통계학을 적용해서 이론적 척도계수를 계산해보면 $\beta = 0.6$ 및 $\beta = 0.5$ 로 된다. 결보기상 극치통계에 의한 치수효과의 설명이 휴효한 것 처럼 보인다. 그러나 원분포에서는 $\alpha = 4$, $\beta = 1$ 이므로 이론과 일치하고 있다고는 할 수 없다. 즉, 공간상관거리가 큰 경우에는 치수효과의 설명에 극치통계학을 적용하는 것은 무리가 있다고 생각된다.

또, 공간상관거리가 작은 0.05의 경우에 대한 동일한 수치실험을 행한 결과를 Fig. 8에 나타낸다. 또, 극치통계에 의한 결과를 Table 1에 나타낸다. Table 1에서 알 수 있듯이, 거의 독립이라고 할 수 있는 상관거리에서는 척도계수 β 에 대해서는 거의 이론과 합치하는 값이 얻어지는 결과를 얻었다. 그러나 α 에 대해서는 100개의 시험편 수 정도에서는 이론치와 일치하지 않는 것을 알 수 있다.

여러 가지 상관거리에 대해서 시뮬레이션한 결과를 시험편 크기에 대하여 척도계수와 형상계수 ($\alpha_0 = 4.0$)를 나타낸 것이 Fig. 9와 Fig. 10이다. 그림에서 알 수 있듯이 시험편 크기가 증가하면 척도계수는 감소하는 경향을 보이고 있다. 한편, 거

Table 1 Comparison of the results with theory

Size	Simulation		Theory ($\alpha = 4.1, \beta = 0.31$)		Theory ($\alpha = 4.0, \beta = 1$)	
	α	β	α	β	α	β
Std	4.1	0.31	4.1	0.31	4.0	0.32
2times	3.2	0.25	4.1	0.26	4.0	0.26
4times	3.2	0.20	4.1	0.22	4.0	0.22

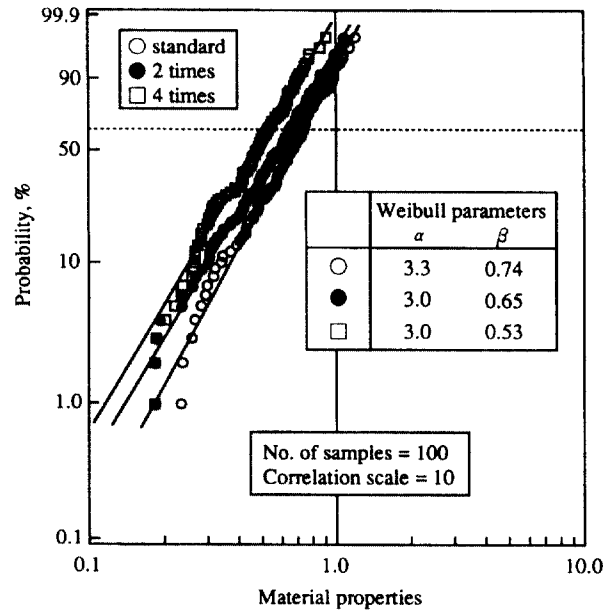


Fig. 7 Weibull distributions of strength($\theta_s = 10$)

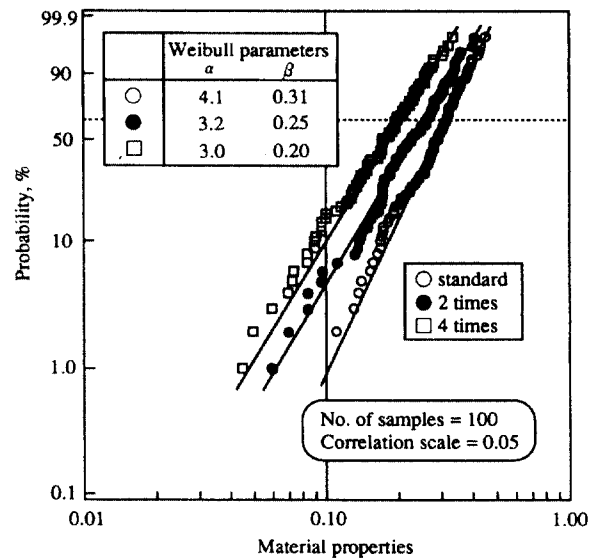


Fig. 8 Weibull distributions of strength($\theta_s = 0.05$)

의 독립이라고 할 수 있는 상관거리인 0.05와 0.1인 경우에는 척도계수는 거의 이론과 일치함을 알 수 있다. 그러나 상관거리가 큰 경우에는 이론과 일치하지 않는다. 형상계수도 시험편 크기가 증가하면 감소하는 경향을 보여주고 있다. 그러나 극치통계학적으로는 형상계수가 변화하지 않으나 본 결과에서는 대부분 이론보다도 작은 값을 얻었다.

형상계수에 미치는 시험편 수의 영향을 알아보기 위하여, 완전히 독립한 난수를 발생시켜 시뮬레이션한 결과를 Fig. 11에 나타낸다. 그림에서 알

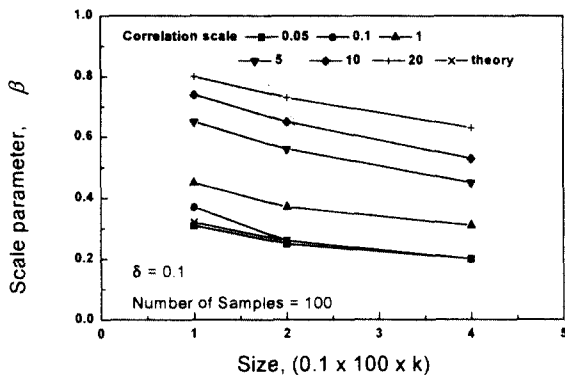


Fig. 9 Effect of scale parameter on size effect

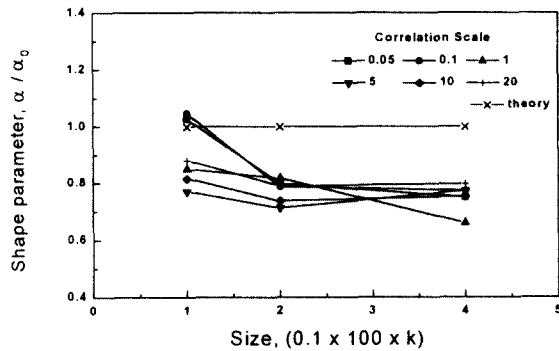


Fig. 10 Effect of normalized α on size effect

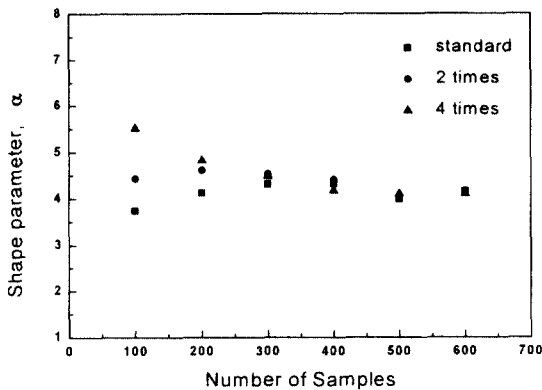


Fig. 11 Shape parameter, α vs. sample size

수 있듯이 만족할 만한 결과를 얻기 위해서는 400 본 정도의 시험편 수가 필요함을 알 수 있다.

이상과 같이 공간상관거리를 여러 가지로 변화시킨 재료강도 시뮬레이션 실험을 통하여 극치통계학에 의한 치수효과를 보면, 공간상관거리가 큰 경우에는 β 가 이론 보다도 큰 값을 가진다. 따라서 이것을 기준으로 기준시험편 보다 작은 부분의 강도를 추정하려고 하면 위험측의 추정이 될 가능성이 있다.

4. 결 론

재질의 변동을 공간적 확률과정이라 생각하여 평균화된 재질이 자기상관함수 및 분산에 미치는 영향을 검토하고, 또한 공간상관을 여러 가지로 변화시켜 정상 비가우스 확률과정의 시뮬레이션을 이용하여 재료강도시험을 수행하여 치수효과에 의한 최약링크모델의 적용 가능성을 검토한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 자기상관함수는 평균화의 거리 δ 에 의존하지 않고 거의 일치하였다.
- 2) 분산은 평균화의 거리가 증가하면 감소하는 경향을 나타내었고, 상관거리가 작은 경우에는 δ 의 증가와 더불어 분산이 급격히 감소하였다.
- 3) 공간 상관거리가 큰 경우에는 β 가 이론치 보다도 큰 값을 나타내었다. 또한, 상관거리가 아주 작은 경우의 척도계수 β 는 거의 이론과 일치하는 값을 얻었다.
- 4) 이론과 일치하는 형상계수를 얻기 위해서는 400본 정도의 시험편 수가 필요함을 알았다.

참고문헌

1. 岡村弘之, 板垣 浩, “強度の統計的取扱い”, 培風館, 1979
2. S. J. Kim, S. K. Oh, H. Itagaki and T. Ishizuka, “Effect of Specimen Thickness on Probabilistic Fatigue Crack Growth”, Proceedings of the 6th International Offshore and Polar Engineering Conference, Vol. IV, pp. 219~226, 1996
3. 김선진, “피로균열전파저항의 변동성에 의한 균열전파율의 해석”, 대한기계학회논문집, 제23권 제7호, pp. 1139~1146, 1999
4. K. Ortiz and A. S. Kiremidjian, “Time Series Analysis of Fatigue Crack Growth Rate Data”, Engng. Fract. Mech., Vol. 24, No. 5, pp. 657~58, 1986
5. Julius S. Bendat and Allan G. Piersol, “Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis”, John Wiley & Sons, 1980
6. 金善振, 板垣 浩, 石塚 鐵夫, “材質の空間的変動確の材料試験結果に及ぼす影響について(2)”, 日本造船學會論文集, Vol. 173, pp. 327~336, 1993
7. E. J. Gumbel, “Statistics of Extremes”, Columbia University Press, 1967
8. M. Shinozuka, “Stochastic Mechanics”, Columbia University, New York, 1987