

계층 요소 사용에 대한 연구

A Study on the Use of Hierarchical Elements

김진환

J. W. Kim

Key Words : Mixed Degree Finite Elements(혼합 차수 유한 요소), Hierarchical Basis Function(계층 기저 함수), Degree of Freedom(자유도), C^0 -continuity(C^0 연속성), Subparametric Element(저 자유도 요소), Poisson Equation(포아송 방정식)

Abstract : A mixed degree finite element solutions using hierarchical elements are investigated for convergences on a 2-D simple cases. Elements are generated block by block and each block is assigned an arbitrary solution degree. The numerical study showed that a well constructed blocks can increase the convergence and accuracy of finite element solutions. Also, it has been found that for higher order elements, the convergence trends can be deteriorated for smaller mesh sizes. A procedure for a variable fixed boundary condition has been included.

1. 서론

일찍이 Zienkiewicz 외 2인¹⁾은 계층(Hierarchical) 기저 함수의 효율적인 측면을 논한 바 있으며, Robinson²⁾은 계층함수의 적응적(adaptive) 고차화 기법(p-version)에 대한 적절함을 제안하였다. 또한 Demkowicz⁶⁾는 h-p 형태의 적응적 체분화 및 고차화 기법에 이를 적용하였다. 계층 요소, 즉 계층 기저 함수를 요소의 보간 함수로 사용한 요소 사용의 이점은 다음과 같다.

일반적으로 고차해를 구하기 위하여는 이에 상응하는 절점들을 요소가 가지고 있어야 하지만 이렇게 되면 너무나 많은 절점들이 필요하게 되어 최적의 요소 생성에 대한 이점이 없어지게 된다. 그러나 계층 형상 함수를 사용할 경우에는 요소의 기하적 형태를 2차 라그랑지안(Lagrangian) 요소로 한정할 수 있으며, 나머지 자유도(dof)는 변(edge)이나 면(face) 그리고 내부에 존재하게 된다. 2차 라그랑지안 요소란 기하학적으로 이차원일 경우 9개의 절점을 필요로 하고 3차원일 경우 27개의 절점을 필요로 한다. 이러한 요소에 계층 형상 함수를 사용하면 절점의 증가없이 고차의 수치해를 계산할 수 있다.

이러한 배경하에서 Devloo 외 2인⁷⁾은 압축성 유동 해석에 이를 응용한 바 있으나, 이러한 고급 기법의 일반적 사용은 간단한 기하학적 형상에 주로 한정되었으며, 코드 작성이 상당히 난해한 관계로 유지 및 관리에 어려움이 따른다.

다양한 형상에 대하여 요소 생성이 가능하며, 지역적으로 해의 차수(degree)를 다르게 할 수 있는 방법을 모색하고자 한다면 대체로 두가지 문제가 먼저 해결되어야 한다. 첫째는 요소 생성이 단순한 사면체 혹은 육면체 블록을 정의하고 이들 블록들이 위상학적 및 기하학적으로 잘 연결이 될 수 있는 방법을 찾아야하며, 둘째는 이러한 블록들에 대한 해의 차수를 임의로 할 경우, 블록간의 경계면에 위치한 인접 요소들에 대한 해의 연속성을 보장할 수 있는 방법을 찾아야 한다. 이들에 대한 사전 연구는 정렬 격자계에 대하여 하였으며 참고 문헌⁵⁾에 나타나있다. 본 연구는 이러한 환경(임의 차수의 블록)에 대한 유한 요소해의 수렴성을 가변적 고정 경계조건에 대하여 검토해 보기로한다.

2. 계층 요소의 구성

2.1 형상 함수

2차원 사면체 요소에 대한 계층형상 함수에 대하여 고려하기로 한다. 2차원 및 3차원의 경우, 일차원 함수의 텐서곱(tensor product)으로부터 요소

접수일 : 1999년 12월 8일

김진환 : 동의대학교 기계산업시스템공학부

형상 함수를 구현할 수 있다. 다음은 일차원 5차 (quintic) 요소까지에 필요한 계층 함수이다.

$$\begin{aligned}
 h_1(\eta) &= (1 - \eta)/2. \\
 h_2(\eta) &= (1 + \eta)/2. \\
 h_3(\eta) &= (\eta^2 - 1)/2. \\
 h_4(\eta) &= (\eta^2 - 1)\eta/6. \\
 h_5(\eta) &= (\eta^4 - 1)/24. \\
 h_6(\eta) &= (\eta^5 - \eta)/120.
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

Fig. 1에 보인 이차원 5차 요소에 대한 형상 함수는 다음과 같이 할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= h_1(\eta_1) h_1(\eta_2); \quad \varphi_2 = h_2(\eta_1) h_1(\eta_2) \\
 \varphi_3 &= h_2(\eta_1) h_2(\eta_2); \quad \varphi_4 = h_1(\eta_1) h_2(\eta_2) \\
 \varphi_5 &= h_3(\eta_1) h_1(\eta_2); \quad \varphi_6 = h_2(\eta_1) h_3(\eta_2) \\
 \varphi_7 &= h_3(\eta_1) h_2(\eta_2); \quad \varphi_8 = h_1(\eta_1) h_3(\eta_2) \\
 \varphi_9 &= h_3(\eta_1) h_3(\eta_2); \quad \varphi_{10} = h_4(\eta_1) h_1(\eta_2) \\
 \varphi_{11} &= h_2(\eta_1) h_4(\eta_2); \quad \varphi_{12} = h_4(\eta_1) h_2(\eta_2) \\
 \varphi_{13} &= h_1(\eta_1) h_4(\eta_2); \quad \varphi_{14} = h_4(\eta_1) h_3(\eta_2) \\
 \varphi_{15} &= h_3(\eta_1) h_4(\eta_2); \quad \varphi_{16} = h_4(\eta_1) h_4(\eta_2) \\
 \varphi_{17} &= h_5(\eta_1) h_1(\eta_2); \quad \varphi_{18} = h_2(\eta_1) h_5(\eta_2) \\
 \varphi_{19} &= h_5(\eta_1) h_2(\eta_2); \quad \varphi_{20} = h_1(\eta_1) h_5(\eta_2) \\
 \varphi_{21} &= h_5(\eta_1) h_3(\eta_2); \quad \varphi_{22} = h_3(\eta_1) h_5(\eta_2) \\
 \varphi_{23} &= h_5(\eta_1) h_4(\eta_2); \quad \varphi_{24} = h_4(\eta_1) h_5(\eta_2) \\
 \varphi_{25} &= h_5(\eta_1) h_5(\eta_2); \quad \varphi_{26} = h_6(\eta_1) h_1(\eta_2) \\
 \varphi_{27} &= h_2(\eta_1) h_6(\eta_2); \quad \varphi_{28} = h_6(\eta_1) h_2(\eta_2) \\
 \varphi_{29} &= h_1(\eta_1) h_6(\eta_2); \quad \varphi_{30} = h_6(\eta_1) h_3(\eta_2) \\
 \varphi_{31} &= h_3(\eta_1) h_6(\eta_2); \quad \varphi_{32} = h_6(\eta_1) h_4(\eta_2) \\
 \varphi_{33} &= h_4(\eta_1) h_6(\eta_2); \quad \varphi_{34} = h_6(\eta_1) h_5(\eta_2) \\
 \varphi_{35} &= h_5(\eta_1) h_6(\eta_2); \quad \varphi_{36} = h_6(\eta_1) h_6(\eta_2)
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

각 요소해의 구성에 요구되는 형상함수는 일반적으로 요소의 보간 차수에 따라 정해진다. Table 1에는 요구되는 형상함수를 요소 절점과 차수에 대하여 번호로 나타내었으며, Fig. 1에는 요소 절점 번호를 표시하였다.

블록들의 차수가 서로 다르게 정의되면 블록의 경계에 위치한 요소들에 대하여는 해의 연속성을 고려하여야 한다. 간단한 예를 Fig. 2에 나타내었으며, 이 경우 요소 "A"는 선형 요소이며 요소 "B"는 2차(quadratic) 요소이다. 요소 "A"는 일종의 천이 요소로서 요소 "B"의 절점 번호 8에 해당되는 자유도를 요소 "A"의 6번 절점이 수용할 수 있어야 서로의 변(edge)을 통하여 연속적인 해를 구현할 수 있다. Fig. 1의 요소 "A"가 필요로 하는 형

상함수를 순서대로 표시하면, $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, 0, \varphi_6, 0, 0, 0\}$ 이 된다.

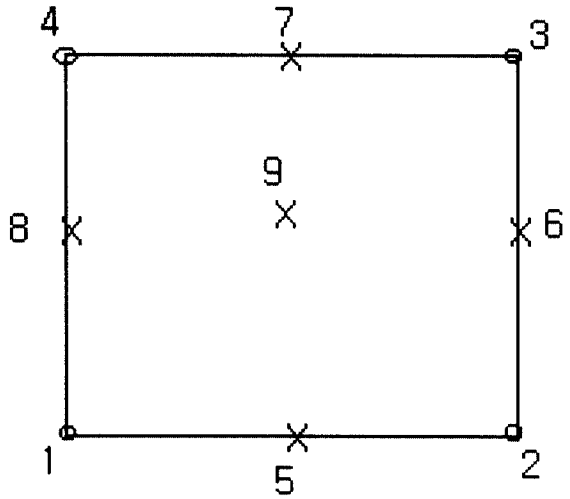


Fig. 1 Element node numbering

Table 1 DOF(Degree of Freedom) numbers of element nodes in two dimensions

Deg.	Element Node No.								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4					
2					5	6	7	8	9
3					10	11	12	13	14,15,16
4					17	18	19	20	21,22,23,24,25
5					26	27	28	29	30,31,32,33,34,35,36

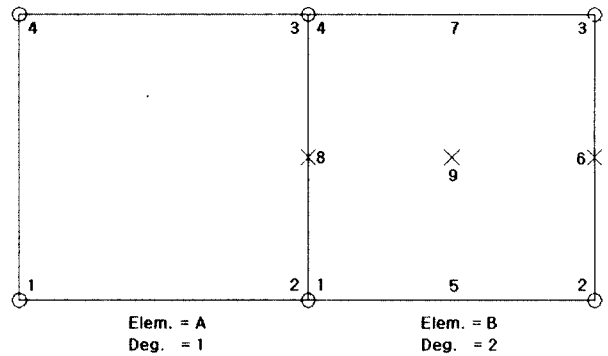


Fig. 2 An example of transition element

2.2 변수형 고정 경계조건

계층요소의 꼭지점(vertex)에 대한 자유도는 변

위를 나타내지만 그 이외의 절점(변, 면, 내부)들에 대한 자유도는 변위가 아니다. 그러나 고정 경계치들은 변위에 대하여 주어지기 때문에 이러한 값들을 계층함수의 자유도 특성에 맞게 변환시킬 필요가 생긴다. 이 경우 변(edge) 혹은 면 자유도에 대한 값을 정하기 위하여는 필요한 수의 선형 연립 방정식을 풀어야 한다.

요소 내부 및 경계의 임의 위치에 대한 변위값 T_p 는 아래와 같다.

$$T_p(\underline{x}) = \sum N_i(\underline{y}) U_i \quad (2.3)$$

여기서 \underline{x} 및 \underline{y} 는 서로 대응하는 실제 좌표 및 요소내의 계산 좌표이며, T_p 는 위치에 대하여 주어진 변위값, N_i 는 형상함수, U_i 는 자유도 값이다.

만일 요소가 고정 경계에 위치한다면, T_p 는 위치에 대하여 주어진 경계값이며 U_i 는 경계조건으로 취하고자 하는 자유도 값이다. 사변형 요소의 임의의 변에 대하여 식(2.3)을 다시 쓰면 다음과 같다.

2차(quadratic) 요소의 경우,

$$N_3(0)U_3 = T_p(0) - N_1(0)U_1 - N_2(0)U_2 \quad (2.4)$$

여기서 U_1 및 U_2 는 꼭지점의 변위값으로 주어진 경계 조건으로부터 결정될 수 있으며, U_3 는 구해져야 할 새로운 경계값이다. 여기서 경계변위 T_p 는 $\eta = 0$ 에 대하여 구하였다.

3차(cubic) 요소의 경우, 두 개의 독립적인 식이 만들어져야 하며, 본 연구에서는 $\eta = -1/3$ 와 $1/3$ 의 두점에 대한 변위 T_p 를 구하여 아래와 같이 수행하였다.

$$\begin{aligned} N_3(-1/3)U_3 + N_4(-1/3)U_4 \\ = T_p(-1/3) - N_1(-1/3)U_1 - N_2(-1/3)U_2 \end{aligned} \quad (2.5-1)$$

$$\begin{aligned} N_3(1/3)U_3 + N_4(1/3)U_4 \\ = T_p(1/3) - N_1(1/3)U_1 - N_2(1/3)U_2 \end{aligned} \quad (2.5-2)$$

4차(quartic) 요소의 경우, 3개의 독립적인 식이 만들어져야 하며, $\eta_i = -1/2, 0$. 그리고 $1/2$ 의 세 점에 대한 T_p 를 구하여 아래와 같이 수행하였다.

$$\begin{aligned} N_3(\eta_i)U_3 + N_4(\eta_i)U_4 + N_5(\eta_i)U_5 \\ = T_p(\eta_i) - N_1(\eta_i)U_1 - N_2(\eta_i)U_2 \\ \eta_i = -0.5, 0.0, 0.5 \end{aligned} \quad (2.6)$$

마지막으로 5차(quintic) 요소의 경우, 4개의 독립적인 식이 만들어져야 하며, $\eta_i = -0.6, -0.2, 0.2$ 그리고 0.6 의 4점에 대한 T_p 를 구하여 아래와 같이 수행하였다.

$$\begin{aligned} N_3(\eta_i)U_3 + N_4(\eta_i)U_4 + N_5(\eta_i)U_5 + N_6(\eta_i)U_6 \\ = T_p(\eta_i) - N_1(\eta_i)U_1 - N_2(\eta_i)U_2 \\ \eta_i = -0.6, -0.2, 0.2, 0.6 \end{aligned} \quad (2.7)$$

이러한 계산에서 N_3 와 N_5 는 기함수, 그리고 N_4 와 N_6 는 우함수임을 이용하면 편리하며, 또한 고정 경계조건이 일정하면 꼭지점을 제외한 자유도 값은 0이 됨을 알 수 있다.

2.3 계층 요소의 계산 예

계층 요소의 계산과정을 간단히 보기 위하여 아래의 이차원 포아송(Poisson) 방정식을 이용하기로 한다.

$$-\nabla^2 u = f(x,y), \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \quad (2.8)$$

갈러킨 잔여법(galerkin residual method)을 식(2.8)에 적용하고 임의의 요소에 대하여 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} -\int \{\psi\} \nabla u \cdot n \, d\Gamma + \int \nabla\{\psi\} \cdot \nabla u \, d\Omega \\ = \int \{\psi\} f(x,y) \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.9)$$

여기서

- $\{\psi\} \equiv$ 요소의 형상함수
- $n \equiv$ 요소외부로 향하는 단위 법선 벡터
- $\Gamma \equiv$ 요소의 경계
- $\Omega \equiv$ 요소의 내부를 의미한다.

식(2.9)의 좌변 둘째항의 계산과정을 이차원 요소의 경우에 대하여 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \int \nabla\{\psi\} \cdot \nabla u \, d\Omega \\ = \iint \nabla\{\psi\} \cdot \nabla\{\psi\}^T \, dx dy \{U\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

여기서 $\{U\}$ 는 요소의 자유도이다. 물리 좌표계 (x,y) 와 계산좌표계 (η, ξ) 와의 변환을 고려하면 식(2.10)의 우변 피적분함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \nabla\{\psi\} \cdot \nabla\{\psi\}^T \\ = [(\partial\{\psi\}/\partial\eta)(\partial\eta/\partial x) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\partial\{\psi\}/\partial\xi)(\partial\xi/\partial x) * \\
 & [(\partial\{\psi\}/\partial\eta)(\partial\eta/\partial x) + \\
 & (\partial\{\psi\}/\partial\xi)(\partial\xi/\partial x)] \\
 + & [(\partial\{\psi\}/\partial\eta)(\partial\eta/\partial y) + \\
 & (\partial\{\psi\}/\partial\xi)(\partial\xi/\partial y)] * \\
 & [(\partial\{\psi\}/\partial\eta)(\partial\eta/\partial y) + \\
 & (\partial\{\psi\}/\partial\xi)(\partial\xi/\partial y)] \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

식(2.11)에서 $\partial\{\psi\}/\partial\eta$ 와 $\partial\{\psi\}/\partial\xi$ 는 계층함수를 이용하지만, $\partial\eta/\partial x$ 와 $\partial\xi/\partial x$ 등은 요소의 가하학적 성질에 관련됨으로 라그랑지안 함수를 사용하여 구해야 함이 타당하다. 마찬가지로 미소 면적 $dx dy = J d\eta d\xi$ (J 는 변환 Jacobian)의 계산에도 라그랑지안 함수를 사용하여야 한다.

3. 수치 실험

3.1 임의 차수의 블록 해

임의의 차수를 가진 블록에 대한 코드의 수행과 해의 수렴성을 보기 위하여 아래의 이차원 Poisson 방정식을 이용하였다.

$$-\nabla^2 u = 1.0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \quad (3.1)$$

where

$$\begin{aligned}
 u &= 0 \quad \text{on sides } x=1 \text{ and } y=1 \\
 \partial u / \partial n &= 0 \quad \text{on sides } x=0 \text{ and } y=0
 \end{aligned}$$

식(3.1)의 엄밀해는 Reddy³⁾에 제시되어있으므로 임의의 점에 대한 오차는 쉽게 구할 수 있다. 이 경우, $(x, y) = (0.2, 0.2)$ 에서 $(0.8, 0.8)$ 까지 16개의 등간격 표본점에 대한 오차의 자승을 합하여 비교의 기준으로 하였다. 블록의 구성은 Fig. 3에 나타내었다.

일반적인 수렴성을 보기 위하여 전 영역에 동일 차수의 요소를 3차까지 생성하여 수행하여 보았으며, 수치해에 대한 오차를 Fig. 4에 보였다. 여기서 우리는 3차 요소 해의 수렴성은 선형요소보다 월등히 우수하나 요소가 세분화됨에 따라 수렴성이 저해됨을 볼 수 있다.

4 블록에 대한 수치해에 대한 오차는 Fig. 5에 도시하였다. Fig. 5에서 Deg(3,2,2,1)의 의미는 블록 No. 1은 3차 요소, 블록 No. 2와 No. 3는 2차 요소, 블록 No. 4는 1차 요소들로서 구성되어 있다는 것이다. 이 경우 Deg(3,2,2,2)의 수렴성이 가장 좋으며 요소 세분화에 대하여도 계속 수렴함을 볼 수 있다. 이러한 혼합 차수의 해는 수렴성을 저

해하지 않으면서 상당히 정밀한 해를 제공할 수 있다는 것은 주목할 필요가 있다고 하겠다.

3.2 고차 요소해의 진동

Fig. 4에 나타난 3차 요소해의 수렴성이 요소 세분화에 따라 저해됨은 예상하지 못하였다. 따라

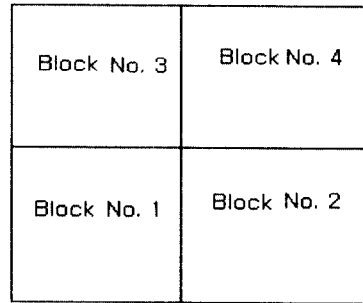


Fig. 3 Block numbering

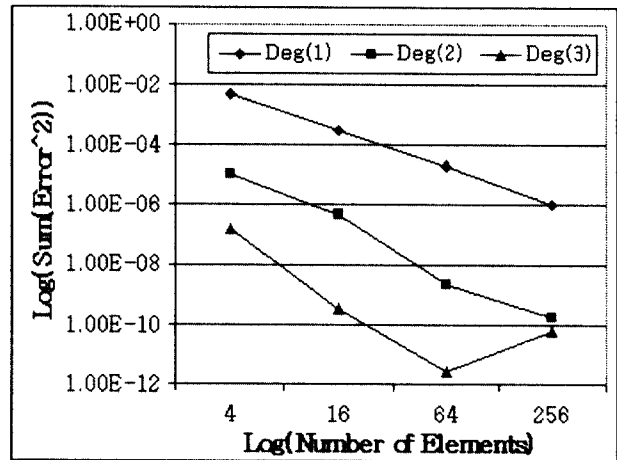


Fig. 4 Error plots for two dimensional poisson problem

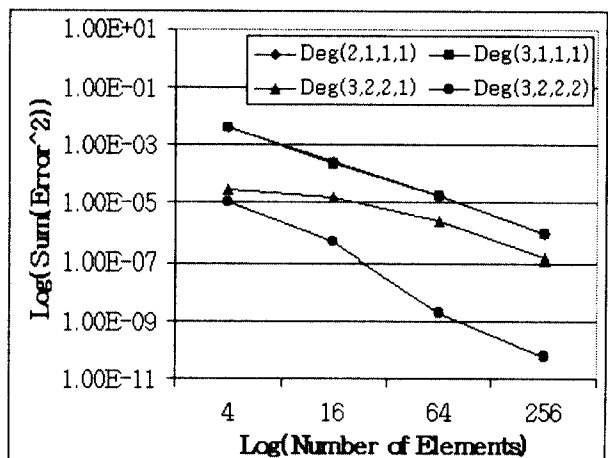


Fig. 5 Error plots for four block method

서 아래와 같은 일차원 경계치 문제를 통하여 확인하고자 한다.

$$-d^2u/dx^2 - u + x^2 = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.2)$$

where $u(0) = 0 = u(1)$

$x = 0.05$ 와 $x = 0.95$ 에서 10개의 등간격 표본점에 대한 오차의 자승을 합하여 비교의 기준으로 하였으며, 3차 요소까지의 결과를 Fig. 6에 나타내었다. 이 경우의 3차 요소 수렴성은 이차원의 경우보다 더 빨리 저해됨을 보이고 있다.

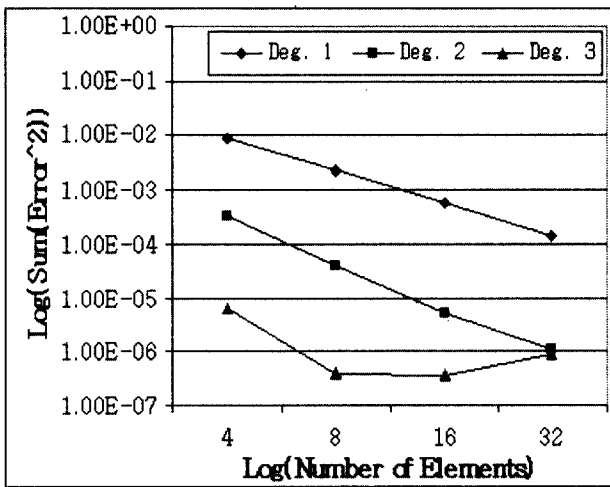


Fig. 6 Error plotting for 1-D case

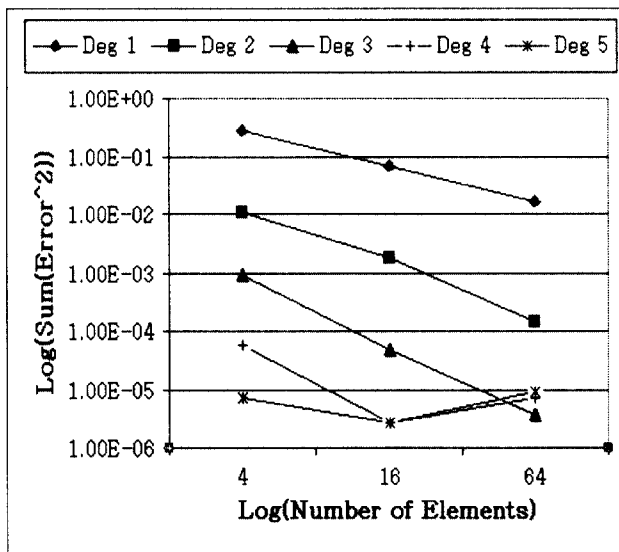


Fig. 7 Error plotting for 2-D heat conduction case

이러한 현상을 좀 더 관찰하기 위하여 아래와 같은 변수형 고정 경계를 갖는 이차원 열전도 방

정식에 대하여 5차(quintic) 요소까지의 수치해에 대한 오차를 Fig. 7에 나타내었다.

$$\nabla^2 T = 0.0, \quad 0 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad (3.3)$$

where

$$T = 0 \quad \text{on sides } x=3$$

$$\partial T / \partial n = 0 \quad \text{on sides } x=0 \text{ and } y=0$$

$$T = 100 \text{ Cos}(\pi x/6.) \quad \text{on side } y=2.$$

식(3.3)의 엄밀해는 Ozisik⁸⁾에 나타나있다.

이를 통하여 본 연구에서 제시된 경계 자유도 결정의 적절성을 확인하였고, 또한 고차 요소 해의 요소 세분화에 따른 수렴 저해 현상을 재확인할 수 있었다. 더욱이 고차화가 될 수록 수렴저해 현상이 더 빨리 나타남을 알 수 있었다.

요소가 세분화되면 당연히 요소 내부의 해는 선형에 가까운 해가 될 것이며, 엄밀해가 부드러운 함수라면 이러한 경향은 더욱 강해

질 것이다. 세분화된 요소에 고차 함수를 적용한다는 것은 바꾸어 말하면, 직선을 고차 다항식으로 근사화시키는 형태가 된다. 이 경우 고차 다항식은 직선을 따라서 진동하는 해를 만들어내지 않을 수 없다.

4. 결론

본 연구에서는 혼합 차수 유한요소 해에 대하여 살펴보았다. 혼합 차수의 사용 목적은 선형 요소가 지나는 비교적 빠른 계산 시간과 고차 요소가 제공하는 정확성을 적절히 배분함으로써 향상된 계산법을 찾고자 함에 있다.

이러한 부분적 고차화 방법의 개발에는 계층함수를 사용함으로써 비교적 용이하게 실현시킬 수 있다. 그러나 계층함수의 특성상 변수형 경계 조건을 처리해야하는 문제가 있으며, 본 연구에서는 이에 대한 방법을 제시하였다.

또한 세분화된 요소에 고차 함수의 적용은 오히려 해의 수렴성 및 정밀성을 저해할 수 있으며, 따라서 고차 요소를 사용할 때 요소를 너무 세분화한다면 기대되는 수렴성을 얻기 어렵다.

후 기

이 논문은 1999학년도 동의대학교 자체 학술연구 조성비의 지원을 받아 작성되었으며 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

1. O. C. Zienkiewicz, J. P. de S. R. Gago, and D. W. Kelly, "The hierarchical concept in finite element analysis", Computers and Structures, Vol. 16, pp. 53~65, 1983
2. John Robinson, "An Introduction to Hierarchical Displacement Elements and the Adaptive Technique", Finite Elements in Analysis and Design, Vol. 2, No. 1, pp. 377~388, 1986
3. J. N. Reddy, "An Introduction to the Finite Element Method", McGraw-Hill, pp. 210~218, 1985
4. Rod Stephens, "Inside Secrets Programming VB Graphics", John Wiley & Sons, Inc., 1998
5. 김진환, "3차원 정렬 유한요소 생성 코드 개발에 대한 연구", 한국해양공학회지, 제13권, 제1호, pp. 11~17, 1999
6. L. Demkowicz, "An Adaptive h-p Finite element strategy for Two-dimensional Boundary value problems: A Theory Manual", COMCO Report, Austin, Texas 1988
7. P. Devloo, J. T. Oden and P. Pattani, "An h-p Adaptive Finite Element Method for the Numerical Simulation of Compressible Flow", Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 70, No. 2, pp. 203~235, 1988
8. M. N. Ozisik (원저), 차 인규 외 2인(공역), "열 전달", 보성문화사, p. 168, 1990