韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 505-517.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 505-517.

컴퓨터 대수체계(CAS) Module이 포함된 Graphing Calculator를 활용한 교실 수업모형

- 방정식과 함수 단원을 중심으로, Casio fx 2.0 -

주관: 한국 카이 시스템

수학 학습에서 컴퓨터와 계산기의 활용은 시각화의 강화로부터 직관력과 사고력의 향상을 가져왔다. 컴퓨터 대수체계(Computer Algebra System)가 탑재된 수학 학습용 컴퓨터 프로그램과 계산기가 활발히 사용되고 있으며, 교수매체로서의 활용은 지식 정보전달 체계와 학습자의 지식 구성방법에 새로운 패러다임을 형성하였다. 특히 수학학습용 그래픽 계산기(Graphing Calculator)는 휴대형(Hand-held Technology)으로 학습공간의 이동(Mobil Education)이 가능하며, 수학학습 전용기라는데 의미를 둘 수 있다.

Symbolic Graphing Calculator를 활용한 수업에서 학습자는 계산기를 가지고, 기호연산 실행 조작을 통해 자신의 사고과정을 표현하고, Symbolic Graphing Calculator는 실행 조작에 즉각적으로 과정과 결과를 제공하며, 다른 표상과 상호작용을 함으로써 학습자 스스로의 규제가 강화된 과정을 통해 지식을 구성하게 된다. 이때 교사는 지식 정보전달 체계인 대화형 실행매체(IMTs)를 작성하여 학습자의 지식 형성에 안내자의 역할을 하게 된다.

이번 워크샵에서는 CASIO fx 2.0을 활용한 교실 수업모형을 그래프 표상과 연계한 방정식의 풀이과정을 통해 알아본다.

韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 507-517.

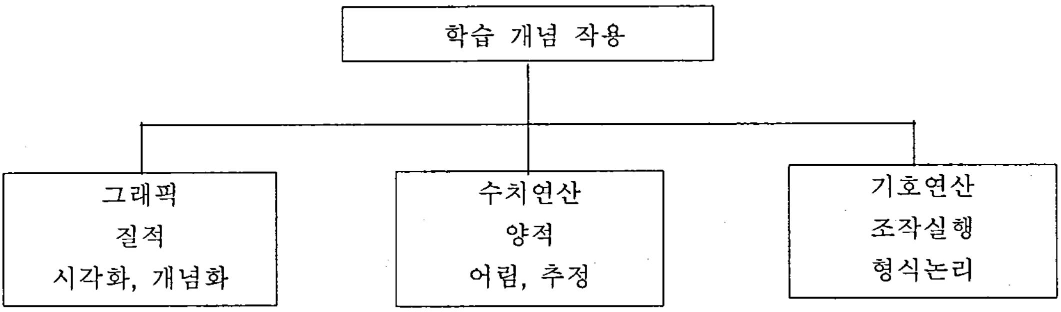
J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 507-517.

컴퓨터 대수체계(CAS) Module이 포함된 graphing Calculator를 활용한 교실 수업모형

-연립 일차방정식과 이차함수를 중심으로, Casio fx 2.0-

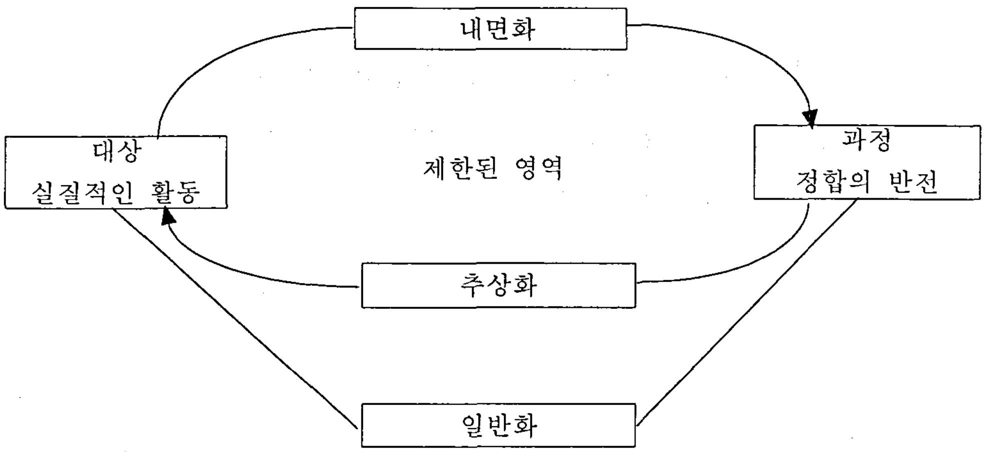
허 만 성 (한국 카이 시스템)

컴퓨터의 응용프로그램 및 그래핑 계산기를 수학학습의 매체로 활용함에 있어서, 대화형 실행 매체(Interactive Mathematics Texts)는 그래픽(Graphics)기능으로부터 질적(Qualitative)인 시각화·개념화 및 수치적(Numerics)기능으로부터 양적(Quantitative)인 어림과 추정의 기능에 더하여 기호연산(Symbolics)의 기능으로부터 조작실행(Manipulative)의 형식논리를 추가함으로써 수학학습의 과정에 긍정적인 결과가 있음이 보고되었다(David Tall, 1992). <그림 1>



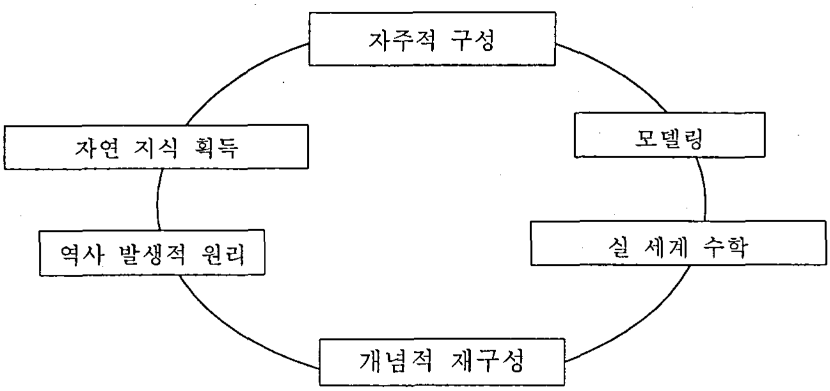
<그림 1> 대화형 실행매체(IMTs)의 표상과 학습개념 요소

이는 대상에 대한 실질적인 활동과 과정에 대한 정합의 반전관계에서 내면화 및 제한된 영역에서 추상화의 고리를 형성하여 일반화하는 일련의 과정으로, 구성주의에 따른 수학학습 이론에 적합한 구조를 나타냄으로서 필요성은 한층 더 부각되었다(Ed Dubinsky, 1994). 컴퓨터 대수체계(Computer Algebra System)가 탑재된 수학학습용 컴퓨터 응용 프로그램과 계산기를 교수 실행 매체로서 활용함은 교수·학습자의 지식 정보전달 체계와 지식 구성방법에 또 다른 패러다임을 형성하였다. <그림 2>



<그림 2> 반영적 추상화 (Ed Dubinsky, 1994)

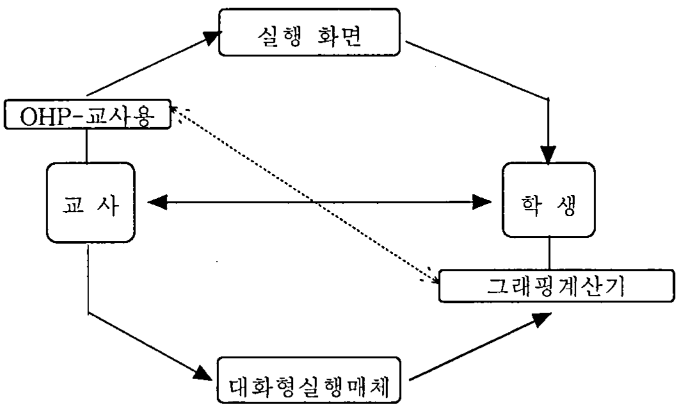
수학학습용 그래핑 계산기는 휴대형(Hand Held Technology)으로 학습공간의 이동이 가능함으로서 실세계 탐구 모델링을 구현함에 자연지식의 구성으로 일상생활로서 수학을 가능하게 하였으며, 그 개념이 실생활 속에 다시 적용되어 발전하였다. Vygotsky는 인간이 역사를 거듭하면서 창조하고, 변형시킨 문화 즉, 사회적 지식은 처음에는 개인 밖의 사회에 외재하고 있다가 사회적 상호작용 즉, 교수-학습을 통해 외적 지식의 내적 재구성이 일어난다고 밝히고 있다. 학습자는 지식구성방법에 있어서 역사 발생적인 관점에서 보면, 수학적 개념은 일상생활 속에서 관찰과 탐구에 의해 발견되었고 자연 지식 획득으로부터 자주적 구성이 일어난다(Jan Golinski, 1998). 실생활 혹은 실제 문제 상황을 수학적 문제 상황이나 표상으로 변환하여 문제를 해결하는 모델링를 통해, 개념의 재구성, 추상화가 일어나게 된다(Thomas A. Romberg, 1994). <그림 3>



<그림 3> 개념적 재구성과정

수학학습 전용기로서 그래핑 계산기는 현재 수학 교육과정상 구별되어 있는 각 영역별 및 단원간의 다양한 관계를 표현할 수 있도록 표상간 연결이 가능해야 한다. 예를 들어 연립방정식의 풀이 방법으로 가감법과 대입법 등을 이용한 대수적 풀이로서 기호연산 표상과 그래픽 표상을 이용하여 함수의 그래프의 교점을 찾는 수치적 표상으로부터 해를 구할 수 있을 것이다. Casio fx 2.0은 Main Menu에 CAS, Algebra, Graph · Table 등, 교환 요소별로 구분하여 Icon그룹을 형성하고 있으며, 대수 요소(CAS, Algebra 등)와 함수 요소(Graph, Dynamic Function 등)가 연동되어 구동할 수 있도록 개방형 문서연결 개념[1]이 적용되어 있다. 또한 실생활의 자료를 수집하고, 수집한 자료를 회귀 법을 이용해 수학적 언어인 그래프와 식으로 표현하여, 수학적 문제 상황이나 표상으로 변환, 분석할 수 있다. 또한 자신의 사고를 기호연산 실행조작을 통해 탐구하고, 학습의 단서를 제공받게 된다(James. J. Kaput, 1999).

교실수업에서는 학습자의 개별학습을 보장하면서, 다양한 수학적 요구를 수렴할 수 있는 방향 제시가 필요하다. 학습자는 그래핑 계산기를 가지고 자신의 사고 과정을 표현하고, 계산기는 기호연산 실행조작에 즉각적으로 과정 및 결과를 제공하며, 다른 표상과 상호 작용함으로써 학습자 스스로의 규제가 강화된 과정을 통해 지식을 구성하게 된다. 이때 교사는 능동적인 도입을 설정하여 교사용 매체-OHP를 활용하여 학생과 함께 관찰하고, 학생이 무엇을 관찰하고, 그 관찰 속에서 발견하고 인식해야 할 내용을 적절한 발문을 통해 개념을 형성하도록 도와준다. 또한 지식 정보전달 체계인 대화형 실행매체(IMTs)를 작성하여 학습자의 지식형성에 안내자의 역할을 하게 된다. 이와 같은 개별적 시도와 탐구를 통한 개념의 재구성은 같은 장소와 같은 시간, 같은 내용이라 할 지라도, 학습자 수준을 고려한 수준별 개별학습을 가능하게 한다. 변화를 시도할 수 있는 여유로부터 활용목적에 부합하는 학습내용의 재구성을 하게 되고, 재구성으로 인해 다양한 교수-학습이 나타나게 된다.<그림 4>



<그림 4> 그래핑 계산기를 활용한 교실 수업모형

1) Open-Documents

부록에서는 연립 일차방정식 및 이차함수에 관한 대화형 실행매체를 CASIO fx 2.0을 사용하여 작성하였으며, 교실 수업에서 귀납적 학습과정 구성 모형을 제시하고자한다.

참 고 문 헌

Tall D. (1992). Mathematical Process and Symbols in the Mind. Zaven A. Karian (Ed.) *Symbolic Computation in Undergraduate Mathematics Education*: MAA, pp.57-68.

Ed Dubinsky. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. Alan H. Schoenfeld (Ed.) *Mathematical Thinking and Problem Solving*: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. pp.221-243

Kaput J. & Roschelle J. (1999). The Mathematics of Change and Variation from a Millennial Perspective: New Content, New Context. Celia Hoyles, Candia Morgan and Geoffery. *Rethinking the Mathematics Curriculum*. Woodhouse (Eds.): Falmer Press. pp.155-170.

Golinski J. (1998). *Making Natural Knowledge-Constructivism and The History of Science*: Cambridge University Press.

Romberg A. (1994). Classroom Instruction That Fosters Mathematical Thinking and Problem Solving: Connections Between Theory and Practice. Alan H. Schoenfeld (Ed.) *Mathematical Thinking and Problem Solving*: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. pp.287-304.

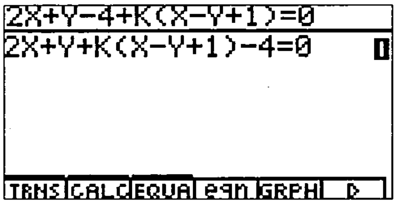
workshop 1.

> k가 임의의 상수일 때,
> $2x+y-4+k(x-y+1)=0$의 그래프는 항상 일정한 점을 지나는 직선임을 관찰해 보자.

1. k에 임의의 값을 넣어 그 직선의 방정식을 그래프에 나타내어 보자.

가. 식을 입력하여

$$2x+y-4+k(x-y+1)=0$$



나. k에 임의의 값을 대입하여 보자

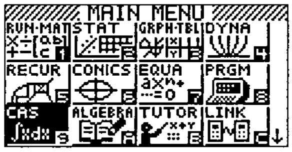
k	0.5	6	
a	$\frac{x-y+1}{2}+2x+y=0$		
b	$\frac{\qquad}{2}=0$	$8x-5y+2+0$	
c	$y=$	$y=$	$y=$

cursor를 위 방향으로 ↑↑↑← 움직여 [substitute(eqn(1), k =] 에서 원하는 K값을 바꾸어 위와 같이 전개하여 위의 빈칸에 적어 보자.

☞ 실 행 단 계

[AC/ON]을 눌러 켠다.

[MENU]을 눌러, Main Menu Icon이 나타나면 오른쪽 위의 cursor pad를 이용, cursor를 [CAS]에 두고 [EXE]



이전 내용을 삭제하기 위해 [F6] (▷)

[F1] (CLR)를 누르면 3개의 메뉴가 나타난다.

이 중 3: ALLEQU에 cursor를 두고 [EXE]

"Delete All Equations? " 이라는 메시지가 나타나면, [EXE] [F6] ▷

가. 2 [X,θ,T] [+] [ALPHA] [−] [−] 4 [+] [ALPHA] [,] [(] [X,θ,T] [−] [ALPHA] [−] [+] 1 [)] [SHIFT] [·] 0 [EXE]

나. a. 값을 대입하면

[F1](TRNS) 9: sbstit [EXE]

[F4](eqn) 1 [)] [,] [ALPHA] [,] [SHIFT] [·] 0.5 [)] [EXE]

b. 식을 간단히 하면,

[F1](TRNS) 6: simplfy [EXE]

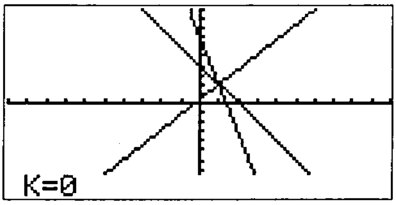
[F4](eqn) 2 [)] [)] [EXE]

c. y 에 관하여 풀면

[F1] [4] eqn(3) [,] [ALPHA] [−] [)] [EXE]

전개하여 나타난 식을 각각 Y2, Y3에 입력하자.

다. 그래프에 나타내어 보자.



위의 그림은 Y1, Y2의 그래프를 나타낸 것이다.

임의로 정한 Y3의 그래프를 위의 그림에 그려보자.

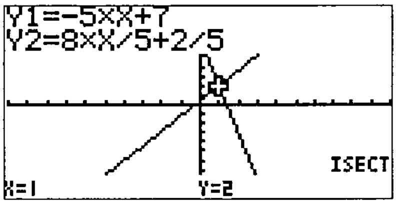
세 직선은 어떤 관계가 있는가?

____

____

2. 세 직선이 만나는 교점을 구해보자.

가. Y1, Y2 두 직선이 만나는 교점의 좌표는



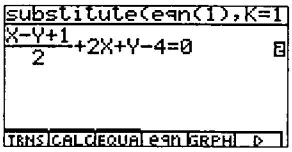
교점의 좌표는 (,)

d. 식을 Y1에 저장하면,

[F3] [7] eqn(4) [ )] [→] [VARS] [F1] 1 [EXE] [ESC]

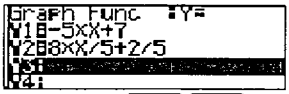
e. 이전의 k 값을 [DEL] 을 이용해 삭제하고,

다른 값을 대입한 후 [EXE]



[F5](GRPH)를 누르면, 식 입력창이 나타나고,

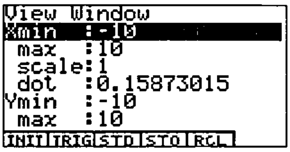
함수식 Y1, Y2, Y3 이 저장되어 있다.



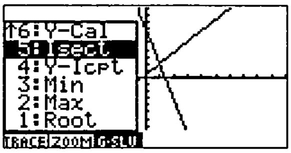
좌표축 범위를 설정 [SHIFT] [OPTN] (V-Window)

[F3](STD) : x, y축의 최소, 최대 범위를

-10...10 으로 정한다. [EXE] [EXE]



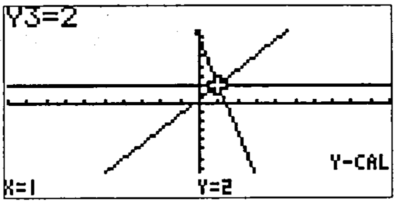
[F3] G · SLV 5 : Isect [EXE]



Y1에 cursor 위치 [EXE]

Y2에 cursor 위치 [EXE]

나. Y3의 직선도 교점을 지나는지 관찰해 보자.

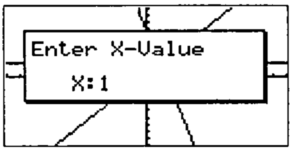


ESC

F3 G · SLV 6 : Y-Cal EXE

cursor를 ↓↓↓로 움직여 Y3 선택 후 EXE

1 EXE



3. 직선 $2x+y-4+k(x-y+1)=0$의 그래프는

점 (,)를 지나므로, 이 점의 좌표를

식에 대입하여 보자.

$x=$, $y=$ 일 때, $2x+y-4+k(x-y+1)=0$은

k값에 관계없이 항상 성립한다.

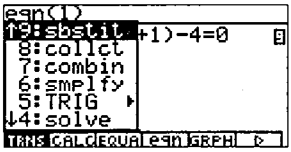
즉, $x=1$, $y=2$일 때, $0\times k=0$ 이므로

$\begin{cases} \quad =0 \\ \quad =0 \end{cases}$ 만족하는 값이다.

ESC ESC ESC (CAS Mode로 돌아온다.)

F4(eqn) 1) EXE

F1 9 (sbstit)

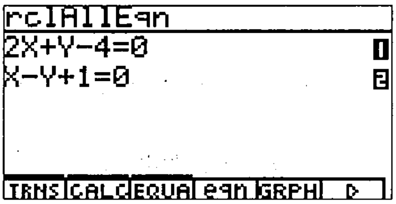


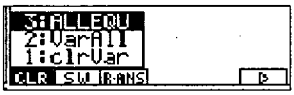
substitute (eqn(5) , x=1, y=2) EXE

4. $2x+y-4=0$, $x-y+1=0$ 을 동시에 만족하는

x , y을 구하여 보자.

가. 두 식을 입력하여 보자.





이전내용을 삭제, 식 입력

가.2 X,θ,T + ALPHA − − 4

SHIFT · 0 EXE

X,θ,T − ALPHA − + 1

SHIFT · 0 EXE

F3 3 (rclAll) EXE

나. 가감법을 이용하여 x, y 값을 구하여 보자.

두 식을 더하여 미지수가 x뿐인 식으로 만들면.

eqn(1) + eqn(2) EXE

양변에 (   )을 더하면,

+ 3 EXE

같은 수 (   )으로 나누면

÷ 3 EXE

x =

다. substitute명령어를 이용해 eqn 1 식에 x값을 대입하여 y값을 알아보자

$y=$

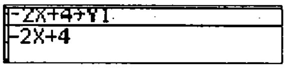
5. Dynamic Function을 이용해

$2x+y-4=0\cdots①$, $x-y+1=0\cdots②$,

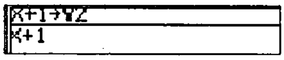
$2x+y-4+k(x-y+1)=0\ \cdots③$

세 그래프의 관계를 알아보자.

가. 위의 세 직선의 방정식을 y에 관해 풀어, 각각 Y1,Y2,Y3라 두자.

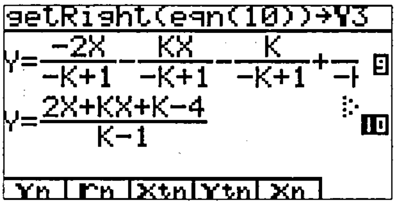


$y=-2x+4\qquad\cdots①$



$y=\qquad\qquad\cdots②$

나. ③의 식을 Y3에 입력하자.



③의 식을 입력,

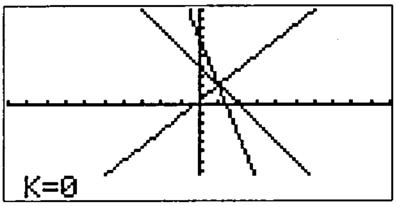
F1 4 (solve) eqn(8), Y) EXE

F1 7 (combin) eqn(9) EXE

F3 7 (getRgt) eqn(10)) → VARS

F1 3 EXE

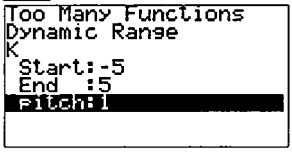
다. 그래프를 나타내어보자.



[MENU] [DYNA]

[F1](SEL)를 이용하여 Y1,Y2,Y3를 선택

[EXE] [F2](RANG)



[EXE] [F3](SPEED) [F3](▷) [EXE] [EXE]

∴ k가 임의의 상수일 때, $2x+y-4+k(x-y+1)=0$의

그래프는 두 직선(= 0)과 (= 0)

의 교점을 지나는 직선이다.

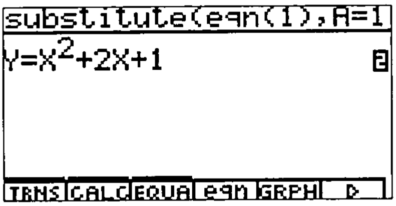
workshop 2.

> a가 임의의 상수일 때, $y=ax^2+2x+1$의 그래프를 나타내고 꼭지점의 좌표를 구해보자.

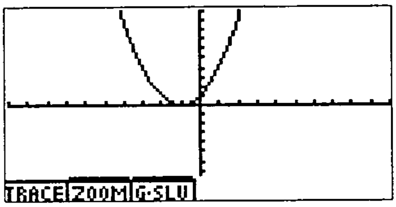
1. a의 값이 다음과 같을 때, $y=ax^2+2x+1$의 그래프를 나타내어 보자.

가. 이차함수 $y=ax^2+2x+1$의 식을 입력하여 보자.

나. $y=ax^2+2x+1$에 $a=1$을 대입하자.



다. 우변의 식을 Y1에 입력한 후 그래프를 나타내면,



라. 꼭지점의 좌표를 찾아보자.

☞ 실행단계

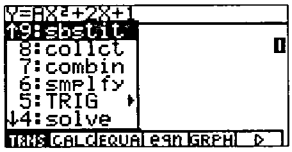
MENU CAS EXE

이전 내용을 삭제하기 위해 F6 (▷)

F1 (CLR) 3: ALLEQU EXE F6 ▷

가. ALPHA − SHIFT · ALPHA X,θ,T X,θ,T X² + 2 X,θ,T + 1 EXE

나. F1 9 (sbstit)



F4 (eqn) 1) , ALPHA X,θ,T SHIFT · 1) EXE

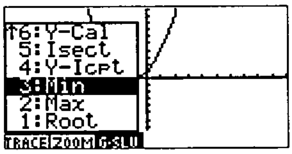
다. F3 7 eqn(2)) → VARS F1 1 EXE

ESC F5 (GRPH)

Y1을 제외한 나머지 식을 F2 (DEL)로 삭제

F6 (DRAW)

라. F3 3: Min

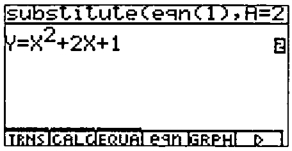


마. a의 값을 변화하여 아래의 빈칸에 적어보자.

a	$y=ax^2+x+1$	꼭지점	$y=a(x-p)^2+q$
1	$y=x^2+2x+1$	(-1 , 0)	$y=1*(x+1)^2+0$
2	$y=$	(,)	$y=$
3	$y=$	(,)	$y=3*(x+\frac{1}{\square})^2+\frac{\square}{\square}$
4	$y=$	(,)	$y=$

마 ESC ESC ESC (CAS Mode로 돌아온다.)

cursor를 ↑←로 움직여 A의 값을 바꾼 후



위의 단계를 진행, 왼쪽에 적어보자.

변화된 식을 Y1에 저장하여 이전의 식을 삭제.

2. 위의 관찰로부터 다음을 유추하여 보자.

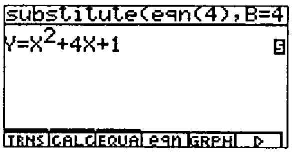
∴ **이차함수 $y=ax^2+x+1$의 꼭지점의 좌표는**

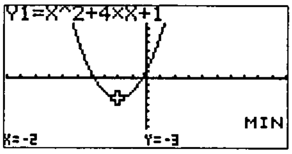
$(-\frac{1}{\square}, \frac{\square}{\square})$이고, $y=a(x+\frac{1}{\square})^2+\frac{\square}{\square}$인 꼴로 나타난다.

3. b의 값이 다음과 같을 때, $y=x^2+bx+1$의

꼭지점의 좌표를 구하고, 다음을 적어보자.

b	$y=x^2+bx+1$	꼭지점	$y=a(x-p)^2+q$
1	$y=$	(,)	$y=$
2	$y=x^2+2x+1$	(-1 , 0)	$y=1*(x+\frac{\square}{2})^2+\frac{\square}{4}$
3	$y=$	(,)	$y=$
4	$y=$	(,)	$y=$





∴ **이차함수 $y=x^2+bx+1$의 꼭지점의 좌표는**

$(-\frac{1}{\square}, \frac{\square}{4})$이고, $y=1*(x+\frac{\square}{2})^2+\frac{\square}{4}$인 꼴로 나타난다.