韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 351-379.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 351-379.

유리계수 다항방정식의 해법에 대한 고찰

김 경 희 (부산공업고등학교)
김 부 윤 (부 산 대 학 교)

교과서에 나오는 방정식의 해법이 어떤 과정을 거쳐 얻어진 것인지를 정확하게 이해시키기 위해서, 유리계수 다항방정식의 해법을 1차, 2차, 3차, 4차, 5차 방정식의 차례로 수학사적으로 고찰한다.
이를 통해서 방정식의 해법이 고정되어 있는 것이 아니라, 지금도 발전과정에 있다는 것을 보여줌으로써 수학에 대한 흥미를 가지게 하고 올바른 인식을 가지도록 한다.

Ⅰ. 서 론

사람에게는 누구나 모르는 것을 알고자 하는 욕구가 있다. 이런 욕구에서 출발한 수학의 대표적인 분야가 바로 방정식이다. 더군다나 요즘같이 과학기술이 날로 발전되는 시기에 거대한 전자두뇌에 의해 행해지는 수많은 계산, 통계학, 자연과학, 그리고 수리경제학 등에서는 방정식을 이용하여 다루어지는 문제가 수없이 많다.

특히 유리 계수 다항방정식의 근을 구하는 문제는 수학뿐만 아니라 여러 관련 분야에서 흔히 접하게 되는 중요한 문제로서 수학의 발전과 더불어 많은 수학자들에 의해 그 해법이 연구되어 훌륭한 결과들이 얻어졌으며 일부이긴 하지만 중등학교 교육과정에서도 다루어지고 있다. 하지만 대부분의 교사들은 이러한 방정식의 해법을 단지 그 결과 위주로 암기식으로 지도하는 경우가 많다.

현재 우리 나라 수학교육에서의 가장 큰 문제점이라면 학생들의 수학에 대한 부정적인 태도라고 할 수 있다. 즉, 학생들의 수학 학습에 대한 흥미의 결여로 인한 수학에 대한 부담감과 거부감이 학습 활동에의 참여 의욕 저하로 연결되고 있다는 점이다.

학습 활동에의 참여 의욕은 학습자의 지적 활동을 촉진시킬 수 있는 외적 사상, 즉 외부의 자극을 어떻게 배열·제시하느냐에 따라 좌우되게 된다. 특히 학습 활동의 시발점에서는 학습자의 주의를 끌고 집중하게 하는 일이 중요하다. 주의를 환기시키는 가장 좋은 방법은 학습자의 흥미에 호소하는 일이며, 흥미는 활동의 근원이 되므로 흥미가 없는 활동이나 작업은 학습자에 있어서 크게 의미가 없다. 그러므로 학습자가 학습 목적, 활동, 내용 등에 깊은 흥미를 느끼고 있을 때 비로소 학습은 가장 용이하며 효과가 있는 것이므로, 교사는 이와 같은 점을 충분히 감안하여 지도해야 한다(이희종, 1994).

따라서 방정식 또한 그 결과나 단순한 해법만을 암기하도록 지도한다면 이러한 부정적인 태도는

변화되기 어려울 것이며 수학의 진정한 목표를 달성하는 데에도 어려움이 따를 것이다.

한편, 수학사는 수학교육에서 담당할 수 있는 역할이 매우 다양하므로 이를 수업에 적절히 도입하여 활용하면 학생들은 자연스럽게 새로운 사실에 대해 주목하게 되고, 따라서 관심과 흥미를 갖고 수업에 임하여 수학을 탐구하게 되는 바람직한 태도가 형성될 것이라 보여지므로 학생들이 수학 수업에 흥미를 느끼도록 하는 효과적인 한 방법은 수학사를 수업시간에 적절하게 사용할 수 있도록 교사가 교재 개발을 하는 것이다.

특히 방정식의 해법은 실제 교과서에 실린 것보다 훨씬 다양하고, 또한 수학사적인 입장에서 볼 때 그 변화과정은 매우 흥미로우므로 방정식의 해법 지도에 있어 수학사적인 지도는 수학에 대한 학생들의 흥미와 관심을 자연스럽게 유발하고 수학교육을 인간화하는 한 방법이 되며, 수학교육의 진정한 목표를 달성하게 하는 중요한 수단이 될 수 있다고 하겠다.

이를 위해 본 논문에서는 방정식의 해법이 어떠한 과정을 거쳐서 얻어진 것인지를 수학사적인 입장에서 새롭게 이해시키기 위해서 유리계수 다항방정식의 해법을 1차, 2차, 3차, 4차, 5차의 순으로 고찰한다. 이를 통해서 방정식의 해법이 고정되어 있는 것이 아니라, 지금도 발전과정에 있다는 것을 보여줌으로써 수학에 대한 올바를 인식을 가지도록 하는데 그 목적이 있다.

본 논문에서 방정식의 해법은 유리계수 다항방정식으로 제한하였으며, 그 순서는 차수에 따라 일차 방정식, 이차 방정식, 삼차 방정식, 사차 방정식, 오차방정식 순으로 전개하였다. 하지만 사차 방정식과 오차 방정식은 중등학교 교육과정에서는 크게 언급되지 않으므로 본 논문에서는 간단하게 개요만 설명하였다. 그리고, 본 논문은 다음과 같이 구성하였다. 제Ⅱ장에서는 수학사적인 입장에서 본 방정식의 다양한 해법을 차수별·연대별로 제시하고 정리한다. 그리고 제Ⅲ장에서는 결론과 제언을 제시한다.

Ⅱ. 방정식의 해법

이 장에서는 수학사적인 흐름에 따른 방정식의 여러 가지 해법을 고찰하며, 일차방정식, 이차방정식, 삼차방정식, 사차방정식, 오차방정식 순으로 살펴본다.

1. 일차방정식

고대 이집트인과 바빌로니아인들은 B.C. 2000년 경 높은 문명 수준에 있었고 이미 이 두 문화인들은 일차방정식을 풀 수 있었다. 그 중 가장 평범한 방법은 요즘 사용되는 방법과 매우 흡사한 것이다. 이 방법은 개념상 어렵지는 않지만 나눗셈이 행해지는 계산과정이 요구된다.

린드 파피루스 - 아메스 파피루스(Ahmes Papyrus)라고도 불린다 - 는 고대 이집트 문제들의 목록이다. 파피루스는 B.C. 1650년경에 쓰여진 것 같다. 그 중 몇몇 문제들은 일차방정식의 해법을 요구한다. 예를 들어 문제 31번에서는 어떤 양에 그것의 2/3, 그것의 1/2, 그리고 그것의 1/7을 합하면

33이 될 때 그것의 양은 얼마인지를 묻고 있다. 이것을 현대 기호로 나타내면

$x + (2/3)x + (1/2)x + (1/7)x = 33$

이라 쓸 수 있다. 여기서 기록자는 33을 $1+2/3+1/2+1/7$ 로 나누는 계산 방법을 제시하고 있다.

한편, 파피루스에는 일차방정식을 푸는데 사용되는 매우 흥미 있는 방법이 소개되어 있다. 그것은 임시위치법(method of false position)이라 불리는 것이다.

<u>임시위치법은 다음과 같은 과정으로 이루어진다</u> :

1단계. 문제의 양을 특정한 값으로 가정한다.

2단계. 그 값을 넣은 식의 좌변을 계산한다.

3단계. 이 "잘못된 결과"와 우리가 바라는 결과를 비교한다.

4단계. 3의 과정을 이용하여 문제의 답을 얻을 수 있도록 우리가 골랐던 값을 맞추어 준다.

한 예로 파피루스의 24번 문제를 살펴보자.

[예제] 어떤 무더기의 양에 그것의 1/7을 더한 것이 19일 때 그 무더기의 양은 얼마인가?

[풀이] 이 문제를 현대 기호로 나타내면 $x + (1/7)x = 19$ 라 적을 수 있다. 기록자는 이 문제를 위에서 말한 임시위치법으로 풀이했다.

1단계 : 첫 번째 단계는 x값을 특정한 값으로 가정하는 것이다. 여기서 기록자는 7을 골랐다.(왜 7인가? 아마도 가장 계산하기 쉬운 값을 골랐던 것 같다.)

2단계 : 이제 7을 넣어 식의 좌변을 계산한다 : $7+(1/7)7=8$

3단계 : 8은 잘못된 결과이다. 8과 19를 비교해보면 19를 얻기 위해 8을 어떻게 해야 할지를 알 수 있다. 8에 19/8을 곱하면 19가 된다.

4단계 : 주어진 식의 해답은 $7(19/8) = 133/8 = 16.625$ 이다.

이 방법은 대수 기호가 발달해서 식을 계산하는 일이 간단해질 때까지 널리 이용되었다.

2. 이차방정식

1) 이집트인들의 해법

이집트인들은 앞에서 언급한 임시위치법으로 간단한 이차방정식 또한 풀 수 있었다. 파피루스에 기록된 다음 문제를 살펴보자.

[예제] 두 개의 정사각형의 변의 비가 $1 : \frac{3}{4}$ 이고 넓이의 합이 100이 되는 두 정사각형의 한 변의 길이를 구하라.

[풀이] 여기서 큰 정사각형의 한 변의 길이를 x라고 하면 이 문제는 $x^2+\left(\frac{3}{4}x\right)^2=100$ 이라

는 방정식으로 나타낼 수 있다. 이 문제를 임시위치법으로 풀이하면 다음과 같다.

'큰 정사각형의 한 변의 길이를 1이라고 하면, 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{3}{4}$이 된다. 그러면 두 정사각형의 넓이의 합은 $1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}$ 이다. 이것은 한 변이 $\frac{5}{4}$인 정사각형의 넓이를 나타낸다' 그런데 넓이가 100인 정사각형의 한 변은 10이다. 10과 $\frac{5}{4}$를 비교해 보면 $10\div\frac{5}{4}=8$ 이고, 꼭 8배가 되어 있다. 그러므로 처음에 가정한 정사각형의 한 변을 8배 하면 구하는 정사각형의 한 변의 길이가 구해진다. 즉 큰 정사각형의 한 변의 길이는 $1\times8=8$, 작은 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{3}{4}\times8=6$ 이다.

2) 바빌로니아인들의 해법

B.C. 2000~600년경 티그리스강과 유프라테스강 사이의 메소포타미아 계곡에 살고 있던 바빌로니아인들이 다룬 바빌로니아 수학에는 다음과 같은 것들이 포함되어 있다 :

① 60진법에 기초한 수 체계
② 원의 측정
③ 음력과 양력
④ 근호의 계산
⑤ 피타고라스의 정리(피타고라스 이전)
⑥ 일차방정식
⑦ 이차방정식
⑧ 제곱과 세제곱표

이집트인들이 파피루스에 기록한 반면, 바빌로니아인들은 점토판 위에다 기록을 남겼다. 그 흔적은 부드러운 점토에 새겨져 태양 아래에서 단단하게 구워졌다. (모두 수학적인 내용은 아니지만) 이 시기에 만들어진 50,000개 이상의 점토판이 아직도 남아있고 많은 양이 콜롬비아대학, 펜실베니아대학, 예일대학의 도서관에 소장되어 있다.

점토판에는 이차방정식이 많이 새겨져 있었고 그것은 쉽게 다루어질 수 있었다. 전형적인 문제는 $x+y=a$ 와 $xy=b$ 꼴을 푸는 것이었는데, 이것은 사각형의 넓이와 둘레의 관계를 다룬 것이다. 고대의 많은 사람들은 사각면에서의 넓이가 단지 그 둘레에 의해 결정된다고 믿었던 것 같다. 바빌로니아인들은 기호를 사용하지 않고, 미지수들을 "길이", "폭", "넓이", "부피"와 같은 말을 사용해서 나타내었다. 현대의 대입법을 이용하면 위의 계산은 $x(a-x)=b$ 즉, $ax-x^2=b$ 라는

이차방정식을 푸는 것으로 해결될 수 있음을 알 수 있다.

바빌로니아인들은 등식에 같은 것을 더하고, 분수를 없애고, 다항식을 인수분해함으로써 이런 이차방정식을 풀려고 했다. 가장 많이 썼던 방법은 현대의 이차방정식 공식과 흡사했다.

[예제] 변의 길이가 넓이보다 870이 작은 정사각형의 한 변의 길이를 구하여라.

[풀이] 여기서 길이는 x를, 그 넓이는 제곱인 x^2을 사용하는 요즘의 표기로 나타내면 $x^2 - x = 870$ 이라 할 수 있다.

이 문제의 풀이는 다음과 같이 주어졌다:

1의 절반을 찾으면 1/2이다. 그 1/2에 1/2을 곱하면 1/4이 될 것이다. 여기에 870을 더하면 870.25가 된다. 이것은 29.5의 제곱이다. 이제 1/2을 29.5에 더하면 그 결과는 30이 되고 이것이 바로 구하고자 한 정사각형의 변의 길이가 된다.

이런 단계를 현대의 기호로 나타내면 놀랍게도 $\sqrt{(1/2)^2+870} + 1/2$ 이라는 이차방정식의 공식과 흡사하게 된다.

실제로 기록자의 방식에 따르면 $x^2 + px = q$ 의 해는 다음과 같이 풀이되었다.

p의 절반을 찾으면 $p/2$, $p/2$에 $p/2$를 곱하고 이것에 q를 더한다. 이것은 $\sqrt{(p/2)^2+q}$의 제곱이 된다. 여기에다 $p/2$를 빼주면 우리가 원하는 답을 얻게 된다. 즉 $x^2+px=q$ 의 해는

$$x=\sqrt{(p/2)^2+q} - p/2 = (-p+\sqrt{(p^2+4q)})/2$$

라는 공식으로 나타난다. 이것은 요즘의 공식과 같은 형태인데 단 여기서는 양의 근만 주어지고 음수인 근은 무시되었음을 알 수 있다(John Koker).

당시의 이차방정식은 p와 q가 양수일 때 다음 세 가지 형태 중 하나로 정리될 수 있었다 :

1. $x^2 + px = q$
2. $x^2 + q = px$
3. $x^2 = px + q$

예를 들어 기록자가 "Multiply the areas, sides and 6.25 by 11"로 썼던 문제, 즉, 현대의 기호로 $11x^2 + 7x = 6.25$ 라는 문제는 양변에 11을 곱함으로써 $(11x)^2 + 7(11x) = 68.75$ 로 나타낼 수 있고, 이것은 $y = 11x$ 라 하면 $y^2 + 7y = 68.75$ 라는 이차방정식을 푸는 것으로 바꿀 수 있는 것이다.

여기서 1번과 3번 형태는 앞에서와 같이 풀 수 있고, 2번째 식은 자주 나오는 형태로

$x+y=a$ 와 $xy=b$ 의 꼴에서 나온 것임을 알 수 있겠다. 이러한 꼴의 문제는 어떻게 풀이되었는지 다음의 예로 살펴본다.

[예제] 오래된 바빌로니아의 문제로 $x+y=6.5$ 와 $xy=7.5$ 를 풀어보자.

[풀이] 이 문제의 풀이는 다음과 같이 설명되어 있다.

$x+y=6.5$ 이므로 $\frac{x+y}{2}=3.25$ 이다. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=10.5625$ 임을 계산한다. 또한 $xy=7.5$ 이므로 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=3.0625$ 임을 계산한다. $\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=1.75$ 임을 계산한다. 여기서 $\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy$ 라는 항등식으로부터 $\frac{x-y}{2}=1.75$ 임을 알 수 있다. 그러면 $\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x-y}{2}\right)=3.25+1.75=5$ 가 되고, $\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x-y}{2}\right)=3.25-1.75=1.5$ 가 된다. 따라서 이차방정식 $x^2+7.5=6.5x$ 의 해는 $x=5$ 그리고 $y=1.5$ 로 구해지는 것이다. 왜 이렇게 계산하였는가?

우리는 $x+y=6.5$ 와 $xy=7.5$ 를 $x^2+7.5=6.5x$ 으로 바꾸어 풀이하려 했다. 하지만 기록자는 $x+y=6.5$ 와 $xy=7.5$ 라는 식을 $\frac{x+y}{2}=3.25$ 와 $\frac{x-y}{2}=1.75$ 로 바꾸려 하였다. 이 방법이 풀기에 "더 쉬운"것이었다.

요약하면 바빌로니아인들의 각각의 문제에서는 식이 주어지는 것이 아니라 지정된 숫자와, 오랫동안 기록되어 온 해법을 발견하도록 하는 규칙이 주어졌다. 몇몇 문제는 "실생활"에서의 문제이다. 하지만 그 실생활 문제의 대부분도 현대의 대수적 문자로 쓰여진 문제만큼이나 인위적인 것이다. 어쩌면 그 때의 기록자도 오랫동안 주어진 상황에서의 모든 문제가 같은 답을 가져왔기에 그 문제들이 인위적인 것임을 알았을지도 모른다. 점토판은 문제의 답보다는 해결 방법을 배우는데 이용되었다.

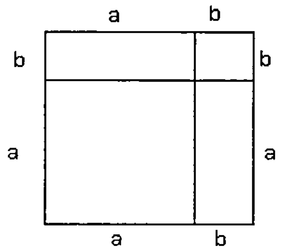
많은 사람들은 진보된 대수적 기술이 미래 문화를 이끌어 갈 정신을 단련시켜 왔다고 믿고 있었다. 이 시기의 실생활에서 이차방정식을 필요로 하는 일은 거의 없었으므로 이것을 풀 줄 안다는 것이 정말로 필요한 것은 아니었지만 매일의 문제 풀이에 적용될 수 있는 해법의 개발은 이러한 이유로 중요했던 것이다. 오늘날의 학생들도 종종 수학이 정신을 단련시킨다고 말하는 것을 보면 4000년 전과 다를 바 없는 사실인 것 같다(John Koker).

3) 그리스인들의 해법

그로부터 몇 백년 뒤에 이차방정식의 해법은 그리스인들의 연구에서 나타났다. 가끔 그리스인들이

대수학을 하지 않았다고 믿기도 하지만 이것은 사실이 아니다. 유클리드 원론 제II권이 바로 우리가 기하학적 대수학이라 부르는 내용이다. 유클리드는 제시된 조건을 만족시키는 대상을 작도하는 방법을 설명했는데, 여기서 크기는 (유클리드에게 크기란 바로 선분의 길이였다) 숫자로 이해될 수 있는 문자로써 표현되었다. 길이를 2번 곱한 것은 넓이로 주어진다. 따라서 유클리드의 대수학은 선과 직사각형과 정사각형 사이의 관계로 구성된다고 하겠다. 유클리드의 원론에 나오는 몇 가지 정리를 예로 들어본다.

[Proposition II-4] 한 선분이 두 부분으로 분할될 때, 주어진 선분을 한 변으로 하는 정사각형은 각 부분을 한 변으로 하는 두 정사각형과 각 부분을 두 변으로 하는 직사각형의 두 배의 합과 같다.



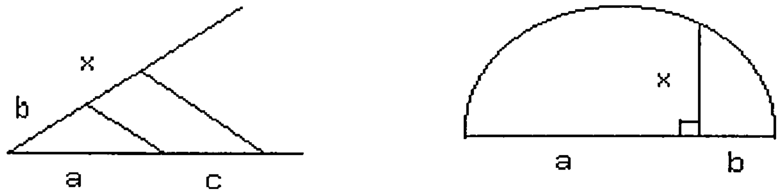
<그림 1>

이 명제는 오늘날의 수업에서의 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 라는 항등식을 기하학적으로 입증한 것인데, 그 방법은 <그림 1>에서 볼 수 있는 것처럼 한 변이 $a+b$ 인 정사각형을 면적이 각각 a^2, b^2 인 두 정사각형과 면적이 ab 인 두 직사각형으로 분할하는 것이다. 이것의 시각적 형태는 당시 그리스 학생들에게는 현대의 증명에서 보이는 것보다 훨씬 더 시선을 끌 수 있었던 것 같다(John Koker).

그리스인들은 어떤 간단한 방정식을 푸는데 기하학적 대수학에서 주요한 두 가지 방법을 이용했다. 그 하나는 비례에 의한 방법이고, 또 다른 하나는 넓이를 응용하는 방법이었다.

비례에 의한 방법은 오늘날 고등학교 교과서에서 하는 것과 똑같은 방법인데, <그림 2> 에서와 같이 a, b, c 가 주어진 선분일 때, $a : b = c : x$ 또는 $a : x = x : b$ 로 주어진 선분 x를 만들 수 있다. 즉 비례에 의한 방법은 다음 방정식의 기하학적 해를 제공해 준다 :

$$ax = bc, \;\; x^2 = ab$$

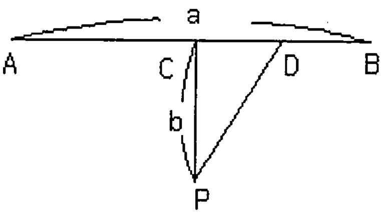


<그림 2>

넓이를 응용하는 방법은 유클리드가 이차방정식의 해를 작도하는데 특히 유용하게 이용되었다.

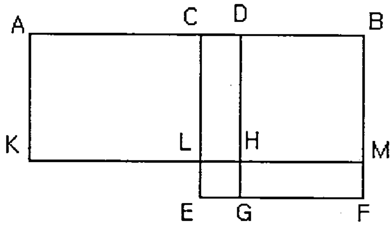
예를 들어 $ax - x^2 = b^2$ (단 $a > 2b$)라는 방정식을 풀기 위해 길이가 a, b 인 주어진 선분에 대해 $ax - x^2 = b^2$ 을 만족시키는 선분 x를 작도해 본다. 여기 그 방법이 있다 :

1. $AB = a$ 가 되도록 선분을 그린다.
2. 이등분되는 점을 C라 한다.
3. $CP = b$ 가 되도록 수직으로 선을 긋는다.
4. P를 중심으로 하고 $a/2$ 를 반지름으로 하는 원을 작도한다.
5. 원이 AB 와 만나는 점을 D라 한다.



<그림 3>

여기서 남은 과제는 DB의 길이가 바로 우리가 바라는 x값이라는 것을 보이는 것이다. 이 증명을 완성시키기 위해 유클리드는 아래의 <그림 4>를 이용해서 보여 주었다. 어떤 점에서 이 그림은 그리스에서 대수학을 배우는 학생들에게는 이차방정식의 공식과도 같은 것이라 하겠다.



<그림 4>

이 그림으로 증명하는 데에는 Proposition Ⅱ-5[1]가 이용된다.

따라서 Proposition Ⅱ-5에 의해서 $AKHD + LEGH = CEFB$ 가 만족된다. 즉 $(a-x)x + CD^2 = (a/2)^2$ 이 성립한다. 그런데 앞의 작도에 의해 $CD^2 = (a/2)^2 - b^2$ 이

1) [Proposition Ⅱ-5] 한 선분이 동등하게 분할되고 또 동등하지 않게 분할될 때 동등하지 않은 두 부분을 두 변으로 하는 직사각형과 두 분할점 사이의 선분을 한 변으로 하는 정사각형의 합은 처음 선분의 반을 변으로 하는 정사각형과 같다. 즉, <그림 4>에서 AB 가 주어진 선분이고 AB 가 C에서 동등하게 분할되고 D에서 동등하지 않게 분할된다면 이 명제는 $(AD)(DB) + (CD)^2 = (CB)^2$ 임을 말해 준다.

[증명] <그림 4>에서 $CEFB$ 와 $DHMB$는 각각 한 변이 CB, DB 인 정사각형이므로,

$(AD)(DB) + (CD)^2 = AKHD + LEGH \quad = AKLC + CLHD + LEGH$

$= CLMB + CLHD + LEGH \quad = CLMB + HGFM + LEGH \quad = (CB)^2$

이 성립한다(참고로 $AB = 2a$, $CD = b$ 라 두면 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 라는 항등식을 얻을 수도 있다).

성립하므로 결국 $(a-x)x=b^2$ 이 되는 것이다.

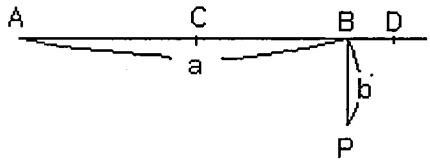
한편, <그림 3>, <그림 4>를 통해서

$x=CB-CD \quad =a/2- \quad \sqrt{(a/2)^2-b^2}$ 임을 구할 수도 있다.

이번에는 $ax+x^2=b^2$ 이라는 방정식의 해법을 살펴보자.

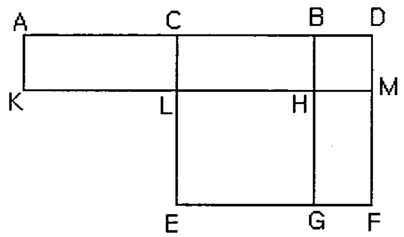
주어진 값 a에 대해 $AB=a$ 라 하자. AB를 이등분하는 점을 C라 하고 B에서 AB와 수직이 되는 $BP=b$ 인 점을 P라 한다.

C를 중심으로 하고 CP의 길이를 반지름으로 하는 원을 그려 AB의 연장선과 만나는 점을 D라 한다. 여기서 $BD=x$ 임을 보일 수 있다.



<그림 5>

여기서 <그림 6>을 사용하면 Proposition Ⅱ-6[2]과 관련이 있음을 알 수 있다.



<그림 6>

따라서 Proposition Ⅱ-6에 의해 $AKMD+LEGH=CEFD$ 가 된다.

즉 $(a+x)x+(a/2)^2=CD^2$ 이 된다. 그런데, 작도에 의해 $CD^2=(a/2)^2+b^2$ 이므로

2) [Proposition Ⅱ-6] 한 선분이 이등분되고 또 어떤 점까지 연장될 때 그렇게 연장된 전 선분과 연장된 부분을 두 변으로 하는 직사각형과 등분된 한 선분을 한 변으로 하는 정사각형의 합은 등분된 한 선분과 연장된 부분으로 만들어진 선분을 한 변으로 하는 정사각형과 같다. 즉 <그림 6>에서 이 명제는 $(AD)(DB)+(CB)^2=(CD)^2$ 임을 말하고 있다.

이것을 정리하면 $ax + x^2 = b^2$ 임을 알 수 있다. <그림 5>, <그림 6>을 이용하면

$x = CD - CB = \sqrt{(a/2)^2 + b^2} - (a/2)$ 라는 사실도 구할 수 있다.

또한 Proposition VI-28과 Proposition VI-29에서는 $x^2 + c = bx$ 와 $x^2 + bx = c$ 꼴의 해법을 보여주기 위해 평행사변형과 닮은 도형을 이용하기도 했다.

[Proposition VI-28] "주어진 직선으로 둘러싸인 도형 F와 넓이가 같은 평행사변형 $AQRS$를 그와 닮은 평행사변형 $QBCR$만큼 모자라도록 선분 AB에 적용하는 문제. 이 때 F의 넓이는 AB의 반 위에 그려지면서 결손 $QBCR$과 닮은 평행사변형의 넓이를 초과하지 않는다"

이제 주어진 평행사변형이 정사각형인 특별한 경우를 살펴보자. AB의 길이를 a로 표시하고 적용된 평행사변형(지금은 직사각형)의 밑변 AQ를 x라 하고 적용된 직사각형의 넓이와 동일한 정사각형 F의 변을 b로 나타내면

$x(a-x) = b^2$ 즉, $x^2 - ax + b^2 = 0$

[Proposition VI-29] "주어진 직선으로 둘러싸인 도형 F와 면적이 같은 평행사변형 $AQRS$를 그와 닮은 평행사변형 $QBCR$만큼 초과하도록 선분 AB에 적용하는 문제"

주어진 평행사변형이 정사각형인 특별한 경우를 살펴보자. AB의 길이를 a로 표시하고 적용된 평행사변형(지금은 직사각형)의 밑변 AQ를 x라 하고 적용된 직사각형의 면적과 동일한 정사각형 F의 변을 b로 나타내면

$x(x-a) = b^2$, 즉 $x^2 - ax - b^2 = 0$ (Howard Eves, 1990)

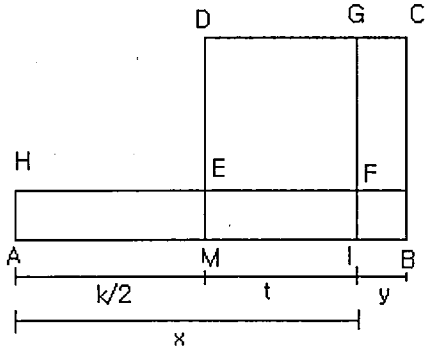
Proposition VI-28 에 해당하는 다음 문제를 살펴보자.

[예제] 길이가 k인 선분 AB가 주어졌을 때, 넓이가 P인 직사각형을 선분 위에 작도하라.
선분 AB에서 직사각형의 두 변의 길이를 각각 x, y 로 놓는다면, 이문제는
$x + y = k$ 와 $xy = P$ 인 연립방정식의 형태가 된다.
이 문제의 그리스 시대의 풀이는 다음과 같다.

[풀이] 1. 선분 AB를 M에서 이등분한다.
2. 정사각형 $MBCD$를 그린다.
3. 정사각형 $MBCD$에서 주어진 면적 P를 뺀만큼과 동일한 면적의 정사각형 $DEFG$

를 작도한다.

4. 그러면 사각형 $AIFH$가 주어진 조건을 만족시키는 직사각형이다



<그림 7>

<그림 7>에 따르면 자연히

$x=\frac{k}{2}+t,\ y=\frac{k}{2}-t$ (단, $t=\frac{x-y}{2}$)가 되므로 이는 결국 앞에서 말한 바빌로니아의 풀이와 근본적으로 같다는 것을 알 수 있다.

바빌로니아의 대표적인 문제들이 이렇듯 그리스에서는 기하학적 방식으로 재현된 것이다. 그렇다면 그리스인들이 대수를 이렇듯 다루기 어려운 방식으로 풀어나간 까닭은 무엇일까? 해답은 매우 간단하다. 그들은 유리수와 무리수에 대한 개념상의 난점을 지니고 있었기 때문이다. 피타고라스 학파의 주장에 의하면 모든 수는 정수의 비로 표현될 수 있었다. 그러나 그들은 바로 자신들이 발견한 '피타고라스의 정리'로 '정수의 비로는 도저히 표현될 수 없는' 수를 만나게 된 것이다. 즉, 단위 정사각형(한 변의 길이가 1인 정사각형)의 대각선의 길이는

$$1^2+1^2=x^2$$

를 만족하는 어떤 수 x인데, 이 수는 단위 변의 길이로는 설명되지 않았다. 그래서 그들은 무리수를 정수나 정수의 비로 나타낼 필요가 없는, 단위 사각형의 대각선인 선분으로 나타냄으로써 무리수를 설명하였던 것이다.

지식에 대한 태도 또한 또 다른 원인이 된다. 이집트와 바빌로니아의 수학은 실제 생활에 응용하는 데 그 목적이 있었으나 그리스의 수학은 사고의 도구이며 동시에 그것의 산물이었다. 그리스인들은 감각을 초월하여 오로지 이성에 호소할 때 비로소 이데아의 세계를 다룰 수 있고, 그러한 이성은 수학적인 방법으로 다듬어진다고 하였다. 그리하여 그리스의 미술과 건축, 음악, 그리고 심지어 우주

관까지도 모두 기하의 조화와 균형을 바탕으로 하였고 대수 역시 기하에 바탕을 둔 도형으로 설명되었다(이애경, 1995).

그러나 대수를 증명하는 데 있어 이러한 기하학적인 방법은 분명 새롭고 시각적인 도구임은 분명했던 것 같다.

한편, B.C. 100년경, 알렉산드리아에서 출생한 헤론(Heron)은 산술에 의한 이차방정식의 해법을 발명하기도 했다. 그의 풀이법을 살펴본다.

[예제] 하나의 정사각형이 있다. 그 넓이와 둘레의 합은 896이다. 정사각형의 한 변은 얼마인가?

[풀이] 정사각형의 한 변을 x라고 하면

$$x^2+4x=896$$

이 식의 양변에 4를 더하면

$$x^2+4x+4=896+4$$

$$(x+2)^2=900$$

따라서

$$x+2=30$$

따라서 $x=28$ 이다. 그러므로 정사각형의 한 변의 길이는 28이다. 이 경우에는 원래 $(x+2)^2=900$ 이므로 $x+2=30$ 또는 $x+2=-30$ 이지만 x가 양수이므로 $x+2$ 도 양수가 되므로 이 중 $x+2=30$ 만 고려되었다.

디오판토스(Diophantos, 300년경)도 이차방정식을 취급했다. 특히 그는 대수가 그리 크게 발달하지 못했던 그리스에서 미지수를 문자로 나타내어서 방정식을 연구한 유일한 사람이었다. 그의 해법의 예를 들어본다.

[예제] 2개의 수가 있다. 그 수의 합은 20, 그 넓이는 96이라고 한다. 이 두 수는 각각 얼마인가?

[풀이] 이런 문제에 대해 그는 2개의 수를 각각 $10+x$, $10-x$ 라고 두었다(이와 같은 미지수 선택은 매우 특이한 것이다). 그렇게 하면

$$(10+x)(10-x)=96$$

$$100-x^2=96$$

즉, $x^2=4$ 이고, 따라서 $x=2$ 이다. 따라서 2개의 수는 $10+2=12$ 와 $10-2=8$ 이다. 이 경우 디오판토스는 $x^2=4$ 에 대해 $x=2$ 또는 $x=-2$ 라고는 하지 않았다. 설사 $x=-2$ 를 사용하더라도 2개의 수는 $10-2=8$ 와 $10+2=12$ 가 되어 같은 꼴을 얻을 수 있기 때문이다.

디오판토스의 생애에 관해 알 수 있는 그의 묘비명에 새겨진 글은 특히 유명하다. 500년 경 Metrodoorus의 「그리스 명시선집(Greek Anthology)」에 나오는 묘비명에는 다음과 같은 문제가 쓰여져 있다.

[문제] 디오판토스는 그의 생애의 6분의 1을 소년으로 보냈고 12분의 1후에 수염이 자랐으며, 그 후 7분의 1이 지나서 결혼했다. 결혼한지 5년 후에 아들을 낳았고, 그 아들은 아버지 나이의 반을 살았으며, 아들이 죽은지 4년 후에 생애를 마쳤다. 그가 죽을 때의 나이는 얼마인가?

[풀이] 이 묘비로부터 디오판토스가 죽을 때의 나이를 x라고 하면 다음 방정식을 만들 수 있다.

$$\frac{1}{6}x+\frac{1}{12}x+\frac{1}{7}x+5+\frac{1}{2}x+x+4=x$$

이것을 풀면 $x=84$ 이다(片野善一郎, 1978).

4) 인도인들의 해법

앞에서의 어느 해법에서도 음수의 개념은 아직 없었다. 따라서 이차방정식에 2개의 제곱근이 있다는 것은 인정되지 않았다.

양수, 0, 음수의 개념을 확립하고, 그렇게 해서 이차방정식에는 2개의 제곱근이 있을 수 있다는 것을 처음으로 인정한 것은 인도 사람들이다. 아리아바아타(Aryabhata, 476-?), 부라마굽타(Brahma-gupta, 598-?), 바스카라(Bhaskara, 1114-?)는 이차방정식을 가장 일반적인 형태로 취급했다.

말하자면 아리아바아타는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$$

을 다음과 같이 풀고 있다. 먼저 양변을 a로 나누어

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}$$

양변에 $\frac{b^2}{4a^2}$ 을 더해서

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{또는} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

따라서

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{또는} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

이것은 현재의 이차방정식의 풀이방법과 똑같다. 그러나 아리아바아타와 부라마굽타는 때로는 양수의 제곱근, 때로는 음수의 제곱근을 사용하는 방법을 채택하고 있었다.

이것에 비해 이차방정식을 위의 방법으로 풀어 이차방정식에는 2개의 제곱근이 있을 수 있다는 것을 확실히 인정한 것은 바스카라이다. 그는 다음과 같이 말하고 있다.

양수의 제곱도, 음수의 제곱도 양수이다. 따라서 양수의 제곱근은 2개이다. 하나는 양수, 또 하나는 음수이다. 그러나 음수의 제곱근은 존재하지 않는다. 왜냐하면 음수는 절대로 어느 수의 제곱이 될 수 없기 때문이다(矢野健太郎, 1989).

5) 아랍인들의 해법

7세기경에 아라비아에서는 회교가 일어나 맹렬하게 세력을 확장해 아라비아는 강력한 종교국이 되었다. 그 종교의 힘과 무력으로 페르시아를 합병하고, 더 나아가 지중해 연안, 이집트, 스페인까지 정복했다. 대대로 교주는 모두 학문의 장려와 보호에 힘썼다. 그래서 아라비아는 종교국으로서 뿐만이 아니고 문화국가로서도 번영했다. 유클레이데스, 아르키메데스, 디오판토스, 프톨레마이오스 등의 저작이 차례차례 아라비아어로 번역되었다. 이렇게 해서 그리스 수학은 아라비아로 전해지게 되었다. 또, 아라비아의 사람들은 상인으로서 방방곡곡으로 떠돌아 다녔으므로 인도의 수학도 아라비아에 전해지게 되었다. 인도의 기수법은 먼저 아라비아에 전해짐과 동시에 유럽에도 전해졌다. 따라서 인도에서 발명된 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0이라고 하는 숫자는 유럽에서는 아라비아 숫자로 불려지고 있다.

이상과 같은 이유로 아라비아 수학에는 특별한 독창성은 인정되지 않으나, 그리스의 수학과 인도의 수학의 결합에 있어서 주목할 만한 것이 적지 않음을 말할 수 있다(矢野健太郎, 1989).

압바스 왕조 시대의 아라비아 수학자인 알-화리즈미(Al-Khowa- rizmi)는 유럽 수학에 중요한 영향을 끼친 「알제브르 왈르무카바라(Hisab al-jabr w'al-muqabala)(자불과 무카바라의 산법)라는 대수학책 - "The Science of Reunion and Reduction"이라 번역되었다 - 을 썼다. 여기서 al-jabr의 al은 정관사이고, 영어의 the에 해당한다. 'jabr'이란 것은 '지우고, 쓰고' 한다는 뜻이다. jabr의 산법이라는 것은 보충적인 수를 사용해서 항을 보충한다는 계산으로서, $5x-2 = -2x+5$ 에서 2와 $2x$를 양변에 더해서 $5x+2x=2+5$ 로 만든다는 것이다. 결과만 말한다면, 현재 우리가 하고 있는 이항(移項)이라는 뜻이다. muqabala는 $5x+2x=2+5$ 의 동류항을 정돈해서 $7x=7$ 로 만드는 산법을 뜻한다(片野善一郎, 1978).

가령 $6x^2-4x-1=5x^2+1$ 을 예로 들면 al-jabr에 의해

$$6x^2 = 5x^2 + 4x + 1 + 1$$

으로 되고, al-muqabala에 의해

$$x^2 = 4x + 2$$

로 정리되는 것이다.

이와 같이 방정식의 해라는 것은 al-jabr와 al-muqabala를 써서 미지수 x의 값을 구하는 것이다. 현재 대수학을 의미하는 algebra라는 단어는 이 al-jabr로부터 유래되었다고 전해지고, 또 현재 계산법을 의미하는 algorithm이라는 단어는 Al-Khowarizmi의 이름으로부터 나온 것이라 전해지고 있다.

알콰리즈미는 방정식을 다음 6가지로 분류하였다. 즉

1. 제곱과 근 여러 개가 같다 : $x^2 = ax$
2. 근의 제곱이 어떤 수와 같다 : $x^2 = b$
3. 근 여러 개가 어떤 수와 같다 : $ax = b$
4. 제곱과 근들의 합이 어떤 수와 같다 : $x^2 + ax = b$
5. 근의 제곱과 수의 합이 여러 근들과 같다 : $x^2 + b = ax$
6. 근들과 수의 합이 제곱과 같다 : $x^2 = ax + b$

그의 책은 이 6가지 방정식을 푸는 설명서 형태로 시작되어 있다. 여기에는 모두가 기본적인 말로 표현되어 있으며 기호는 사용되지 않았다. 수조차도 말로 쓰여져 있을 정도이다. 그의 풀이 방법은 바빌로니아인의 방법과 그리 크게 다르지는 않았다(John Koker).

먼저 제 I 장에서는 위의 1번 경우를 설명하였다. 즉 현대 기호로 나타내면

$$x^2 = 5x, x^2/3 = 4x, 5x^2 = 10x$$

등의 문제와 그 해답으로 각각

$$x=5, \quad x=12, \quad x=2$$

를 제시하였다(단, 근 $x=0$ 은 고려되지 않았다).

제II장, 제III장, 제IV장, 제V장, 제VI장에서도 각각 위의 2번, 3번, 4번, 5번, 6번 경우에 대해 예를 들어가며 설명하였다. 제IV장에는 $x^2 + 10x = 39$, $2x^2 + 10x = 48$, 그리고 $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$ 의 세 가지 문제에 대한 설명이 포함되어 있는데, 각 근은 단지 양수만 주어지고 있다. 제V장에는 오직 한 가지 예 - $x^2 + 21 = 10x$ - 가 있고, 대신 $x = 5 \mp \sqrt{25-21}$ 이라는 규칙에 의해 근은 3과 7로 주어져 있다. 제VI장에서 저자는 다시금 $3x + 4 = x^2$ 이라는 한 가지 예만 제시했는데, 이는 x^2의 계수가 1이 아닌 경우에는(제IV장에서처럼) 식을 그 계수로 나누어주면 되기 때문이라 설명하고 있다.

이 6가지 형태의 방정식이 바로 양의 계수를 가진 일차와 이차방정식의 모든 가능한 경우라 할 수 있다(Carl, 1968).

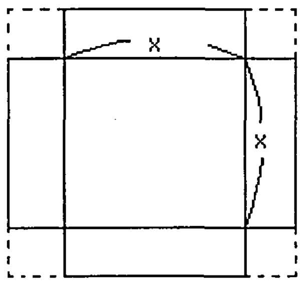
특별한 여러 예들 뒤에 그는 다음과 같이 진술했다.

"우리는 이 6가지 유형의 방정식에서 수에 관한 한 충분히 언급했다. 그러나 이제는 우리가 수로써 설명했던 똑같은 문제의 진위를 기하학적으로 설명할 필요가 있다."

그는 방정식을 풀기 위해 기하학적인 방법을 제시했다.

그의 방법을 설명하기 위해 $x^2+10x=39$ 라는 방정식을 예로 들면 그 풀이 방법은 다음과 같다.

1. x^2을 만들기 위해 한 변의 길이가 x인 정사각형을 그린다.
2. x^2에 $10x$을 더하기 위해 $10x$를 4로 나눈 값인 $(10/4)x$ 를 넓이로 갖는 사각형을 정사각형의 각 변에 붙여준다.
3. $x+10/2$ 을 한 변으로 하는 정사각형을 완성시키기 위해 넓이가 $(10/4)^2$ 이 되는 4개의 작은 정사각형을 구석에 덧붙인다.



<그림 8>

정사각형을 "완성시키기 위해", 우리는 $4(10/4)^2$ 을 더한 것이다. 따라서

$$(x+10/2)^2=(x^2+10x)+4(10/4)^2 \quad =39+(10/2)^2 \quad =39+25=64$$

$$x+10/2=8$$

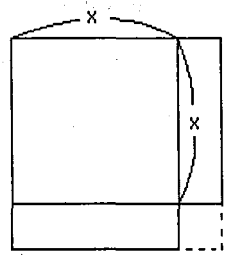
따라서 $x=3$ 이다. 이를 일반화하면 $x^2+px=q$ 를 풀기 위해서는 넓이가 각각 $(p/4)^2$ 인 4개의 정사각형을 더해주면 풀어질 수 있다는 것이다. 즉,

$$(x+p/2)^2=(x^2+px)+4(p/4)^2=q+(p/2)^2$$

따라서 $x=\sqrt{(p/2)^2+q}-p/2$ 이다(김용운·김용국, 1996).

알화리즈미는 $x^2+10x=39$ 라는 방정식에 대해 또 다른 해법을 제시했다 :

역시 넓이가 x^2인 정사각형에서 시작하는데, 이번에는 넓이가 $(10/2)x$ 인 직사각형 2개를 더한다. 정사각형을 "완성시키기" 위해 넓이가 $(10/2)^2$ 인 정사각형을 구석에 덧붙인다.



<그림 9>

따라서

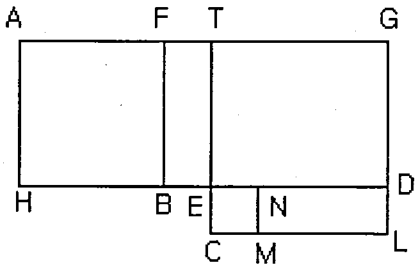
$$(x + 10/2)^2 = x^2 + 2(10/2)x + (10/2)^2$$
$$= (x^2 + 10x) + 25$$
$$= 39 + 25 = 64$$

이를 일반화시키면 $x^2 + px = q$ 에서

$$(x + p/2)^2 = x^2 + px + (p/2)^2 = q + (p/2)^2$$

이 되므로 $x = \sqrt{(p/2)^2 + q} - p/2$ 라 정리할 수 있다.

제V장과 제VI장에서도 기하적인 증명이 나타나 있다. $x^2 + 21 = 10x$ 라는 방정식을 풀기 위해, 저자는 넓이가 x^2이 되는 정사각형 $AHBF$를 그리고, 넓이가 21이 되는 직사각형 $BDGF$를 그린다. 그러면 이 두 사각형을 포함한 큰 직사각형은 넓이가 $10x$가 될 것이고, 선분 AG나 선분 HD는 분명 길이가 10이 될 것이다. 선분 HD를 이등분한 점을 E라 하고, 선분 HD에 수직이 되게 선분 ET를 그려보자. 또 선분 TE를 $TC = TG$ 가 되도록 점 C까지 연장한다. 사각형 $TCLG$ 와 사각형 $CMNE$이 정사각형이 되도록 완성시키면, 사각형 $FBET$의 넓이는 사각형 $NMLD$와 같아질 것이다. 그런데, 정사각형 $TCLG$ 의 넓이는 25이고, 도형 $TENMLG$는 넓이가 21이 된다(이 도형은 사각형 $FBDG$와 넓이가 같으므로). 따라서 정사각형 $ECMN$의 넓이는 4가 되고 그 변 EC는 2가 될 것이다. 또한 $EC = BE$ 이므로 선분 HE의 길이는 5가 될 것이다. 여기서 우리는 $x = HB = 5 - 2$, 즉 3이 됨을 알 수 있다(Carl, 1968).



<그림 10>

아랍인들은 이차방정식을 주변의 세상 - 물리학과 천문학 뿐 아니라 유전질을 지배하는 복잡한 자연법칙 - 을 연구하는데 이용하였다.

6) 비에트(Viete, 1540-1603)의 해법

프랑스의 수학자 비에트는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0 \quad (a \neq 0)$ 에서 $x = y - \dfrac{b}{2a} \quad \cdots①$ 로 치환하였다. 그러면 위의 식은

$$a\left(y-\frac{b}{2a}\right)^2+b\left(y-\frac{b}{2a}\right)+c=0$$

이 되고 이를 정리하면

$$y^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0 \qquad 즉,\ y^2=\frac{b^2-4ac}{4a}$$

따라서 $y=\pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \cdots②$ 가 된다. ②를 ①에 대입하면

$$x=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}-\frac{b}{2a} \qquad =\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이다. 그의 방법은 일반적인 삼, 사차방정식의 해법에서 이용되는 것이므로 이차방정식의 근을 구하는 과정을 통하여 삼, 사차방정식의 해법에 대한 확장성을 시사해 준다(이희종, 1994).

비에트는 또한 방정식의 미지수 등을 일반적인 문자를 사용해서 나타내었다. 비에트는 모음(母音)으로 미지수를 나타내고, 자음(子音)문자로는 기지수(旣知數)를 나타내었다. 예컨데, 미지수를 A, E, I, P 등으로 나타내고, 기지수를 B, Z, D, G 등으로 나타내었다(Z는 희랍의 알파벳으로는 B 다음에 온다).

하지만 비에트는 옛날부터 내려오는 차원이란 생각에 집착하고 있었고, 이 생각에서 벗어날 수 없었다. 즉, 그는 한 개의 숫자는 길이와 같은 1차원(次元)의 양을 나타내고, 두 개의 수의 곱은 면적(넓이)과 같은 2차원의 양을 나타낸다고 생각하여 서로 다른 차원의 양끼리는 계산할 수 없다고 생각하여 복잡한 기호를 덧붙여 사용했던 것이다(片野善一郞, 1978).

참고로 이와 같은 차원의 개념을 타파하고 여러 가지 양을 눈으로 볼 수 있도록 선분으로 나타내는 방법을 연구한 사람은 프랑스 출신의 데카르트(Descartes 1596~1650)였다. 그는 미지수를 처음으로 오늘날과 같이 x로 나타내었는데, 이는 당시 프랑스어에 x자가 들어가는 단어가 많아 인쇄소에 'x' 활자가 여분으로 많았기 때문이라고 한다.

3. 삼차방정식

학생들은 삼차 방정식을 푸는 것이 이차방정식을 푸는 것보다 훨씬 더 어렵다고 생각한다. 삼차방정식과 사차방정식을 푸는 대수적 해법도 이차방정식에서와 비슷하지만 이차방정식의 공식보다는 훨씬 복잡하다. 이차방정식의 공식이 4000년 이상이나 된 것에 반해, 삼, 사차 방정식의 대수적 해법은

16세기가 되어서야 비로소 카르다노, 타르탈리아, 페로, 페라리, 비에트 등에 의해 발견되었다.

1) 알-하이얌의 해법

페르시아의 수학자인 알-하이얌(1048-1131) - 서부인들에게는 오마르 하이얌으로 알려져 있다 - 은 삼차방정식에 대한 대수적 해법이 있기 500년 전에 기하적 해법을 발견했다. 그의 해법은 그리스인들의 해법과 비슷하지만, 하이얌은 작도에서 원추 곡선을 이용하였다. 3차방정식의 해를 구하는데 원추곡선을 이용하는 방법은 일찍이 아르키메데스 등이 이용하였다(John Koker). 그의 원추곡선에 대한 지식은 유클리드의 『원론』, 아폴로니우스의 『원추곡선론』, 아르키메데스의 『구와 원기둥에 관하여』 등 그리스 수학의 성과를 주로 인용한 것이다.

그는 음수를 사용하지 않았으므로 14개의 서로 다른 삼차방정식을 생각해냈다. 이를 나열하는 것은 여기서 생략한다.

구체적인 예를 들어 그의 방법을 살펴보도록 하자.

동일한 꼭지점을 갖는 두 개의 포물선의 방정식을

$$x^2=y, \quad y^2=ax \cdots\cdots ①$$

라고 하면, $y^2=ax$ 에서 $\frac{y^2}{x}=a$ 이 얻어지고, 이것을 $x^2=y$ 에 대입하면,

$$x^3=a \cdots\cdots ②$$

이다. 따라서 3차 방정식 $x^3=a$ 의 해는 ①의 두 방정식을 동시에 만족하는 x이다(김용운·김용국, 1997).

그는 이 방법을 확장하여 다른 삼차방정식의 해(단, 양수부분)도 구하고 있다. 그 한 예로 $x^3+b^2x+a^3=cx^2$ 이라는 방정식을 살펴보자.

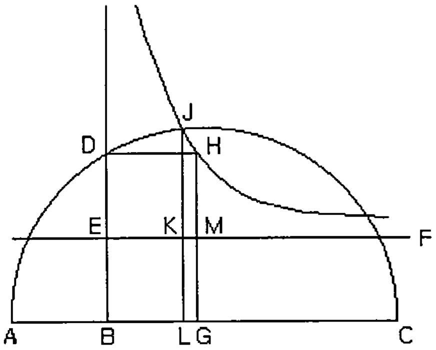
하이얌은 a, b, c, x 를 선분으로 생각했다. 실제로 그는 이 방정식을 '세제곱과 어떤 변들과 어떤 수의 합이 몇몇 제곱과 같다.'라고 기록했다.

그는 이 문제를 주어진 선분 a, b, c 에 대해 주어진 관계를 만족하는 x를 작도하는 것으로 생각했다. 그의 작도는 모두 주어진 선분 r, s, t 에 대해 $r : s=t : k$ 를 만족시키는 k를 작도하는 것에 달려 있었다. 이 작도는 그리스인들에게도 잘 알려져 있는 것이었다.

작도를 위해 먼저 $b : a=a : z$ 를 만족하는 z를 찾아낸다. 그 다음 $b : z=a : m$ 을 만족시키는 선분 m을 찾아낸다. 간단한 대수적 계산에 의해 $m=a^3/b^2$ 임을 알 수 있다. 작도는 다음과 같이 계속된다.

1. $AB=m, BC=c$ 가 되도록 선분 AC를 그린다.
2. AC를 지름으로 하는 반원을 그린다.

3. AC에 수직이 되게 BD를 그린다.
4. $BE = b$ 가 되도록 E를 표시한다.
5. BC와 평행이 되도록 EF를 그린다.
6. $ED : BE = AB : BG$ 가 되도록 BG를 그린다.
7. 직사각형 $DBGH$를 완성한다.
8. H를 지나면서 EF와 ED를 점근선으로 갖는 직각쌍곡선을 그린다.
9. 쌍곡선과 원은 J에서 만난다.



<그림 11>

DE와 평행하도록 JL을 긋고 JL과 EF가 만나는 점을 K라 하고, GH와 EF가 만나는 점을 M이라 한다. 여기서 BL이 바로 우리가 원하는 해 x가 된다. 이것은 다음과 같이 증명된다 :

[증명] 1. 점 J와 H는 쌍곡선 위의 점이므로 $(EK)(KJ) = (EM)(MH)$를 만족한다.

2. $ED : BE = AB : BG$ 이므로 $(BG)(ED) = (BE)(AB)$ 가 성립한다.

3. 1과 2에 의해 $(BG)(ED) = (BE)(AB) = (EK)(KJ) = (EM)(MH)$ 이다.

4. $(BL)(LJ) = (EK)(BE + KJ) = (EK)(BE) + (EK)(KJ)$

$$= (EK)(BE) + (AB)(BE)$$
$$= (BE)(EK + AB)$$
$$= (BE)(AL)$$

따라서 $(BL)^2(LJ)^2 = (BE)^2(AL)^2$ 이다.

5. 기하학적인 성질에 의해 $(LJ)^2 = (AL)(LC)$ 가 성립한다.

6. 4와 5에 의해 $(BE)^2(AL) = (BL)^2(LC)$ 이고 따라서

$$(BE)^2(BL+AB) = (BL)^2(BC-BL)$$

이 성립한다. 여기서 $BE = b, AB = a^3/b^2$, 또한 $BC = c$ 이므로

$$b^2(BL+a^3/b^2) = (BL)^2(c-BL)$$

이 식을 전개하고 정리하면

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2$$

이 성립하는 것이다.

예를 들어 $x^3 + 2x + 8 = 5x^2$ 과 $x^3 + 3x + 12 = 10x^2$ 과 같은 삼차방정식도 이렇게 풀 수 있을 것이다(John Koker).

2) 타르탈리아의 해법

상업과 금융이 불가분의 관계에 있던 르네상스 시대에는 금융 관계에서 흔히 볼 수 있는 문제들을 풀기 위해서 삼차방정식의 해법이 필요했다. 이런 현실적인 이유와 이차방정식의 해의 공식이 알려져서 이차방정식의 연구는 일단락 되었다는 수학적인 이유 때문에 당연히 수학자들의 관심은 삼차방정식으로 쏠렸다. 앞에서 이야기했듯이 이슬람의 수학자들은 원추곡선을 이용해서 삼차방정식의 해를 기하학적으로 구했지만, 대수적인 해는 아직 찾지 못했다. 파치올리는 그의 책에서 삼차방정식의 해를 대수적으로 구할 수 없음을 고백하고 있다. 그래서 수학자들은 삼차방정식의 해의 공식을 찾는 일에 정열을 기울이기 시작한다.

유럽에서는 15세기 말엽까지도 삼차 이상의 방정식의 해법은 알려져 있지 않았다. 그러나 상업의 발달 때문에 이런 문제가 빈번히 일상적인 셈 중에서도 튀어나오게 되자, 수학자들에게 문의가 쇄도했다. 이러한 사회적 분위기를 반영해서 수학자들은 서로 실력을 겨루었으며, 그 때문에 수학 시합이 자주 열렸다. 시합은 서로 상대에게 문제를 제시하고, 정한 시간 내에 누가 상대의 문제를 많이 푸는가로 승부를 가렸다. 따라서 자신이 발견한 해법을 오늘날처럼 발표하지 않고 비밀에 부쳤다.

$x^3 + mx = n$ 형의 삼차방정식은 페로(Scipione del Ferro, 1465 -1526)가 아라비아 수학을 연구하여 알아냈지만, 그 해법은 오늘날 전해지지 않고 있다. 그가 이 해법을 비밀로 했기 때문이다.

일반적인 삼차방정식의 해법은 지금 '카르다노의 해법'이라는 이름으로 알려진 것이 있다. 이것은 본래 타르탈리아가 애써 연구한 결과 얻은 방법이었는데, 카르다노가 속임수를 써서 타르탈리아의 입을 열게 하여 그 공식을 1545년에 발표한 책 「위대한 술법(Ars Magna)」에 실어 버렸다. 그 때문에 명예를 빼앗긴 타르탈리아는 분한 나머지 죽고 말았다는 것이다(김용운 · 김용국, 1997).

카르다노가 타르탈리아에게 간절히 사정한 끝에 결코 공표하지 않겠다는 엄숙한 서약 아래 $x^3 + mx = n$ 의 해법을 전수받은 것은 1539년의 3월 2일과 4월 23일이었다. 당시의 방정식은 모

두 숫자 계수였지만, 그 해법은 문자 계수에도 적용되는 일반적인 것이었다. 그것은 〈술법〉 제11장의 표제가 "어떤 수의 세제곱과 그 배수의 합이 일정수와 같은 것"으로 되어 있는 사실에서도 알 수 있다.

[예제] "입방체와 그 한 변의 합이 20이 되도록 하여라"

즉, $x^3+6x=20$ 을 풀어라 라고 하는 문제가 있지만, 이 숫자계수 방정식은

$$x^3+mx=n\ (m, n>0)$$

꼴의 모든 삼차방정식을 대표하고 있는 것이다.

카르다노의 증명은 기하학적인 것이었다. 즉, 양수는 선분으로 표시하고, 그 제곱은 정사각형, 세제곱은 입방체를 나타낸다. 그리하여 수의 계산을 길이, 넓이, 부피의 계산으로 바꾸어서 하는 것이다.

<그림 12>에서, $ACEF$는 하나의 입방체를 나타낸다. 마찬가지로 이 입방체 옆에 CK를 한 변으로 하는 입방체 CL을 놓는다. 이 때, 두 입방체의 체적의 차가 20이고, 그 변끼리의 곱은

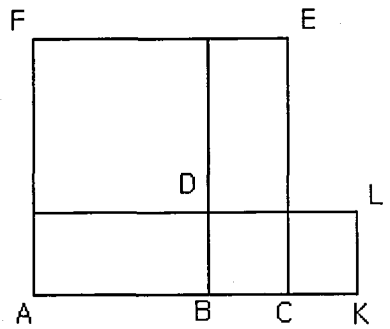
$$AC\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot 6=2$$

인 것으로 한다.

여기서 입방체 CL을 왼쪽으로 옮기면,

$$BC=CK,\ AB=AC-CK$$

이다. 이 AB가 구하는 x이다.



<그림 12>

이것을 증명하면 다음과 같다 :

[증명] $AC^3-BC^3=(AC-BC)^3-3AC\cdot BC^2+3AC^2\cdot BC$

$=(AC-BC)^3+3AC\cdot BC(AC-BC)$

$=(AC-BC)^3+6(AC-BC)$

$= AB^3 + 6AB$

가정에 의하여 $AB^3 + 6AB = 20$ 이므로 $x^3 + 6x = 20$ 과 대응시켜 $x = AB$ 가 된다.

현대식으로 요약하면 $x^3 + mx = n$ 일 때,

$$AC = \sqrt[3]{\frac{n+\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}$$

$$BC = \sqrt[3]{\frac{-n+\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}$$

이것은 $AC^3 - BC^3 = n,\ AC^3 \cdot BC^3 = (\frac{m}{3})^3$ 을 $AC^3,\ BC^3$ 에 관해서 풀고, 그 세제곱근을 구한 것이다. 이들 값을, $x^3 + 6x = 20$ 에 적용시키면, $AC = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$, $BC = \sqrt[3]{-10+\sqrt{108}}$ 이고

$$x = \sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}}$$

이다. 이것은 삼차방정식 $x^3 + mx = n$ 의 해를 현대식으로는

$$x = \sqrt[3]{\frac{n+\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{n-\sqrt{n^2+\frac{4}{27}m^3}}{2}}$$

와 같이 정식화(定式化)하는 것에 해당한다. 이 증명은 도형을 사용하였기 때문에 계수가 양수일 때에 국한될 수밖에 없었던 것이다(김용운 · 김용국, 1996).

카르다노가 발전시킨 삼차방정식의 해법을 대수적으로 일반화시켜 정리하면 다음과 같다 :

먼저 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 의 꼴은 $x = y - \frac{a}{3}$ 로 놓음으로써 $x = y + d$ 라 하고 대입한 후 y에 대한 이차항을 소거시킬 방법을 찾으면

$$y^3 + Ay + B = 0$$

의 꼴(단 $A = -\frac{a^2}{3} + b,\ B = \frac{2}{27}a^3 - \frac{ab}{3} + c$ 이다)로 바꿀 수 있다. 이제 $y = u + v$ 라고 하자. 그러면

$$(u+v)^3 + A(u+v) + B = 0$$

즉,

$$u^3+3uv(u+v)+v^3+A(u+v)+B=0$$

이 되고 따라서

$$(u+v)(3uv+A)+(u^3+v^3+B)=0$$

이 된다. u와 v를 $3uv+A=0,\ u^3+v^3+B=0$ 이 되도록 정해보자. 즉,

$$\begin{cases} uv=-\dfrac{A}{3} \\ u^3+v^3=-B \end{cases}$$

이를 풀기 위해

$$\begin{cases} u^3v^3=-\dfrac{A^3}{27} \\ u^3+v^3=-B \end{cases}$$

를 생각한다. 여기서 u^3과 v^3은 $t^2+Bt-A^3/27=0$ 이라는 이차방정식의 근이 되므로 이차방정식의 해법을 이용하면

$$u^3=\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2},\quad v^3=\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}$$

를 쉽게 구할 수 있다. 따라서

$$u=\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}},\ \omega\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}},$$
$$\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

$$v=\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}},\ \omega\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}},$$
$$\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

(단 $\omega^2+\omega+1=0$)이라 할 수 있다. uv가 실수인 $-A/3$ 임을 생각하면

$$u=\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}} \quad \text{일 때,} \quad v=\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

$$u=\omega\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}} \quad \text{일 때,} \quad v=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

$$u=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}} \quad \text{일 때,} \quad v=\omega\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

로 짝지을 수 있다. 따라서

$$y=\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

또는

$$y=\omega\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

또는

$$y=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}+\omega\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}$$

로 구해진다고 하겠다. (물론, 현재 중·고등학교 교육과정에서는 삼·사차 방정식에서 실근만을 주로 다루고 있으나, 여기서는 복소수 범위 내의 모든 근을 구하고 있다.)

이제 $x=y-\frac{a}{3}$ 이므로 우리가 구하고자 하는 해는 다음과 같다 :

$$x=\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}-\frac{a}{3}$$

$$x=\omega\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}+\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}-\frac{a}{3}$$

$$x=\omega^2\sqrt[3]{\frac{-B+\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}+\omega\sqrt[3]{\frac{-B-\sqrt{B^2+\frac{4}{27}A^3}}{2}}-\frac{a}{3}$$

요컨대 삼차방정식은 이차방정식으로 유도하여 계수에 대해 사칙계산과 제곱근·세제곱근을 구하는 과정을 치름으로써 해를 얻을 수 있다는 것이다.

4. 사차방정식

일단 삼차방정식의 해법이 알려지면 그 다음은 사차방정식에 관심이 모아지는 것은 당연한 일이다. 그 일반적인 해법은 카르다노의 제자 페라리(Ferrari, 1522-1566)에 의해 발견되었으며, 그 내용은 카르다노의 〈술법에 수록되어 있다. 여기서 다루어진 것은,

$$x^4+6x^2+36=60x$$

라는 숫자계수의 방정식이지만, 문자계수로 고쳐 보기로 한다. 일반의 사차방정식

$$a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0 \qquad (a_0\neq 0)$$

에서 a_0로 양변을 나누면 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 꼴로 나타난다. 위의 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 꼴에서 $x=y-\frac{a}{4}$ 로 놓으면, $y^4+Ay^2+By+C=0$ 이라는 삼차항이 없는 형태가 된다. 여기서도 삼차방정식의 경우처럼 기하학적인 방법이 쓰이고 있지만 대수적인 방법으로 대략 설명하면 다음과 같다(김용운·김용국, 1996).

$x=y-\frac{a}{4}$ 라 하자. 대입하면 $y^4+py^2+qy+r=0$ 의 꼴로 바뀌어짐을 알 수 있다. 이번에는 $2y=u+v+w$ 라 한다. 이것을 위의 사차방정식에 대입하여 전개·정리하면

$$(u^2+v^2+w^2)^2+4\{(u^2+v^2+w^2)+2p\}(uv+uw+vw)+4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+4p(u^2+v^2+w^2)+8(uvw+q)(u+v+w)+16r=0$$

여기서 우리는

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2+2p=0 \\ uvw+q=0 \\ (u^2+v^2+w^2)^2+4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+4p(u^2+v^2+w^2)+16r=0 \end{cases}$$

다시 정리하면

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-2p \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=p^2-4r \\ uvw=-q \end{cases}$$

즉

$$\begin{cases} u^2+v^2+w^2=-2p \\ u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=p^2-4r \\ u^2v^2w^2=q^2 \end{cases}$$

를 만족시키는 u, v, w 를 구할 수 있을 것이다(여기서 u^2, v^2, w^2는 삼차방정식 $t^3+2pt^2+(p^2-4r)t-q^2=0$ 의 근이 되므로 이 삼차방정식을 풀면 u, v, w 를 구할 수 있다). 따라서 $y=(u+v+w)/2$ 이므로 y를 구할 수 있고 $x=y-a/4$ 이므로 우리가 구하고자 하는 x 역시 계산할 수 있을 것이다.

5. 오차방정식

16세기경에 이탈리아에서 삼차방정식의 해법에 이어 사차방정식의 해법도 발견되었으므로, 오차방정식의 해법이 발견되는 것도 시간 문제일 것으로 보였다. 그런데 수학사 사상 가장 충격적인 사건이 일어났다. 노르웨이의 젊은 수학자 아벨이 오차방정식에는 근의 공식이 존재하지 않는다는 것을 증명한 것이다. 그의 나이 21세 때의 일이었다. 풀 수 없다는 것을 증명하는 일은 아무나 생각해 낼 수 있는 일이 아니었다. 아벨의 증명은 당시 수학계의 태두 가우스에게도 전해졌지만, 처음에는 무시당했다. 그러나 이윽고 가우스도 아벨을 높이 평가하게 되었다.

한편 프랑스의 젊은 수학자 갈로아는 일반적으로 방정식에 해법의 공식이 존재한다는 것의 의미를 연구했다. 그는 그 결과를 파리 과학 아카데미에 제출했지만, 서류를 분실당하거나 반려당하는 등 아벨과 마찬가지로 많은 괄시를 받았다. 갈로아는 젊은 나이에 결투를 하다가 죽음을 맞이하였는데, 결투 전날에 썼다는 논문은 놀라운 것이었다. 그는 그 논문에서 방정식의 해법에 대한 결과뿐만 아니라 현대 대수학의 기초가 되는 군의 개념을 탄생시켰기 때문이다.

그리하여 아벨과 갈로아에 의해서 오차 이상의 다항 방정식은 사칙 계산과 거듭 제곱근을 사용하여서 일반적으로 근을 구할 수 없다는 것이 밝혀지게 된 것이다(가와쿠보가쓰, 1996).

Ⅲ. 결론 및 제언

1. 결론

오늘날 중등학교 수학교육에 있어, 학생들에게 수학 학습에 대한 관심과 흥미를 갖게 하는 것은 가장 중요한 과제라고 할 수 있다. 만일 학생들이 수학 과목을 재미없고 난해한 교과로 인식하는 터전에서는 수학교육의 목표 달성을 기대할 수 없기 때문이다. 특히 수학뿐만 아니라 여러 관련 분야에서 흔히 접하게 되는 중요한 부분인 방정식은 자칫하면 학생들에게 그 해법이 무의미하게 나열되어져 거부감이나 수학에 대한 부정적인 생각을 가지게 하기 쉽다.

본 논문에서는 유리 계수 다항방정식의 해법을 수학사적으로 고찰하여 학습자의 흥미를 유발시키고 결론만을 암기하려는 학생들에게 다양한 해법을 제시해 줌으로써 수학에 대한 올바른 인식을 하게 해주고자 한 것이다. 이러한 고찰을 통한 결론은 다음과 같이 요약할 수 있다.

① 일차방정식은 아주 간단한 해법으로 풀이되지만, 고대 이집트인들의 임시위치법이라는 특이한 해법도 있었음을 파피루스를 통해 알 수 있었다.

② 이차방정식은 중·고등학교에서도 가장 비중 있게 다루어지는 부분인데, 현재 교과서에 제시된 근의 공식이 만들어지기까지에는 여러 과정들이 거쳐졌음을 알 수 있었고, 유클리드나 알화리즈미의 기하학적 해법은 방정식의 해법을 이해하는 데 새로운 시각적 자료로 이용될 수 있을 것이다.

③ 지금까지 방정식의 형태도 많이 변화해 왔음을 알 수 있으며, 지금처럼 미지수를 문자 x로 놓기까지에도 여러 과정이 있었다.

④ 삼차, 사차 방정식에 대해서는 앞에서 제시한 다양한 해법들을 살펴보았으며, 오차 이상의 다항방정식이 사칙계산과 거듭 제곱근을 사용하여 풀이될 수 없음을 살펴보았다.

2. 제언

방정식 단원뿐만 아니라 수학이 완성되어 있다는 생각으로부터 아직도 발전도상에 있다는 쪽으로 생각을 고칠 수 있게 하기 위해서는 수학사적인 고찰이 다른 단원에서도 필요할 것으로 생각된다. 또한 중·고등학교에서의 수업시간은 한정되어 있으므로 방정식의 해법지도에서 수학사적인 내용을 활용할 때는 교육과정에 보완적이고 부수적으로 사용해야 한다.

더욱이 학생들에게 오히려 부담이 되게 하지 않도록 교육과정이나 이수 시간에 지장이 없는 범위 내에서 활용하여 교과서에 나온 해법이 어떤 과정으로 얻어진 것인지를 정확하게 이해하도록 지도하여야 할 것이다.

참 고 문 헌

김용운 · 김용국 (1996). 수학사대전, 서울 : 도서출판 우성.

김용운 · 김용국 (1997). 수학사의 이해, 서울 : 도서출판 우성.

김춘영 (1993). 수학사를 이용한 국민학교 수학과 교재 개발 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

나숙자 (1992). 수학사와 수학의 응용을 이용해서 정의적 목표를 강조한 수업으로 인한 수학 학습효과의 고찰, 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

문현진 (1996). 수학사 지도에 관한 연구, 경상대학교 교육대학원 석사학위논문.

백석윤 (1990). 수학사와 수학교육과정, 제5회 수학교육학 세미나집, pp. 157-165, 수학교육학 세미나 그룹.

신영미 (1992). 수학사와 수학교육 : 중 · 고등학교 수학교육을 중심으로, 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이성헌 (1975). 세계 수학사 및 수학교수법, 서울 : 교학사.

이애경 (1995). 방정식으로 본 대수의 역사, 수학사랑 1, pp. 10-16.

이창근 (1987). 중등학교 수학교육에 있어서 방정식 지도에 관한 연구, 한양대학교 교육대학원 석사학위논문.

이희종 (1994). 고등학교 수학과 학습흥미유발을 위한 수학사적인 교수-학습자료 개발 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

채순향 (1998). 방정식 풀이 방법에 관한 연구, 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

片野善一郎 (1978). *授業を樂しくする數學の話*, 동경 : 明治圖書.

가와쿠보가쓰오 (1996). 즐거운 수학탐구, 서울 : 여명출판사.

矢野健太郎 (1989). *數學史*, モノクラフ25, 株式會社 科學新興社.

Carl B. Boyer (1968). *A History of Mathematics*, New York : Wiley.

이우영 역 · Howard Eves (1990). 수학사, 서울 : 경문사.

John Koker. A brief history of polynomial equations to appear.