韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 189-199.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 189-199.

분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제의 활용

한 인 기 (한국교원대학교 수학교육연구소)

수학 교수-학습을 통해 개발·육성할 가치가 있는 중요한 인지 활동들 중의 하나가 분석적 활동이다. 분석적 활동의 중요성은 이미 오래 전부터 강조되어 왔으며, 저자는 이미 수학 교수-학습과 직접적으로 관련된 몇 가지 분석적 활동의 유형들을 제시한 바 있다. 본 논문에서는 수학 교수-학습 과정에서 분석적 활동을 활성화시키기 위한 한 방법으로, 다양한 작도 문제를 활용하는 방법과 다양한 학습 자료들을 제시할 것이다.

I. 서 론

수학 교수-학습의 목표들을 살펴보면, 수학 자체의 지식, 즉 수학 학습 내용을 지도하는 것, 그리고 학습자들이 유의미한 인지 활동 능력을 획득하고, 이를 활성화하도록 하는 것 등과 관련된다는 것을 알 수 있다. 지도되어야 하는 수학 자체의 내용은 수학 교육과정을 통해 규정될 수 있지만, '인지 활동'이란 무엇이고, 게다가 어떤 인지 활동이 유의미한가에 대해서는 많은 연구들이 지금도 활발하게 진행되고 있다.

수학 교육이나 심리학, 철학 등의 연구 결과들을 살펴보면, 수학적 활동이나 인지적 활동의 본질에 대한 다양한 접근들을 제시하고 있지만, 인지 활동의 본질에 대한 공통적으로 받아들여지는 견해는 아직 없다. 그 이유는 다양하게 생각할 수 있겠지만, 무엇보다도 이러한 본질적인 문제들의 연구의 어려움은 심리학적인 측면, 논리학적인 측면, 철학적인 측면, 그리고 교수학적인 측면에서의 다각적인 접근을 통한, 장기적인 연구가 필요하다는 것일 것이다.

본 연구에서는 많은 심리학자들과 수학교육을 연구하는 학자들이, 예를 들어 꾸르테츠키 V.A.(1968), 루빈슈타인 L.S.(1989), 브루너 J.S.(1984) 등을 포함하는 많은 학자들은 수학 학습, 혹은 어떤 대상에 대한 인지 활동 과정에 포함된 요소라고 주장하는 '분석적 활동'에 대한 다양한 경험을 제공하고, 이를 활성화하는 하나의 접근 방법을 제시할 것이다.

이러한 접근을 위한 수학적 도구로써 본 연구에서는 작도 문제를 이용할 것이다. 그 이유는 작도 문제가 다른 문제들과는 구별되는 문제 자체의 특성이 있기 때문이다. 즉, 작도 문제를 위해서는 분석적 활동(불완전 분석[1])을 불가피하게 수행해야 하며, 이 분석적 활동 없이는 작도 문제에 대한 완

1) 분석적 활동이란 문제해결 활동(혹은 인지적 활동)의 출발점이 구하려는 결론인 인지적 활동을 분석적 활동이라 하고, 반면에, 주어진 조건이 인지 활동의 출발점인 것은 종합적 활동이라 한다. 한편, 불완전 분석이란 우리가 증명하려는(구하려는) 결론이 옳다고 가정하고, (1) 그 결론을 변형시켜 다른 새로운 결론을 얻는 변

전한 해답을 찾을 수 없기 때문이다(작도 문제 해결 방법론에 관해서는 정창현(1992)의 연구, 한인기의 연구(1999)를 참조).

살펴본 바와 같이, 본 연구에서는 수학 교수-학습 과정의 바탕이 되는 '분석적 활동'에 대한 다양한 경험을 제공하고, 이를 활성화하기 위한 접근 방법의 하나로써, 작도 문제를 활용하는 방안을 제시할 것이다. 이를 위해, 다양한 작도 문제들을 제시하고, 그 해결 과정에 포함되는 분석적 활동에 대해 상세히 기술하며, 작도 문제를 효율적으로 활용할 수 있도록 하기 위해, 다양한 작도 문제들을 체계화하여 제시할 것이다.

Ⅱ. 작도 문제 해결 과정에서의 분석적 활동

작도 문제는 분석, 작도, 증명, 탐구의 과정을 거쳐 해결하게 된다(정창현, 1992; 한인기, 1999). 작도 문제 해결 과정의 바탕이 되는 분석적 활동에 대해서 좀더 구체적으로 살펴보자. 작도 문제 해결 과정에서 분석 과정은 우선, 주어진 조건을 만족시키는 작도를 구했다고 가정하는 것으로부터 시작된다. 이러한 가정으로부터, 문제해결자는 주어진 조건을 포함하는 구하는 도형에 대한 개략적인 스케치를 하게 된다. 이 스케치로부터, 췌뜨베르힌 N.F.(1965)이 이야기했던 것처럼, 분석 과정을 통해 주어진 요소들과 구하는 요소들 사이의 전반적인 관계가 탐구되어지게 된다. 그리고, 이러한 관계들은, '구하는 작도를 위해서 무엇을 해야 하는가? 어떤 순서로 작도를 수행해야 하는가?' 등과 같은 물음에 답을 구하는데 중요한 역할을 수행한다.

이러한 작도 문제 해결 과정에 관련된 분석적 활동은 특히, 하강 분석 중에 불완전 분석에 속한다. 불완전 분석은 증명하려는 결론이 옳다고(구하는 것이 구하여 졌다고) 가정하고, 그 결론(구하여진 것)을 변형시켜 다른 새로운 성질이나 결론을 얻는 과정을 반복하는 것을 포함한다.

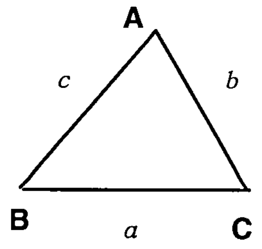
작도 문제 해결을 위한, 불완전 분석의 예를 하나 살펴보자.

문제 1. 삼각형의 두 변 b와 c의 합 $b+c$, 변 a, 변 b의 대각 $\angle B$가 주어진 삼각형 ABC를 작도하여라.

분석(불완전 분석). 주어진 조건들 $\angle B$, a, $b+c$를 포함하는 삼각형 ABC가 작도되었다고 가정하자. 즉, 변의 길이가 a, b, c인 삼각형 ABC를 작도하였다고 하자.

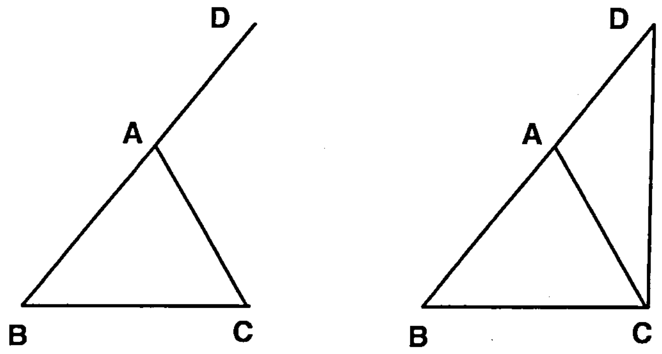
형을 계속하여, 문제의 주어진 조건이나 기존의 지식으로부터 쉽게 유도할 수 있는 결론을 유도하거나; (2) 구하려는 결론을 이미 알고 있는 수학적 지식을 이용해 다른 방식으로 구하여, 참이라고 가정한 주어진 결론과 비교하여 이미 새로운 결론을 유도한다. 그러나, 이 결론을 증명할 수 있다고 해서, 처음에 주어진 결론이 항상 참이라고(증명할 수 있다) 말할 수는 없기 때문에 이러한 분석을 불완전 분석이라 부른다(한인기, 1998). 작도 문제의 해결 과정에서 분석적 활동은 불완전 분석에 해당하는데, 왜냐하면 문제의 조건을 만족하는 작도를 했다고 가정하고, 즉 구하려는 결론을 얻었다고 가정하고 문제해결을 위한 탐색을 시작하기 때문이다.

이제, 얻어진 삼각형을 선분 a, $b+c$, ∠B를 이용하여 작도하는 방법을 생각해 보자. 이를 위해, 선분 a, $b+c$를 포함하는 삼각형을 작도하자.



<그림 1>

선분의 합 $b+c$를 작도하기 위해선, 선분 AB와 AC의 합을 구해야 한다. 이때, 얻어진 합에서 점 C와 D를 연결하면, ∠B, a, $b+c$을 포함하는 삼각형 DBC를 구할 수 있다.



<그림 2>

분석을 계속해 보자. 이제, 우리는 선분 BC를 가지고 있기 때문에, 삼각형 ABC를 작도하기 위해, 꼭지점 A의 위치를 찾아야 한다. 작도에서 보는 바와 같이, 꼭지점 A는 이등변 삼각형 ACD의 꼭지점이다. 그러면, 어떻게 찾을 수 있을까? 이등변 삼각형의 성질에 의해, 밑변에 그은 중선은 높이와 일치하므로, 변 CD의 수직 이등분선을 그어, 선분 BD와 만나는 점이 바로 A가 된다.

이와 같은 분석적 활동을 통해, 우리는 조건 ∠B, a, $b+c$이 주어졌을 때, 삼각형 ABC의 꼭지점의 위치를 찾을 수 있었고, 삼각형 ABC를 작도하였다. 이 문제의 해결을 위한 탐색 과정에서의 분석적 활동을 도식화하면 다음과 같다:

주어진 조건을 만족하는 △ABC를 작도했다고 가정

↓

a, b, c를 포함하는 △ABC에 대한 개략적인 스케치

↓

주어진 조건들 a, $b+c$, ∠B를 포함하는 △DBC작도

↓

△DBC에서 △ABC의 꼭지점의 위치 A, B, C를 정의함

<그림 3> 작도 문제해결을 위한 불완전 분석의 과정

이러한 분석적 활동은 작도 문제 이외의 대수 문제와 같은 다양한 문제 해결 과정에서 매우 유용하게 사용되는 인지 활동들 중의 하나이다(대수 문제에서의 불완전 분석 활동의 활용은 한인기 · 장병철(1997)을 참조).

Ⅲ. 분석적 활동의 활성화를 위한 작도 문제 활용 방안

본 연구에서는 분석적 활동의 활성화 과정에 학습자들이 자기 주도적으로 접근할 수 있도록 하기 위해, 다양한 작도 문제들을 체계화하였다. 이를 위해, 좀더 복잡한 다른 작도 문제의 해결 과정에 도구로써 사용될 수 있는 작도 문제들을 선별하여 기본 문제의 형태로 제시하였다. 즉, 기본 문제들은 난이도나 복잡도가 더 높은 다른 문제들의 해결 과정에서, 주어진 문제를 구성하는 부분 문제(하위 문제)로 변형시킬 때, 부분 문제가 된다.

한편, 표기상의 편의를 위해, 삼각형 ABC에서 각 A의 대변의 길이를 a, 각 B의 대변의 길이를 b, 각 C의 대변의 길이를 c라 하자. 그리고, 각 A로부터 대변에 그은 높이의 길이를 h_a, 각 B, C로부터 각각 대변에 그은 높이의 길이를 h_b, h_c로 나타내자. 각 A에서 대변에 그은 중선을 m_a, 각 B, C에서 대변에 그은 이등분선을 각각 m_b, m_c로 나타내자.

우선, 몇 가지 기본 문제들을 살펴보고, 이들 문제들에서 얻어지는 작도 경험을 이용하는 좀더 높

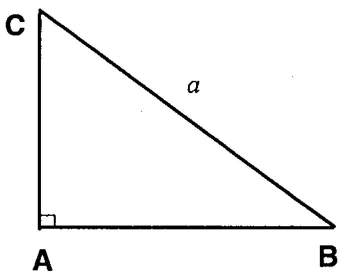
은 수준의 난이도와 복잡도를 가진 문제들을 제시해 보자. 기본 문제들 중에서 그 풀이가 이미 교과서에 제시되어 있는 문제들은 분석 과정을 생략하고, 그 이외의 문제들에 대해서 구체적으로 분석 활동을 수행할 것이다.

기존의 교과서에 이미 풀이가 제시된 기본 문제들로는, (1) a, b, c[2]; (2) a, c, $\angle B$; (3) a, $\angle B$, $\angle C$; (4) 주어진 각의 이등분선; (4) 직각 작도; (5) 주어진 각과 크기가 같은 각; (6) 주어진 각들의 합과 차; (7) 주어진 선분의 3등분 등을 들 수 있다. 이제, 몇몇 기본 문제들에 대해 분석 활동을 수행하자.

문제 2. 빗변 a와 예각 B가 주어진 직각 삼각형을 작도하여라.

분석. 빗변 a와 예각 각 B인 직각 삼각형 ABC가 개략적으로 작도하여 보자(아래 그림 참조). 주어진 조건들로부터 원하는 직각 삼각형을 작도하기 위해 무엇을 더 알아야 하는가? 이 물음에 대답하기 위해, 앞에서 살펴본 기초 작도 문제들을 생각해 보자.

얻어진 스케치에서 각 B와 한 변 a가 주어졌기 때문에, 만약, 각 C를 작도할 수 있다면, 한 변과 양 끝각이 주어진 경우가 되어, 원하는 삼각형 ABC를 작도할 수 있게 된다.



<그림 4>

이제, 각 C를 작도할 수 있는가를 살펴보자. 삼각형의 세 내각의 합은 평각과 같은데, 삼각형의 두 내각(각 B와 직각인 각 A)이 주어졌기 때문에, 각 C는 평각에서 두 내각의 합을 뺀 각 $180° - 90° - \angle B = 90° - \angle B$이므로, 작도가 가능하다.

이와 같은 분석 과정을 거쳐, 우리는 주어진 작도 문제에 대한 다음과 같은 해를 얻을 수 있다:

작도. 1. $\angle C = 180° - 90° - \angle B$를 작도하자.

2. 한 변 a와 양 끝각이 $\angle B$와 $\angle C$인 삼각형 ABC를 작도하자.

살펴본 바와 같이, 작도 문제의 풀이 과정은 매우 흥미로운 사실을 포함하고 있다. 일반적으로, 문

2) 편의상 문제에 주어진 조건들만을 제시할 것이다. 즉, 이 문제는 '삼각형의 세 변이 주어진 경우 삼각형을 작도하여라'를 의미한다.

제해결력 신장의 지도 방법들 중의 하나로, 주어진 문제를 부분 문제로, 주어진 문제를 이미 알고 있는 문제로 변환시키는 방법이 있다. 풀이 과정에서 이러한 아이디어를 명확히 보기 어려운 문제들이 많이 있어서, 학습자들이 주어진 문제를 부분 문제로 변환시키도록 의도적으로 활성화시키기 어려운 경우가 있다. 작도 문제는 살펴본 바와 같이, 주어진 문제들을 부분 문제로 변환시키는 과정을 분석적 활동을 통해 명료하게 볼 수 있기 때문에, 문제해결력 신장의 지도에서도 효과적인 도구가 될 수 있다.

문제 2와 같은 방법으로 다음과 같은 작도 문제들을 스스로 풀어보자.

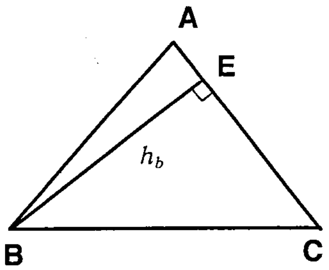
문제 3. 빗변 a와 옆변 b가 주어진 직각 삼각형을 작도하여라.

문제 4. 한 옆변 b와 한 예각 B가 주어진 직각 삼각형을 작도하여라.

문제 5. a, h_b가 주어진, $b=c$인 이등변 삼각형을 작도하여라.

분석. 가령, 우리가 원하는 이등변 삼각형 ABC가 그림과 같이 그려졌다고 가정하자. 구하려는 삼각형 ABC를 작도하기 위해, 그림에서 삼각형의 요소들 사이의 관계를 파악하여 보자.

주어진 그림에서 작도 가능한 도형은 어느 것인가? 앞에서 살펴본 바와 같이, 빗변 a와 옆변 h_a가 주어진 직각 삼각형 BCE는 작도가 가능하다. 이 삼각형 BCE에서 각 C와 각 EBC를 볼 수 있으며, 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변 삼각형이므로, ∠ABC = ∠ACB이다. 이로부터, ∠ABE = ∠ACB - ∠EBC이므로, ∠ABE는 작도 가능하다.



<그림 5>

결국, 삼각형 EBC를 작도하고, 반직선 BE를 한 변으로 하는 각 EBA를 작도하면, 삼각형 ABC의 각 B를 얻게 된다. 이때, 각 C와 각 B의 교점이 우리가 구하는 삼각형 ABC의 꼭지점 A이다.

작도. 1. 빗변을 a, 한 옆변을 h_b로 가지는 직각 삼각형 EBC를 작도한다.

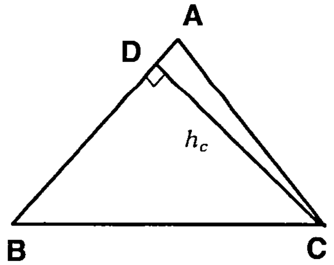
2. 반직선 BE를 한 변으로 하고, 크기가 각 ACB와 EBC의 차인 각 EBA를 작도한다.

3. 선분 CE의 연장선과 (2)에서 그린 각의 한 변과의 교점을 A라 하자.

4. 얻어진 세 꼭지점 A, B, C로 이루어진 삼각형이 우리가 원하는 삼각형이다.

문제 6. $\angle A$와 h_c가 주어진, $b=c$인 이등변 삼각형을 작도하여라.

분석. 조건을 만족하는 삼각형 ABC를 그림과 같이 얻었다고 가정하자. 이때, 주어진 조건을 이용하여 작도 가능한 도형을 찾아보자. 직각 삼각형 ACD는 한 예각 A와 한 옆변 h_c가 주어졌으므로, 작도 가능하다. 즉, 직각 삼각형 ACD의 작도로부터 삼각형 ABC의 변 AC를 얻을 수 있다.



<그림 6>

한편, 이 변 AC는 변 AB와 같으므로, 각 A의 변인 반직선 AD위에 $\overline{AC}$ = $\overline{AB}$인 점 B를 잡으면, 삼각형 ABC의 세 꼭지점 A, B, C를 얻게 된다.

작도. 1. 한 예각이 각 A이고, 한 옆변이 h_c인 직각 삼각형 ACD를 작도하자.

2. 각 A의 변인 반직선 AB에 $\overline{AC}$ = $\overline{AB}$인 점 B를 작도하자.

3. 세 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 얻자.

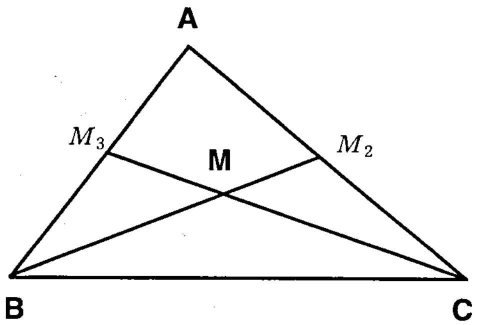
문제 6에서와 같은 분석적 활동을 통해 다음 문제들을 풀 수 있다:

문제 7. $\angle A$, h_b, h_c.

문제 8. $\angle A$, h_a, h_b.

문제 9. a, m_b, m_c.

분석. a, m_b, m_c가 주어진 삼각형 ABC에 대한 개략적인 스케치를 그려보자. 얻어진 도형에서 작도 가능한 도형이 존재하는가? 점 M이 두 중선의 교점, 즉 무게중심이므로, 삼각형 MBC에서 $\overline{BM}$ = $\frac{2}{3}m_b$이고, $\overline{CM}$ = $\frac{2}{3}m_c$이고, $\overline{MC}=a$이다. 즉, 삼각형 MBC는 세 변의 길이가 주어진 것이 되므로, 작도 가능하다. 이로부터, 꼭지점 B, C를 얻게 된다. 이제, 꼭지점 A에 대해서 생각해 보자.



<그림 7>

삼각형 MBC의 변 BM의 연장선에 m_b를 긋고, 그 선분의 끝점을 M_2, 변 CM의 연장선에 m_c을 긋고, M_3를 작도하자. 이때, 반직선 BM_3와 CM_2의 교점이 꼭지점 A이고, 이로부터 삼각형 ABC를 얻을 수 있다.

작도. 1. $\overline{BM} = \frac{2}{3}m_b$, $\overline{CM} = \frac{2}{3}m_c$, $\overline{MC}=a$인 MBC를 작도하자.

2. 반직선 BM_3, CM_2를 작도하고, 교점을 A라 하자.

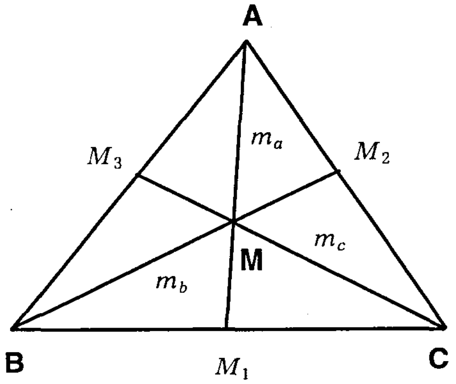
3. 얻어진 세 점 A, B, C를 연결하여 삼각형 ABC를 얻는다.

살펴본 바와 같이, 작도 문제 풀이 과정은 작도 자체의 단순 기능을 훈련시키는 것이 아니라, 기존에 학습한 기하학적 정리(문제 9에서는 무게중심의 성질)를 활용하는 측면을 가진다. 이제, 무게중심과 관련한 문제를 하나 더 살펴보자.

문제 10. m_a, m_b, m_c

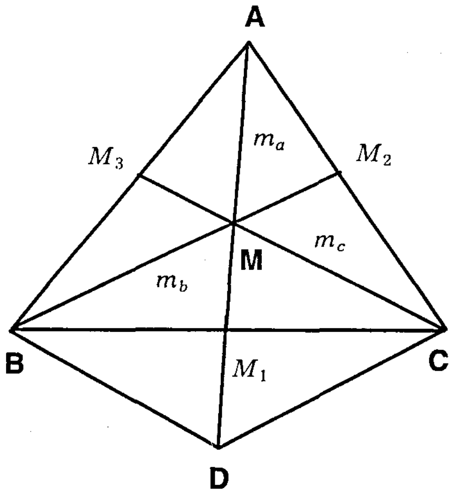
분석. m_a, m_b, m_c를 포함하는 삼각형 ABC를 작도하였다고 하자. 얻어진 작도로부터 삼각형 ABC를 작도하기 위한 어떤 정보를 알 수 있을까? 주어진 그림에서 얻어지는 정보들로는 삼각형 ABC를 작도하는 방법을 보기가 어렵다.

우선, 기존의 수학적 지식들로부터 얻을 수 있는 정보들부터 나열하여 보자. M이 중선들의 교점인 무게중심이므로, $\overline{AM} = \frac{2}{3}m_a$, $\overline{BM} = \frac{2}{3}m_b$, $\overline{CM} = \frac{2}{3}m_c$이다. 한편, $\overline{MM_1} = \frac{1}{3}m_a$이다. 이제, 삼각형 BMC를 보자. 이 삼각형에서는 두 변인 BM과 CM이 주어져 있고, 중선 MM_1이 주어져 있기 때문에, 작도할 수 없다.



<그림 8>

그러나, 우리는 중선과 관련된 많은 문제들에서 중선을 2배로 연장하는 보조선을 자주 접해 왔다. 이 문제에서도 이러한 보조선을 사용하여 보자. 삼각형 MBC의 중선 $\overline{MM_1}$을 2배로 하는 보조선을 작도하고, 점 M을 점 B, C와 연결하면, 사각형 MBDC를 얻을 수 있는데, 이 사각형 내부에 있는 삼각형 BM_1M와 CM_1D은 합동이다. 즉, $\overline{BD}=\overline{CM}$이다. 이로부터, 삼각형 BDM의 세 변의 길이가 각각 $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$, $\frac{2}{3}m_a$임을 알 수 있고, 이 삼각형 BDM을 작도할 수 있다.



<그림 9>

이제, BDM의 변 DM의 중점 M_1을 잡고, 직선 BM_1을 긋자. 삼각형 DM_1C와 MM_1B가 합동이므로, $\overline{BD}=\overline{DC}$이다. 즉, 직선 BM_1위에서 $\overline{BD}=\overline{DC}$인 점 C를 잡으면, 삼각형 ABC의 두 점 B, C를 얻게 된다.

이제, 꼭지점 A에 대해서 생각해 보자. $\overline{MM_1} = \frac{1}{3}\overline{AM}$이므로, 꼭지점 A는 선분 M_1M의 연장선에서 $2\overline{MM_1}$인 점을 잡으면 된다.

작도. 1. 세 변의 길이가 각각 $\frac{2}{3}m_b$, $\frac{2}{3}m_c$, $\frac{2}{3}m_a$인 삼각형 BDM을 작도하자.

2. BDM의 변 DM의 중점 M_1을 잡고, 직선 BM_1을 긋자.

3. 직선 BM_1위에서 $\overline{BD}=\overline{DC}$인 점 C를 잡자.

4. 선분 M_1M의 연장선을 긋고, 연장선 상에서 $2\overline{MM_1}$인 점 A를 잡자.

살펴본 바와 같이, 작도 문제의 풀이 과정을 보면 주어진 문제를 부분 문제로 변형시키는 문제해결 전략을 명확히 볼 수 있으므로, 학습 과제의 체계화를 통한 자기 주도적인 학습의 가능성을 제시할 수 있기 때문에, 수학 교수학적인 측면에서도 커다란 의의를 가진다고 할 수 있다.

Ⅳ. 결 론

우리는 수학 교수-학습 과정과 관련된 다양한 인지적 활동 중에서 분석적 활동(불완전 분석)을 활성화시키기 위한 하나의 접근으로 작도 문제의 활용에 대해 살펴보았다.

작도 문제는 문제해결 과정 자체에서 분석적 활동의 역할이 매우 중요하기 때문에, 의도적으로 분석적 활동의 중요성을 강조하지 않더라도, 학습자들이 문제를 풀어가면서 자연스럽게 이러한 활동을 적극적으로 수행할 수 있는 기회를 제공한다. 뿐만 아니라, 체계화된 작도 문제는 학습자들의 자기 주도적인 학습을 가능하게 함으로써, 학습자 개별적으로 문제해결 과정에 접근할 수 있으며, 이를 통해 작도 문제해결과 관련된 인지적 활동, 즉 분석적 활동을 활성화시키는데 커다란 역할을 한다.

본 연구에서는, 작도 문제해결 과정과 관련되는 분석적 활동의 본질에 대해 명확하게 기술하고, 이를 실제적인 예를 통해서 구체화하였다. 한편, 이러한 분석적 활동을 학습자들이 개별적으로 수행하고, 이를 통해 분석적 활동을 활성화시키기 위한 한 방법으로, 본 연구에 제시되는 작도 문제들을 체계화하였다. 이 과정에서 기본 문제들을 추출하였으며, 이를 활용하여 해결할 수 있는 좀더 높은 수준의 난이도와 복잡도를 가진 문제를 제시하였다.

한편, 본 연구의 또 다른 의의들 중의 하나로는 학습자들의 인지적 활동을 활성화시킬 수 있는 학습 자료 개발에 새로운 방향을 제시했다는 것이다. 제 6차 교육과정에 의한 교과서들을 보면, 작도 문제의 효과적인 해결 방법에 대한 방향 제시가 미약하며, 작도 문제 또한 1학년의 작도 문제 단원에 한정된 경우가 많다. 그러나, 살펴본 바와 같이 작도 문제는 학습자들의 수학적 사고를 구성하는 중요한 요인들 중의 하나인 분석적 활동을 활성화시킬 수 있는 중요한 도구가 될 수 있다. 이러한 자료들이 7차 교육과정에 의한 새로운 교과서 개발에 많이 반영되어, 학습자들에게 수학적 지식을 배우는 기회, 그리고 유의미한 인지 활동을 활성화시킬 수 있는 기회가 많이 제공되기를 바란다.

참 고 문 헌

정식영 외 (공역), J.S. 브루너 (1984). 교육의 과정, 서울: 종각.

정창현 (1992). 평면 도형의 작도에 관한 고찰, 한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> **31(4)**, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (1999). 작도 문제 해결 방법, 한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육 논문집> **9**, 서울: 한국수학교육학회.

한인기 (1998). 분석-종합적인 탐색 수행. 수학교육학연구발표대회논문집(대한수학교육학회), 서울: 대한수학교육학회.

한인기 · 장병철 (1997). 기하 문제의 분석적 증명 방법과 그 본질, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 프로시딩>, 서울: 한국수학교육학회.

<<러시아어 참고문헌>>

루빈슈타인 L.S. (1989). *일반 심리학의 기초*, 모스크바: "교육"출판사.

췌뜨베르힌 N.F. (1965). 도형 인식에 있어 어려움을 주는 요인들에 대한 기하학적 특성, *학교에서의 수학*[3] **4**.

3) 수학교육 저널