韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 169-188.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 169-188.

Derive(TI-92)를 이용한 탐구 지향 수학 수업*

신 은 주 · 송 정 화 (이화여자대학교 대학원)
권 오 남 (이화여자대학교)

급변하고 있는 정보화시대에서 수학교육은 예전의 암기식, 주입식에서 벗어나 새롭게 변화될 필요가 있다. 컴퓨터 매체가 수학교육에 도입된 결과 수학 내용과 수학을 이해하는 방법, 교수·학습 방법을 변화시키고 있으며 교수·학습이 일어나는 사회·문화적 환경을 변화시키고 있다. 학생들이 컴퓨터 테크놀러지를 이용해 수학적 이해를 얻고 수학적 힘을 길러 의사소통자, 문제해결자가 되도록 도와야 한다. 또한 실생활적인 맥락에서 상황화되는 중요한 아이디어를 동시에 가르침으로써 효율성을 성취하고 내용적 과잉을 극복하고 새 수학의 혁신, 다양성, 연속적 성장을 체계적으로 지지해야 한다. 이 글에서는 학생들의 개념적 이해와 문제해결을 돕기 위해 테크놀러지의 역할을 조명해보고 DERIVE(TI-92)를 이용한 수학 학습 예시를 제시하고자 한다.

I. 연구의 필요성 및 목적

지금까지의 수학교육은 사실과 알고리즘의 기계적·절차적 기억에 지나친 강조를 한 결과 탐구를 통한 능동적 사고, 반성적 사고로 문제를 제기하고 해결하는 방법을 지도하는데 실패했다고 비판받아 왔다. 완성된 지식의 반복이 아니라 학생 스스로 지식을 구성하고 능동적으로 탐구해 나가는 활동으로의 전이가 수학교육의 주된 논지를 구성해야 함은 자명하다.

유용한 테크놀러지가 학생의 수학적 탐구 과정을 가능하게 하고, 촉진할 수 있으며 수학적 사고를 개선시킬 것이라는 논의가 있어 왔다(NCTM, 1989). 최근의 개혁 운동은 교실에서 컴퓨터 테크놀러지의 사용, 특히 수학교육에서 컴퓨터 기반 탐구의 사용을 권장하고 있다. 하지만 이러한 변화에 대한 몇몇 회의론자들은 테크놀러지를 수학교육에 도입한 결과 잘못된 수학 지식과 태도를 낳는 등 부정적인 영향을 끼친다고 주장하고 있다.

Pomerantz(1997)는 그동안 알려진 잘못된 인식들을 다음과 같이 제시하고 있다.

(1) 테크놀러지는 학생들이 스스로 계산하고 대답하는데 걸림돌이 된다. 테크놀로지는 학생들이 직접 해야 할 것을 대신한다.
(2) 테크놀러지가 학생들이 하여야 할 것을 모두 하기 때문에 학생들은 충분히 동기화 되지 못하고 또 도전하지 않는다.

* 본 논문은 1999년도 Texas Instruments에 의해 연구 지원 되었음.

(3) 내가 수학을 배울 때 테크놀로지를 이용하지 않아도 잘 할 수 있었기 때문에 나의 아이들도 마찬가지로 테크놀러지를 이용할 필요가 없다.
(4) 테크놀러지의 사용은 학생들이 기초 수학을 효과적으로 학습하지 못하게 한다.
(5) 사람들은 테크놀러지에 너무 의존해서 이것 없이는 아무 것도 하지 못한다.

Pomerantz의 견해를 반영하여 수학교육에서의 테크놀로지의 중요성과 바람직한 방향을 고려해 볼 필요가 있다. 실제 수학의 이해는 기계적 훈련, 알고리즘, 지필 조작으로 구성된 것이 아니라 문제를 어떻게 풀지를 계획하고 적절한 연산을 결정하여 얻어진 대답이 맞는지 틀리는지를 검토하면서 문제를 이해하는 것이다. 테크놀러지가 적절하게 사용되었을 때, 수학의 가치와 힘을 인식하도록 하여 여전히 미지의 영역으로 남아 있는 부분을 탐구할 수 있게 하고 실제적인 수학을 할 수 있게 한다. 학생들이 문제 해결의 가장 적절한 방법을 가졌을 때 어림과 지필 기능 뿐 아니라 암산도 학교에서 계속 지도되어야 하는 것은 매우 중요하다. 이러한 기능은 수학 학습과정에서 필요한 기능이고 테크놀러지가 사용될 수 없을 때, 그리고 근사치 결과를 결정하는 것이 필요할 때 사용된다. 테크놀러지의 유용한 기능에도 불구하고 테크놀러지가 문제 상황을 읽고 이해하는 방법, 문제에 적절한 식을 쓰고 문제를 푸는데 사용할 연산을 고르고 테크놀러지에서 제시된 답을 정확하게 설명하여 대답이 적절한지 결정하는 인간의 능력을 대신할 수는 없다.

수학적 창의성의 본질은 수학의 탐구적 측면에 놓여 있는 것으로 탐구적·실험적 자세는 수학의 발명·발견 과정에 중요한 것이다. 그러나 전통적인 수학 교수에서는 이러한 탐구적·실험적 활동이 중요한 부분을 차지해 오지 못했다. 적절한 실험적 환경을 뒷받침할 도구가 없었기 때문일지도 모른다. 최근에 급격히 진보가 이루어지고 있는 테크놀로지와 컴퓨터 소프터웨어는 학생과 교사 사이의 지적인 탐구가 가능하게 하는 환경을 제공해 줄 수 있다. 즉 다양한 역동적 상황을 탐구하는 경험을 주어 학생들에게 수학을 스스로 발명·발견하게 하고, 수학적으로 사고하여 도전적인 문제를 해결하도록 학습자의 능력을 증폭해주는 역할을 하는 강력한 교육적 도구이다. 또한 직접적인 피드백을 주는 잠재성에 기인하는 상호작용이 가능한 컴퓨터 환경은 수학적 개념과 연산의 개념화를 이끌 수 있는 행동을 가능하게 한다.

수학 교육에 많은 교육용 테크놀러지가 소개되고 있지만 이것이 학교 수업에 도입되었을 때 그 조작 방법이 어렵고 명령어들을 완전히 익혀야 하는 불편함이 있기 때문에 중등 과정에서 이용하기에 무리가 있었다. 하지만 Derive는 마우스의 클릭과 키보드의 사용만으로도 거의 모든 것을 조작할 수 있어 처음 이것을 접하는 학생들조차도 메뉴얼을 따로 익힐 필요가 없을 정도로 그 조작법이 매우 쉬울 뿐 아니라 그 표기가 학생들의 인지 과정과 일치하므로 예전의 것들보다 교육적 효과가 크게 미칠 것으로 기대된다.

이같은 사실을 반영하여 이 글에서는 탐구 활동을 통한 문제해결 조력자로서 테크놀러지의 역할과 표현간의 연계성을 통한 개념 증폭자로서의 테크놀러지의 역할을 조명해 보고 Derive를 통한 탐

구 지향 수업의 예시를 제시하고자 한다.

Ⅱ. 수학교육에서 테크놀러지의 역할

교육 환경에서 컴퓨터 테크놀러지의 잠재적 교육 효과를 극대화하기 위해서는 먼저 테크놀러지와 학습자와의 상호작용적 본질을 이해하여야 할 필요가 있기 때문에 이 절에서는 탐구활동을 통한 문제 해결 조력자로서의 테크놀러지의 역할과 개념 증폭자로서의 테크놀러지의 역할, 테크놀러지와 학생 사이의 상호작용에 대해 고찰하고자 한다.

1. 탐구활동을 통한 문제해결 조력자로서 테크놀로지의 역할

수학적 탐구학습은 문제해결시 탐구활동이 중심이 되어 지식, 정보를 추구하는 학습으로 문제해결과 공통되는 면이 많다. 즉 수학적 탐구학습이란 문제를 해결하기 위해 학생의 능동적 탐구 행위를 자극하는 수업형태이다.

학습자와 컴퓨터 사이의 상호작용 환경에서는 학습자가 대상의 구조, 관계, 그들에 접근하는 표현을 동시에 탐구하게 되는데, Hoyles(1991)는 상호작용 컴퓨터 소프트웨어와 다른 교육용 소프트웨어 사이의 차별화를 다음과 같이 설명했다.

> 상호작용이 가능한(interactivity) 컴퓨터 소프트웨어는 메뉴에 따라 조작하는 구조라기보다는 사용자가 조작하는 소프트웨어이다. 이 상호작용 소프트웨어 내에서는 피드백이 평가적이라기 보다 정보 제공자적인 것이고 아동들은 컴퓨터 위에서 행한 활동과 제공된 피드백에 대한 반성으로부터 학습할 기회를 가지게 된다. 이 소프트웨어를 사용한 아동은 연역적 일반화 과정, 자신의 가설을 추측·시험하는 과정을 통해 수학적 지식을 개발하는 것이 가능하다. 그들이 활동하고, 활동의 수학적 특징을 정의하는 제약은 명시적이라기 보다 암묵적인 것이다. 나는 컴퓨터 기반 환경을 학습하는 이러한 유형의 학습 환경을 마이크로월드(microworld)라 부를 것이다(p.147).

CabriⅡ나 GSP, Mathview, CAS(Computer Algebra System) 등은 직접 조작 인터페이스에 해당되고 LOGO가 상호작용 컴퓨터 소프트웨어에 해당되나 최근에는 소프트웨어 설계 시 두 가지 특징을 통합하려는 시도가 이루어지고 있다.

Holyes의 견해에서 보듯이 상호작용이 가능한 컴퓨터 환경은 학생에게 체계적 탐구를 통해 실험하고 추측하고 개념을 발달하게 하는 것이다. 즉 컴퓨터는 강력한 지적 도구이면서 자동적인 조작 절차 수단이고 전략적 사고를 가능하게 할 뿐 아니라 가설 세우기, 문제해결의 기회를 제공하는 탐구적 도구인 것이며, 컴퓨터가 보여주는 역동적 체계는 수학 문제와 절차와 직관을 개발하게 하는 문제해결 조력자인 것이다.

Hoyles(1991)은 문제 해결을 위한 잠재력을 가진 컴퓨터 기반 환경의 특징을 두 가지로 제시하였다.

첫째, 컴퓨터는 데이터를 조작할 수 있어서 형식적인 조작 기술보다는 문제상황의 표현, 문제 상황의 전략, 결과의 해석에 관심의 초점이 맞춰지게 할 수 있다.

둘째, 어떤 소프트웨어는 데이터의 다양한 표현을 제공하고, 같은 문제에 대해서도 다른 시각을 제공하여 열린 탐구를 가능하게 한다.

이렇게 문제해결 조력자로서 컴퓨터가 학생들이 표현적, 전략적 절차에 초점을 맞춘 학습을 할 수 있게 하고, 교사들로 하여금 여러 수준에 있는 학생의 사고 과정을 이해하게 할 수 있게 함에도 불구하고 교사들은 학생의 수행 과정, 의사소통, 문제해결에서의 상호작용과 성취를 조사하는 도구로서 컴퓨터를 이용해 오지 않았다(Thompson, 1985).

Schoenfeld(1988)는 테크놀러지 도구를 이용하여 학생들이 연역적 실험과 경험적 실험 사이에 연결을 만들 수 있고, 경험적으로 가설을 시험하여 자신이 행한 것을 발견하고 증명한 것에 대해서 사고할 수 있게 된다고 제시하였다. 즉 테크놀러지는 문제해결 과정과 전략에 중심을 둔 환경의 부분으로서 사용될 수 있다는 것이다.

Schoenfeld의 견해에서 보듯이 전통적인 형식 수학 학습에서는 직관적으로 분명한 관계를 확인하기 위해 오직 간단한 수치값을 다루어 왔고, 스스로의 구성을 통해 자신의 가설을 세우고 증명하고 논박하는 학습은 이루어져 오지 못했다. 그러나 테크놀러지를 통해 정보를 모으고 데이터를 분석하는 활동은 정수 계수나 정수 답만을 가진 문제를 다룰 필요가 없고, 실세계에서 쓰이는 복잡한 수치와 다양한 기호조작을 가능하게 하여 학생들이 학습한 형식 수학과 실세계 사이의 연결성을 발견할 수 있게 한다. 즉 실세계 상황을 취하고 그것들을 추상화하고 실세계에서 결과를 해석하는 활동은 학교 수학과 실세계 수학과의 장벽을 없애게 한다.

이상의 고찰에서 알 수 있듯이 컴퓨터 기반 수학 탐구 활동에서 학생들은 역동적 경험을 통해 자신이 세운 가설을 시험하고, 컴퓨터에서 얻은 수치 데이터나 시각적 데이터로 가설을 정교화하고, 추상화 · 일반화 과정으로의 전이가 가능하며 탐구를 통해 직관적 사고에서 조직적 사고로 전이할 수 있다. 또한 탐구동안 자신의 발견과 활동을 종합해 문제를 해결하고, 해결한 문제를 반성해 보고, 반성을 통해 어떠한 사례가 고려되어야 할지, 어떤 가설이 선택되고, 어떤 것은 버려야 할지를 스스로 모니터 · 제어할 수 있는 메타인지적 학습을 할 수 있게 된다.

2. 표현간의 연계성을 통한 개념증폭자로서 테크놀로지의 역할

컴퓨터는 문제해결 조력자로서의 역할 뿐 아니라 수학적 개념 증폭자로서 학습자에게 기회를 제공한다(Kaput, 1985, 1992).

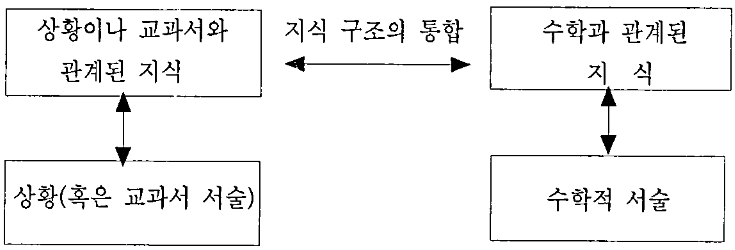
첫째, 다양한 표현과 시각적 도움을 제공한다.

둘째, 수학학습과 수학적 개념 발달에서 탐구를 통한 추상화를 촉진한다.

수학 학습에서 다양한 표현은 학습자가 좀 더 쉽고 깊게 이해하도록 그 이해의 폭을 한층 더 넓힐 수 있게 한다. 이 같은 다양한 표현은 수학 고유의 한 부분으로 개념의 다양한 구체화를 제공하고, 과제 성취에서의 어려움을 감소시키며, 학생에게 수학을 더 흥미롭게 만드는 것이다(Janvier, 1987).

Kaput(1992)은 다양한 표현은 복잡한 개념의 어떤 측면을 줄여주어 표현의 인지적 연계를 촉진하게 해주고, 이런 다양한 표현에 잘 접근하도록 기회를 제공하는 것으로 컴퓨터 환경을 들고 있다. 컴퓨터가 제공하는 다양하게 연계된 표현 학습 환경이 탐구를 촉진해 복잡한 아이디어를 최소화하고 다른 것을 강조하여 학습과 추론 과정을 촉진할 수 있다는 것이다. Kaput(1994)은 전통적인 수학적 표현은 실제 경험과 형식 수학을 연결하는데 사용되어 왔다고 설명하면서 표현의 수직적, 수평적 차원을 언급하여 <그림 1>의 도식 모델을 제시했다.

이 도식 모델에서 보듯이 수학학습에서 상황이나 교과서에 관계된 지식으로부터 수학과 관계된 지식으로 번역할 때는 상황이나 교과서에 관계된 지식에 대응하는 실제적인 상황에서 수학과 관계된 지식에 대응하는 수학적 서술로 양쪽이 상호 통합되는 수준에 이르러야 한다. 수학교육에서 테크놀러지의 표현적 기능이 이같은 표현 체계 사이에서의 연계를 촉진하여 학습자가 수학적 기호의 형식적 조작이 아닌 기호의 의미에 기초한 조작을 가능하게 하고 실제적 표현과 수학적 표현과의 번역을 통해 수학을 실세계와 관계지음으로써 수학적 개념을 강화하게 된다.

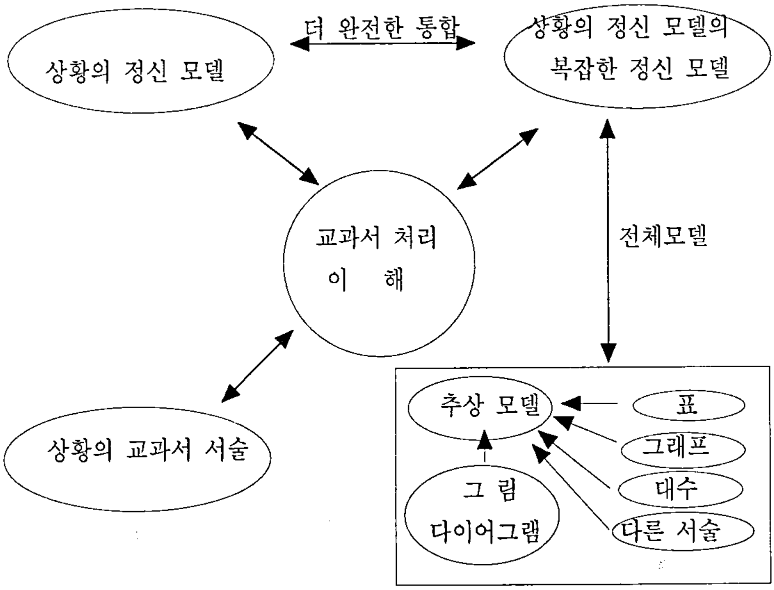


<그림 1> 표현의 수직 차원과 수평 차원(Kaput, 1994)

Kaput(1994)은 수학적 표현에 기반한 정신모델은 상황의 개념화에 더 직접적으로 관계하는 것으로 수학적 행동은 물리적 대상에서 새 구조가 도입될 때 물리적인 것과 정신적인 것 사이의 순환적 상호작용이 일어나는 것으로 보았다. 물리적 구조에서 구현된 제약과 지지가 정신적 구조로 점차 내면화될 때 동화와 조절을 이끄는 확장된 상호작용이 필요하다는 것이다. 그가 제시한 새 표현의 전체 모델은 <그림 2>와 같다.

수학교육에서 참된 인간 경험의 세계와 수학의 형식체계 사이에 기능적 연결을 만드는 기회를 제공하기 위해 Kaput은 새로운 표현 체계 도입, 다른 표현 체계로의 역동적 연결로 변화 양식을 취했다.

이상에서 고찰한 문헌의 검토에서 보듯이 교육 개혁자들은 수학학습에 가능한 대안적 표기체계의 구성을 오랫동안 실험해왔는데 잘 확립된 방법 중 하나가 컴퓨터 언어로 수학을 구현하는 것이다. 학생의 수학적 사고, 문제해결, 다양한 연계된 표현 능력에 미치는 컴퓨터의 잠재적 영향에 대한 강력한 이론적 관점이 있다. 컴퓨터와의 상호작용이 학생들이 다양한 표현을 역동적으로 연계하게 하여 개념을 증폭하게 해 줌으로써 학생에게 수학을 재구성하게 해주는 것이다. 따라서 우리는 상호작용 컴퓨터 환경에서 학생이 탐구적, 실험적 학습을 행함으로써 수학적 지식을 개발할 기회를 제공해야 한다고 본다.



<그림 2> 표현의 전체 모델(Kaput, 1994)

3. 테크놀로지와 학습자 사이의 상호작용

학습자와 컴퓨터 사이의 상호작용은 학습자가 입력한 기호적 해석과 계산에 기반을 두고 컴퓨터의 피드백이 제공되어 학습자에게 더 심층적이고 직접적인 수학 경험을 가능하게 해준다(Balacheff & Kaput, 1996).

그러나 Balachff는 지식이 교육적 제약 하에서 변형되는 것과 마찬가지로 계산적 제약 때문에 교육용 소프트웨어 이행과정에서도 그 지식이 변형됨을 지적했다. 지식 구조와 표현의 선택, 적용할 알고리즘의 선택을 위해 취해져야 할 필요가 있는 의사결정은 지식의 교수학적 변환과 유사한 과정을 통해 컴퓨터에 의한 계산적 변형을 겪게 된다는 것이다(Balacheff & Kaput, 1996). 이러한 이유로 교

육용 테크놀로지의 규정, 이행, 교육적 평가는 지식이 정의되고 표현되고 구현되는 방법의 분석을 요구하게 되는 것이다.

Thompson(1985)은 컴퓨터를 문제해결 도구로 사용해 학생의 전략적(strategic), 표현적 과정에 초점을 맞추기 위해서는 컴퓨터가 문제해결과정에서 중립적 대리(neutral agent)역할을 해야 한다고 언급했다. 즉 컴퓨터의 사용이 학생에게 문제를 제기하는 것이 아니라 학생이 조력자(assistant)를 사용하는 것과 마찬가지로 컴퓨터를 사용해야 한다는 것이다. 그러나 그는 문제해결에서 가능한 중립적 대리자로서의 컴퓨터는 제약이 있다고 보았다. 본질적으로 일상언어 인터페이스가 프로그램에서 수립되어야 할 필요성이 있고 명령구조의 구문이 5~10분의 지도 시간이면 충분하게 가르쳐지도록 단순해야 한다는 것이다.

학습자의 인지 세계는 물질적 세계, 주관적 세계, 합의의 세계의 세 가지 실체로 구성된다고 설명했다. 물질적 세계는 물리적 실체와 물리적 경험을 포함하는 세계이고, 주관적 세계는 정신적으로 경험된 것을 나타내는 정신적 세계이다. 합의의 세계는 물질적 세계와 주관적 세계 사이에서 경험에 의해 타협된 의미의 구성을 논하기 위한 세계이다(Kaput, 1991). 테크놀러지를 사용해 학습할 때는 학습자가 테크놀러지를 통한 물리적 경험과 자신의 정신적 경험세계를 연계하고 사고와 의사소통을 하기 위해서는 서로 다른 세 가지 세계의 다른 측면을 표현하기 위해 각 세계의 어떤 측면을 사용할지를 알아야 한다.

테크놀로지를 활용한 표현의 역동성으로 학습자는 적절한 물리적 실체, 즉 다양한 표현을 제공받아 자신의 주관적 세계, 즉 표상을 더 잘 구성할 수 있게 된다.

이상의 고찰에서 알 수 있듯이 테크놀로지를 활용한 학생사이의 효율적인 상호작용을 위해서는 전문가의 분석적·시각적 도구가 아니라 학습자가 사용하는 분석적·시각적 도구가 구성되어야 한다. 수식 표현, 수식의 연산 순서, 수식의 의미가 학생의 인지적 갈등을 겪지 않는 학생 경험에 기반을 두고 고안되어야 한다. 학생들은 테크놀러지로 얻은 계산의 합리성을 해석해야 할 필요가 있기 때문에 암산과 지필 대수 조작 기능이 소홀해져서는 안되고 테크놀러지의 사용이 균형된 접근을 취할 때만 수학의 심층적이고 더 풍부한 이해가 가능할 것이다.

다음 장에서 위의 고찰을 반영해 Derive의 특징과 주된 기능을 알아보고, TI-92(Derive)를 통한 탐구학습으로 학생과 테크놀러지와의 상호작용을 살펴보고자 한다.

Ⅲ. Derive를 활용한 탐구학습

1. Derive, Mathematica, Maple의 특징

컴퓨터 기반 테크놀로지는 수학의 특징을 변화시키고 있다. 컴퓨터는 새로운 수학영역을 도입했을 뿐 아니라 수학에 대한 사고의 새로운 방법을 가져다주었다. 워드프로세서, 컴퓨팅 테크놀러지, 스프레

트쉬트 등의 기능을 가진 PC가 나왔고 이들 기계들은 ROM카드가 내장되어 있어서 Derive같은 수학적 도구를 발전시켰다. Maple, Mathematica, Matlav, Derive 같은 컴퓨터 대수 시스템(Computer Algebra System)은 학생이 전형적인 표현형태에서는 수학적 함수나 관계를 조작할 수 없었던 것을 정의하고, 조합하고, 변형하고, 비교하고, 시각화할 수 있게 해 주었다. 결과적으로 이 영역에서 교육의 전통적 수업은 의미있는 변화를 겪게 되었으며 많은 회의와 문헌에서 널리 토론되고 있다. 이들 변화는 상호작용이 가능한 새롭고 더 도전적인 탐구적 접근을 반영하고 있고 더 많은 실제적인 문제들과 더 쉬운 기호적 수식, 더 넓은 범위의 수치적 해결 방법이 가능하도록 하고 있다. CAS는 고전적 교과과정에서는 다소 숨겨져 있었던 능력을 요구하는 실험의 장을 열었다(Balacheff & Kaput, 1996).

컴퓨터는 지난 30년간 기호를 조작해 왔고 기호 조작기 (Symbol manipulator)는 20년 전에 도래되었는데 REDUSE, MACSYMA, Derive, Maple, Mathematica가 주로 사용되어 왔다. REDUCE는 현재 많은 이용자를 가지고 있으나 사용자가 함수를 정의하기 위해 완전한 수학적 이해가 필요하기 때문에 대학 수준에서만 가능하다. MACSYMA 또한 학교보다 대학에서 사용하기에 적절하고 지도보다는 연구 도구로서 더 적절하다. 다른 세 시스템 Derive, Maple, Mathematia는 학교에서 사용하기에 적절하다. Derive는 수식을 입력하는 것을 포함하는 모든 것에 대한 메뉴/서브 메뉴 시스템에 기반을 둔다.

Maple이나 Mathematica는 사용자가 옳은 문법을 입력해야 할 필요가 있으나 Derive의 수식입력 메뉴는 Maple 이나 Mathematica보다 초보자가 사용하기에 훨씬 더 쉽다. 이들 세 시스템의 작동을 예시하기 위해 아래표에서 $(1+x)^3$을 전개하고, 그 결과를 미분하고, 미분한 것을 인수분해하는 예시를 보였다(Monaghan, 1994).

Derive에서 메뉴 선택은 꺾쇠 괄호([ ])에 의해 나타난다. 따라서 [A]uthor은 메뉴선택 A(author)이 선택됨을 지시한다. 표에서 알 수 있듯이 Derive의 명령어는 학생의 인지 상태에서 접근이 용이하다.

<표 1> $(1+x)^3$ 전개식의 명령어 비교(Monaghan, 1994)

	Derive	Maple	Mathematica
Input	[A]uthor	y:=(1+x)^3;	Expand[(1+x)^3]
	(1+x)^3	y:=expand(y);	Differentiate[%,x]
	[E]xpand	dy:=diff(y,x)	Factor[%]
	[C]alculus	factor(dy);	
	[D]ifferentiate		
	[S]implify		
	[F]actorize		
Output	$(1+x)^3$	$y:=(1+x)^3$	In[1]:=Expand[(1+x)^3]
	x^3+3x^2+3x+1	$y:=1+3x+3x^2+x^3$	Out[1]:=$1+3x+3x^2+x^3$
	$\frac{d}{dx}(x^3+3x^2+3x+1)$	$dy:=3+6x+3x^2$	In[2]:=Differentiate[%,x]
	$3x^2+6x+3$	$3(1+x)^2$	Out[2]:=$3+6x+3x^2$
	$3(x+1)^2$		In[3]:=Factor[%]
			Out[3]:=$3(1+x)^2$

2. DERIVE의 주된 기능

DERIVE는 대수, 방정식, 삼각술, 벡터, 행렬, 미적분학을 다루는 컴퓨터 프로그램이다. 이것은 수치적 계산과 기호적 계산이 모두 가능하며 사용자가 쉽게 조작 가능하다는 장점이 있다.

(가) 산술적 기능
- 오류가 없는 정확한 유리수 계산
- 정확도 조절 가능한 어림수 계산
- 유리수, 소수, 과학적 표기법
- 영어와 미터법의 변환
- 정수 인수분해, factorial, modulii, 최대 공약수
- 복소수와 무한수의 처리
- 적용 가능한 입출력 밑수
- 높은 정확도를 갖는 기초 물리 상수
- 피보나치수, 베르누이수, 오일러수, Catalan수

(나) 대수적 기능
- 기호표현의 간단함
- 부분 분수 전개와 공통분모
- 복소수값을 직교좌표계에 표시
- 선형 방정식 체계 풀이
- 그리스 문자변수와 라틴 문자 변수의 명명
- 대수적 방정식과 수치적 방정식의 풀이
- 다항식의 전개와 인수분해
- 정수, 실수, 복소수
- 변수와 하위식 대입
- Boolean 대수와 진리표

(다) 그래프 기능
- zoom 기능, trace 기능
- 그래프 색깔과 비율의 다양성
- 좌표축 정하기
- 회전기능
- 직교좌표계 또는 극좌표계를 사용한 그래프
- 매개변수 그래프
- 복소수 함수 그래프
- 자동 축적 기능
- 그래프에 이름달기
- 선 제거 기능

(라) 미적분 기능
- 유한, 무한 기호
- 1계, n계 미분
- 유한, 무한의 합과 곱
- 매개변수 미분

- 곡률, 접선, 법선
- 호의 길이, 넓이, 부피
- 1계, 2계 미분 방정식
- Taylor 급수, Fourier 급수
- Laplace 변환

(마) Vector과 행렬

- 기호원소, 수치적 원소
- 내적, 외적, 벡터곱
- 가우스 소거법
- 합집합, 교집합, 멱집합
- 전치 행렬(transpose), determinant, 역행렬(inverse)
- Tensor 대수와 분석
- Vector 미적분학
- 고유치와 고유벡터
- 행렬 대수

(바) 함수 기능

- 지수함수, 삼각함수, 쌍곡선
- 모의 난수 발생자(generator)
- 복소수변수, 점별 연속 변수
- 육십분법과 호도법
- 확률, 통계
- 특수함수 (Zeta, Bessel)

(사) 인터페이스

- 메뉴나 툴바 선택시 키보드와 마우스를 사용한 간단한 조작
- 대수창, 2D그래프창, 3D그래프창 등 여러 창을 동시에 여는 기능
- 툴바를 사용한 그리스 문자 변수와 수학기호의 입력
- 여러줄의 강조 표현
- 간결한 표현 형식과 제시 모드
- 대수 창 사이의 자유로운 이동
- 신속한 참고 카드와 광대한 온라인 체계
- 쉬운 수식 기입과 편집
- 2차원 행렬 입력과 편집
- 스크린 이미지를 사용한 다단계 예제

3. DERIVE를 활용한 수학교수·학습활동

그래픽 테크놀러지(TI-92)에는 Derive와 Cabri 소프트웨어가 내장되어 있으므로 우리는 TI-92를 이용해 위에서 살펴본 이론을 반영하여 수학교수·학습활동의 두 가지 예시를 제시하고자 한다.

예시 1 : 패턴의 발견

1. 대상 학년 : 고등학교 2학년(수열과 알고리즘)

2. 주요 개념 : 변수 사이의 패턴을 발견하여 식으로 표현하고 그래프 그리기

3. 문제 상황 :

한 학생이 병원에서 피로가 누적되어 있다는 진단을 받고 매일 매 8시간마다 200mg 비타민 두 정씩을 섭취하도록 진료를 받았다. 비타민의 60%가 매 8시간마다 그 학생의 신장에서 여과가 된다. 하루가 지난 후에 신체에 남아있는 비타민의 잔류량은 얼마인가? 이와 같은 섭취를 계속하면 비타민의 과다 섭취가 되지 않을까?

100일이 지난 후에 신체에 남아있는 비타민의 잔류량은 얼마인가?

1년이 지난 후에 신체에 남아있는 비타민의 잔류량은 얼마인가?

식을 세우고 시간에 대한 비타민의 잔류량에 관한 그래프를 그려라.

시간	섭취량(mg)	여과되고 남은 량(mg)	총 남아 있는 약의 양(mg)
0	400	0	400
8	400	400×0.4=160	400+160=560
16	400	560×0.4=224	400+224=624
24	400	624×0.4=249.6	400+249.6=649.6
복용횟수	섭취량(mg)	여과되고 남은 량(mg)	총 남아 있는 약의 양(mg)
1	400	+0	$= A_1$
2	400	$+0.4 \cdot A_1$	$= A_2$
3	400	$+0.4 \cdot A_2$	$= A_3$
4	400	$+0.4 \cdot A_3$	$= A_4$

0 시간 후: 400g 복용

8 시간 후: 400g의 60%가 여과, 400g의 40% 가 신체에 남음.

400×0.4=160g

8시간 후 새로 복용한 양 400g + 잔류량 160g = 560g

16시간 후: 새로 복용한 양 400g + 잔류량 560×0.4 = 400g+224g =624g

24시간 후: 새로 복용한 양 400g + 잔류량 624×0.4 = 400g+249.6g=649.6g

$$400+0.4A_{n-1}=A_n$$

$$A_n-\frac{2000}{3}=0.4\left(A_{n-1}-\frac{2000}{3}\right)$$

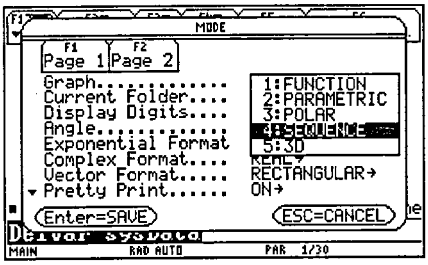
$$A_n = (A_1 - \frac{2000}{3})(\frac{2}{5})^{n-1} + \frac{2000}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = (A_1 - \frac{2000}{3})(\frac{2}{5})^{n-1} + \frac{2000}{3} = \frac{2000}{3}$$

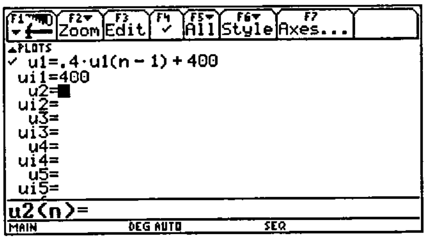
시간이 아무리 많이 경과해도 몸에는 $\frac{2000}{3}$ mg의 비타민이 잔류량으로 남아있어 약의 효과를 유지할 수 있고 과다 복용이 되지 않는다.

4. 그래픽 테크놀러지로 하는 활동

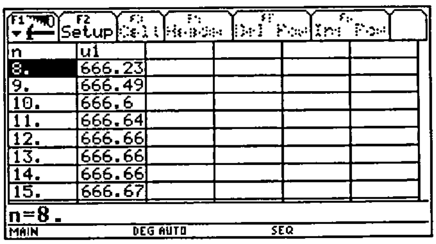
① 그래픽 테크놀러지의 [MODE]에서 Sequence로 바꾸어 놓자.



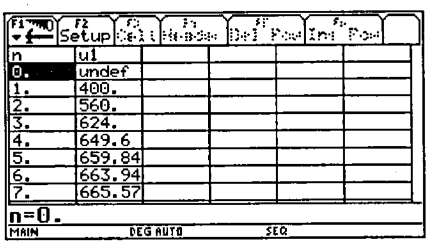
② $400 + 0.4A_{n-1} = A_n$식을 $U_n = ...$ 형태로 바꾸어 입력 하여라.



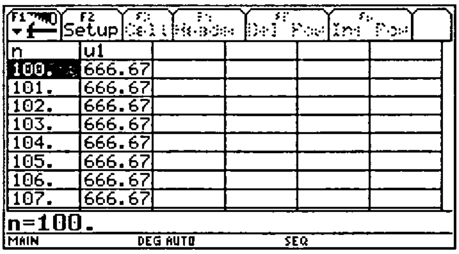
③ 표(TABLE)를 만들고 n에 대한 U_n의 그래프를 그려라. 그리고, [WINDOW]를 적절하게 설정하여라.



n	u1
8.	666.23
9.	666.49
10.	666.6
11.	666.64
12.	666.66
13.	666.66
14.	666.66
15.	666.67



n	u1
0.	undef
1.	400.
2.	560.
3.	624.
4.	649.6
5.	659.84
6.	663.94
7.	665.57



④ 표와 그래프에서 변화의 패턴을 찾아보아라.

알고리즘의 빠른 순환과 역동적이고 상호작용이 가능한 시각적 표현을 통해 새로운 형태의 수학이 발달되고 있다. 이 문제는 제한된 문제 상황에서 닫혀진 형태로 해법을 생각하는 수학이 아니라 실제적인 상황에 대해 수치적이고 도식적인 해법을 생각하는 수학을 학습할 수 있다.

학교 수학에서는 학생들이 패턴을 탐구할 기회를 주지 않고 문제를 제시함과 동시에 교사가 알고리즘을 사용해 풀이를 제시하고 학생들은 그 해법을 암기하게 교육받아왔다.

문제에 제시된 수치는 계산의 편의를 위해 인위적으로 간단한 수치를 사용해 왔으며 위와 같은 반복(iteration)이 일어나는 상황이 실제적인 실세계 상황에서 찾을 수 있음에도 불구하고 학습 초기부터 $400+0.4A_{n-1}=A_n$이라는 점화식을 제시해 주고 암기된 알고리즘에 의해 풀이를 한 후 그 해를 $\lim_{n\to\infty} A_n=(A_1-\frac{2000}{3})(\frac{2}{5})^{n-1}+\frac{2000}{3}=\frac{2000}{3}$로 구하도록 요구해 왔다. 따라서 학생들은 실세계와는 너무나 동떨어진 이미 완성된 산물로서의 형식 수학을 전달받는 정도에 그쳤으며 이 식이 주는 의미를 사고하여 스스로 문제를 구성하고 해결해 나가는 문제해결 능력을 기르지 못했고 문제에 내포된 수학적 개념을 이해하는 수준으로 전이를 하지 못했다.

실세계 상황에서 제시된 이 문제를 탐구한 후에 패턴을 발견하고, 점화식과 극한 개념을 학습하여 기계적 방법으로 해를 구하는데 그치는 것이 아니라 Derive를 통해 표를 만들어 보고 반복(iteration)에 의해 수렴하는 해를 직접 구하고 그래프를 그려보아 확인하는 학습은 다음과 같은 세 가지 관점에서 위에서 제시한 전통적인 수학학습이 가진 취약점을 보완해 줄 수 있다.

첫째, 실세계 상황에서 제시된 실제적인 문제 상황으로 인해 학생들은 먼저 동기를 부여받고 실세계 상황에서 수학적 모델을 만들고 수학적인 해를 구해 나가는 수학화 학습을 함으로써 수학적 개념을 증폭함과 동시에 구해진 해를 원래의 실상황에서 해석해 보아 그 의미를 해석해 보고 자신의 해결 과정을 검토하고 모니터 하는 피드백 과정을 통해 메타인지적 문제해결 학습을 할 수 있게 된다.

둘째, 언어적 문제상황에서 대수적 표현, 표로 만들어진 표현, 그래프 표현으로의 다양하게 연계된 표현들 간의 번역 능력이 가능하고 개념 증폭을 할 수 있게 된다.

문제 상황의 의미를 탐구한 후에 $400+0.4A_{n-1}=A_n$이라는 대수적 표현을 구성한 후, Derive를 통해 표를 만들어 보아 반복(iteration)에 의해 수렴하는 해를 직접 구하고 표로 만들어진 표현을 그래프로 그려보아 그 수렴하는 모양을 관찰해 볼 수 있다. 이를 통해 테크놀러지 없이는 문제의 해를 확인해 볼 수 없게 되는 수학적 패턴과 개념 탐구의 증폭효과 얻을 수 있다. 지필 계산이나 의미 없는 절차 연습이 줄어들고 수학화, 비교적 복잡한 상황의 모델링과 시뮬레이션, 그래픽 표현과 대수적 표현으로 수학적 표현 사이에서의 번역을 할 수 있는 기회로 능동적이고 탐구적인 수학 의미를 구성할 수 있다.

셋째, 문제 상황을 탐구한 후 가설을 세운 후 성질을 관찰해 Derive를 통해 자신이 세운 가설을 증명해 보고 만일 오류가 발견되면 가설을 수정해 다시 정당화하는 발견과 정당화의 맥락에서 가설을 증명하고 알고리즘적으로도 이행해 보는 탐구적이고 실험적인 수학을 행할 수 있다. $400+0.4A_{n-1}=A_n$라는 대수식에서 문제가 주어지고 그 해결 과정을 테크놀러지의 도움으로 실제적으로 구해 보고 확인해 보는 경험이 없이는 학습자는 가설을 세울 기회가 없고 자신의 가설을 검토하고 증명할 수 있는 기회를 갖지 못하게 된다. 가설을 세우고 테크놀러지의 도움으로 경험적인 증명을 해 나가는 학습 중에 연역적 증명과 경험적 증명 사이의 의미있는 연결을 할 수 있게 되는 탐구적인 사고 실험을 하게 되는 것이다.

예시 2 : 자동차 경주

1. 대상 학년 : 고등학교 2학년(미분과 적분)

2. 주요 개념 : 위치와 속도와의 관계,
평균값 정리 학습

3. 문제상황 :

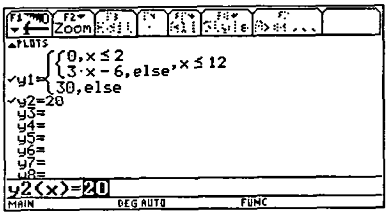
지은이와 다은이는 과학 수업 시간에 리모콘으로 조정하는 모형화를 만들어 경주에 참여하였다. 지은이가 만든 차는 단지 짧은 거리에서만 빨리 달릴 수는 있으나 다은이가 만든 차는 지은이의 차가 최고 속력으로 달릴 수 있는 거리보다 더 멀리 일정한 속도로 달릴 수 있다. 지은이의 차는 출발부터 10초 동안은 속도가 일정하게 증가해서 최고 속도가 30 m/sec 가 되고 그 후 30 m/sec 의 속도로 300 미터를 더 달릴 수 있는 성능이 있다고 한다. 다은이의 차는 출발부터 20 m/sec 의 일정한 속도로 지은이의 차보다 더 멀리 달릴 수 있다.

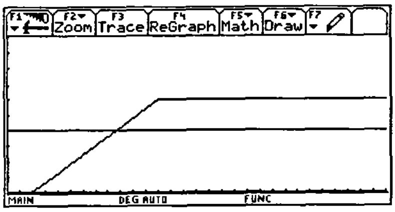
그런데 자동차 경주에서 지은이는 출발 신호 2초 후에 차를 출발시키는 실수를 범했다. 경주 거리가 400 미터 일 때 누구의 차가 더 일찍 도착하겠는가?

4. 그래픽 테크놀러지로 하는 활동

① 그래픽 테크놀러지의 [MODE]에서 Function으로 바꾸어 놓자.

지은이와 다은이의 차의 속도와 시간과의 관계식을 만들어 보고 그래픽 계산기에 그 식을 입력하여 그래프를 그려보아라. 위 상황과 적합한지 확인하고 오류를 발견하면 시정해 보아라.





두 그래프의 교점의 의미는 무엇일까?

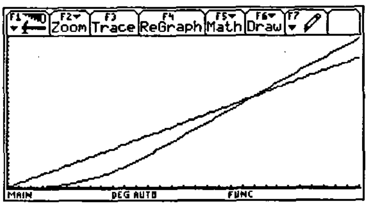
지은이와 다은이의 차의 속도를 변화시켜 가면서 교점의 변화를 살펴보면서 교점의 의미를 생각해본다.

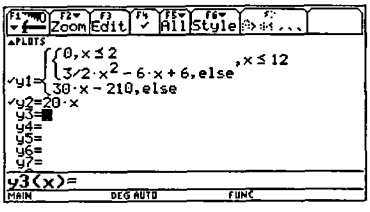
② 경주 거리가 400 미터 일 때 누구의 차가 더 일찍 도착하게 될까?

위 그래프의 아래 면적은 속도와 시간의 곱 즉 이동거리라는 것을 발견하게 유도한다. 20초 동안 다은이의 차의 그래프 아래 면적은 400이므로 20초에 도착할 수 있다. 출발 신호 후 12초 동안 지은이의 차의 그래프 아래 면적은 150이므로 150 미터를 이동했고, 250미터를 더 이동하기 위해 그래프 아래 면적이 250 이 되는 시간을 찾는다. 그러므로 총 이동시간은 $12+\frac{25}{3}=\frac{61}{3}$가 소요되어 다은이의 차가 먼저 들어온다.

③ 자동차의 경주 거리와 시간과의 관계 그래프를 그려보아라.

두 그래프의 교점의 의미는 무엇이 될까?





지은이와 다은이의 차의 속도를 변화시켜 가면서 교점의 변화를 살펴보면서 교점의 의미와 그래프 아래 면적의 변화를 생각해본다.

자동차의 속도를 적분하면 이동거리가 됨을 알고 차의 속도를 시간의 함수로 구한 후에 적분하여 이동거리를 구한다.

지은이의 차:

2-12초 동안의 속도 V=3t-6 ⇒ 이동거리 S= $\frac{3}{2}t^2-6t+6$

12-22초 동안의 속도 V=30 ⇒ 이동거리 S=30t-210

다은이의 차 : 속도 V=20 ⇒ 이동거리 S=20t

④ 경주 거리와 시간과의 관계 그래프에서 지은이의 속도가 다은이의 속도와 같아지는 시간이 있는지를 살펴보고 있다면 몇 초 때인지 구해보아라.

두 점에서의 평균변화율이 한 점에서의 순간 변화율과 같은 지점이 존재한다는 평균값 정리를 학습하게 된다.

V=3t-6과 V=20 이 같아지는 시간이 존재한다.

이 문제는 변화량(속도)이 누적되어 어떻게 전체적인 변화를 가져오게 하고 위치를 바꾸게 하는지에 대한 학생들의 이해를 설명할 수 있는 문제이다. 형식적 형태로 보면 적분 개념이 도입되고 역인 도함수 개념 즉 변화의 속도 개념이 구체적 상황에서 주어져 행동 중에 학습할 수 있게 된다. 대수와 미적분 사이의 전통적 필수 관계를 변 화시켜 미적분의 중요 아이디어를 지도할 수 있다.

Simcalc Project (http://www.SimCalc)에서 개발한 교육과정 자료와 테크놀러지는 이러한 학습을 보다 구체적으로 펼치고 있다. Simcalc's Math world software에서의 엘리베이터 문제는 학생들이 다양한 표현을 역동적으로 연계하게 해 주어 위치에 따라 속도 변화 그래프의 효과를 직접 관찰 가능하게 해 준다. 선험지식에 기초해 속도 함수를 그리고 그래프 아래 면적이 이동 거리라는 것을 발견하게 한다. 속도를 변화시켜보아 시간과 속도 사이의 관계를 세우게 한다. 학생들이 처음에는 등속과 구간별 등속으로 속도, 거리, 관계에서 시작하고 미적분 개념을 사용해 확장해 나간다. 속도, 비, 비율, 기울기, 기하학적 도형의 넓이 등의 개념이 학습되고 동기화되고 상황화 될 수 있다. 또한 테크놀러지를 이용해 가상적 자료와 실제 자료를 비교하고 구별하는 새로운 발견을 하고 미적분의 형식적 기법을 학습하는 것이 아니라 운동의 수학, 역동적 수학을 학습할 수 있다. 다음과 같이 네 가지 관점에서 학습 효과를 정리해 볼 수 있다.

첫째, 이동거리와 속도 사이의 관계를 학습할 수 있다.

속도와 시간의 관계 그래프가 이동거리와 시간의 관계그래프를 결정할 수 있음을 발견한다. 차의 출발 시각이 변할 때, 차의 속도가 변할 때 등 조건을 다양하게 변화시켜 그래프를 보고 의미를 탐구한다.

둘째, 시뮬레이션의 탐구적 역할을 학습할 수 있다.

다양한 그래프를 만들고 자신의 가설을 시험해 볼 수 있다. 시뮬레이션으로부터의 시각적 피드백은 학생이 실시간에서 그래프와 상호 작용적 경험을 하게 해 주고 속도와 거리가 시간에 따라 변화하는 것을 시각화해서 역동적인 학습을 가능하게 한다. 학생들의 물리적 경험에 기반을 둔 실제 데이터로 조작 가능한 운동 시뮬레이션은 변화의 수학을 학습하게 하고 다음 세기에 필요한 새 수학을 위한 효율성을 제공한다.

셋째, 다양하게 연계된 표현체계를 학습할 수 있다.

왜 그래프 아래의 면적이 이동 거리를 결정하는지 물을 때 학생들은 속도 증가율을 변화시켜 보거나 일정한 속도를 가지는 다른 상황의 그래프를 그려보아 이유를 찾는다. 또한 그렇게 함으로써 평균값 정리를 행동 중에 학습하게 된다. 즉 평균값 정리의 적용을 알게 된다. 다양하게 연계된 표현체계는 분리된 표현체계의 단점을 보완하여 교육적이고 개념적인 도구로서 작용할 수 있다.

넷째, 많은 다른 상황을 위한 은유 역할을 한다.

이 활동은 다른 유사한 비행기나 기차 등의 상황에서 문제를 주어 식으로 세우고 탐구하는 중에 개념 사이의 연결성을 발전할 수 있다. 다른 속도로 변하는 두 양을 가진 상황을 모델링하는 확고한 가상의 활동을 스스로 구성할 수 있다. 풍부한 상황화된 계산을 수행하고 형식 대수 교육 체계에 의해 중재된 이해를 수반해 비형식적 환경에서 개발된 이해를 통합한다.

Ⅳ. 결 론

Derive를 이용해서 CAS(Computer Algebra System)의 기능들 즉, 대수적 조작, 수적 문제 해결, 그래픽 기능이 가능한 수업 예시를 살펴보았다. 그리고 다른 일반 테크놀러지와는 달리 Derive는 학생들과 함께 어떤 시뮬레이션 과정이나 식, 그래프 등 테크놀러지로 하는 모든 활동을 공유하고 싶을 때 View Screen을 이용하여 교사나 학생이 직접 문제를 해결해 나가는 과정을 보여줄 수도 있어 적극적인 참여를 유도할 수 있고 명령어도 학생의 인지 상태와 모순을 일으키지 않는 학습한 수학 기호의 형태에 가깝다. 또한 교사가 학생들의 사고과정을 따라가면서 이에 대한 적절한 피드백을 바로 제공해 줄 수 있어 효과적이다.

전통 수학 수업에서 학생들은 확립된 형식주의 지향 교육과정을 경험해 와서 중요한 아이디어를 가지고 활동하는 것이 제한되었다. 과학 수업에서는 이론을 시험하기 위해, 또한 자신이 세운 가설을 확인하기 위해 탐구적 목적을 가진 실험 수업은 반드시 이론 수업과 함께 병행되어 왔다. 그러나 수학 수업은 이미 확립된 이론을 교사가 학생에게 전달하고 수동적 청취자인 학생은 교사가 전수해 주는 지식을 그대로 받아들이는 역할을 하는 수업이 이루어져 왔다.

이 글에서 고찰한 바와 같이 컴퓨터 기반 수업에서는 학생이 탐구를 통해 능동적 사고, 반성적 사

고에 참여할 수 있을 것은 분명하다. 수학학습과 교수에서 탐구적 접근이 가능하게 하는 가장 효과적 증폭자는 테크놀로지이다. 교육에서 상호작용이 가능한 컴퓨터 환경 내에서 실험적 활동을 하는 주된 목적은 분명 학습과정에서 학생들의 참여를 촉진하고, 깊은 수학적 탐구를 촉진하고, 수학적 아이디어를 가진 학생의 경험 영역을 확장시키고, 수학적 아이디어에 대한 개념적 이해와 직관을 개발시키는 것이다. 교사와 학생 모두 컴퓨터 기반 교육 환경이라는 새 문화 내에서 자신의 역할과 책임에 민감하고 주의한다면 이 탐구·실험적 수학 교육으로의 접근은 가능하리라 생각된다.

그러나 테크놀러지 탐구 수업에서는 탐구 방법에 대한 지식 부족에서 학생들이 어려움을 겪을 수 있다. 또한 동일한 탐구 과제도 많은 다양한 방향, 과제 검토를 위한 다른 접근과 전략, 다양한 이해와 발견을 이끌지도 모르기 때문에 교사는 학생에 대한 접근에 유연해야 하고 과제가 다뤄지는 방법에 한정된 제한을 두지 말아야 한다. 학생의 오개념, 잘못 구조화된 지식 기반을 만들 수 있는 잠재성 등을 고려해 교사의 중재자로서의 역할, 촉진자로서의 역할, 학생이 수행하는 활동에 참여자로서의 역할이 중요하다.

수학 교육자와 연구자는 컴퓨터 기반 활동이 학습자가 사고하고 추론하고 증명하고 자신을 수학학습자와 행위자로서 스스로 평가하는 풍부한 지적 환경을 제공하게 상호작용이 가능한 환경의 잠재성을 꾸준히 탐구해야 하며 컴퓨터가 학생의 학습과 수학의 이해를 강화시키기 위해 사용될 수 있는 방법을 발견하는 노력을 해야 한다고 본다. 좋은 분석적 수단, 좋은 그래픽 표현, 상호작용이 가능한 의미있는 학습이 일어나는 것을 보장하는 교육용 소프트웨어는 기호적 차원에서 수학이 표현되는 표현매체를 변화시키고, 상호작용이 가능한 차원에서 학습자와 과목, 주제사이에서 또한 학습자와 교사 사이에서의 관계를 변화시킬 것이다.

테크놀러지에 기반한 교과과정 재구조화로 강력하고 중요한 아이디어에 접근 가능하게 되고, 인간의 일상 경험에 기반을 둔 아이디어의 성장에 초점을 두고 형식주의 장벽을 부수고 언어적, 시각적, 인지적, 운동 감각적 능력을 개발하는 아이디어를 학습할 수 있고 표현할 수 있게 된다. 이렇게 19세기, 20세기 수학과는 다른 형태의 21세기 수학은 상호작용적이고 역동적인 매개체로 성장하리라 믿는다.

참 고 문 헌

권오남·김기연·김래영·박지연 (1997). 수학적 시각화를 위한 그래픽 컴퓨팅 테크놀러지의 활용방안, 대한수학교육학회 수학교육학 연구 발표대회 논문집, pp.293-318.

권오남·박경미 (1997). 그래픽 컴퓨팅 테크놀러지를 이용한 함수 지도에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> **36**, pp.36-48.

전영국 (1997). WWW와 Mathematica를 이용한 CAI개발, 대한수학교육학회 논문집 **7**, pp.281-292.

정상권·추상목 (1999). 수학교육에서의 Maple의 활용방안, 대한수학교육학회지 <학교수학> **1(1)**,

pp.157-185.

Balacheff, N., & Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environment in mathematics, In Bishop, A.J. et al(eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

Hoyles, C. (1991). Developing mathematical knowledge through microworlds, In Bischop, A.J. et al(eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers.

Janvier, C. (1987). Translation process in mathematics education, In Janvier, C(ed.), *Problem of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Kaput, J.J. (1985). Representation and problem solving; Methodolegical Issues Related to Modeling. In Silver, E. A(ed), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving*: Multiple Research Perspectives. Lawrence, Erlbaum associates publishers.

________ (1987). Toward a theory of symbol use in mathematics. In Janvier, C(ed.), *Problem of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, Nj: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

________ (1991). Notations and representation as mediators of constructive processes. In Von Glasersfeld, E(ed.), *Radical constructivism in mathematics education*. Kluwer Academic Publishers.

________ (1992). Technology and mathematics education. In Grouws, D.A(ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan publishing company.

________ (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In Biehler, R. et al(eds.), *Didactics of mathematics as a Scientific Discipline*. Kluwer Academic Publishers.

Monaghan, J. (1994). *New technology and mathematical educatrion: New Secondary Directions*. In Orton, A., & Wain, G(eds), Cassel.

Pomerantz, H. (1997). The role of calculators in math education. The Urban Systemic Initiative-Conprehensive Partnership for Mathematics and Science Achievement Superintendents Forum.

Roschelle, J. & Kaput, J. (1996). SimCalc matheworlds for the mathematics of change. *Communications of the ACM* **39(8)**, pp.97-99.

________ (1996). SimCalc: Accelerating students' engagement with the mathematics change and variation. To appear in M. Jacobson and R. Kozmaed. Learning the sciences of the 21 century: Research, design, and implementation of advanced technology learning environments. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (1988). Mathematics, technology, and higher order thinking. In Nickerson, R.S. & Zodhiates, P.P.(ed.), Lawrence, Erlbaum Associates Publisher.

Thompson, P.W. (1985). Computer research in mathematical problem solving. In Silver, E.A.(ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple Research Perspectives.* Lawrence, Erlbaum Associates Publisher.

http://www.derive

http://www.SimCalc