韓國數學教育學會誌 시리즈 E
<數學教育 論文集>
제 10집, 2000. 1. 143-154.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 10, Jan. 2000. 143-154.

삼각형 무게중심의 증명에 관한 다양한 접근 방법들

한 인 기 (한국교원대학교 수학교육연구소)
강 인 주 (대현중학교)

현재, 중학교에서 사용 가능한 수학 교과서는 8종류인데, 이처럼 다양한 종류의 교과서가 필요한 이유들 중의 하나는 수학적 개념이나 정리 등에 대한 다각적인 접근 방법들을 모색할 수 있는 가능성을 보장한다는 것이다. 그러나, 현재의 교과서들은, 예를 들어, 정리의 증명에 있어 비슷한 증명 방법을 제시하고 있기 때문에, 학습자들에게 수학에 대한 폭넓은 시각과 다양한 수학적 아이디어를 제공할 수 있는 기회를 효과적으로 살리지 못하고 있다.
본 연구에서는 평면 기하학의 중요한 정리들 중의 하나인 '삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 각각의 중선은 교점에 의해 2:1로 나뉜다'에 대한 다양한 증명들을 살펴보고, 각각의 증명들이 가지는 수학교육적 의의를 고찰할 것이다.

Ⅰ. 서 론

기하 영역은 학교 수학교육에서 중요한 역할을 차지하고 있다. 기하 영역의 지도를 통해 학생들의 공간 지각력을 개발・육성함은 물론, 학교 수학교육의 중요한 목표들 중의 하나인 논리적 사고력 신장이 다른 영역들보다 기하 영역에 보다 긴밀하게 관련된다. 이처럼 중요한 학교 기하교육은 어떻게 이루어져야 하는가? 라는 문제에 대해 많은 접근들이 시도되었고, 좀더 나은 방향을 모색하기 위한 연구들이 지금도 활발하게 진행되고 있다. 특히, 7차 교육과정에서는 수요자 중심의 교육, 즉 개별적 접근에 의한 교육이 커다란 이슈로 부각되고 있으며, 수학교육에서도 이에 상응하는 다양한 변화를 모색 중에 있다.

우리 나라는 현재 중학교에서 8종의 수학 교과서가 있다. 이처럼 다양한 교과서들을 제작하는 이유들 중의 하나는 수학 교육에서 다양성을 인정하기 때문일 것이다. 즉, 수학적 개념이나 문제들에 대한 다양한 접근, 그리고 다양한 학습 내용의 전개를 가능하게 하기 위한 것도 한 이유일 것이다.

이를 통해, 학습자들은 다양한 수학적 아이디어나 문제해결 방법들, 주어진 개념들에 대한 다양한 접근 방법들을 접할 수 있기 때문에, 학습자들은 폭넓은 수학적 경험을 가질 수 있고, 그리하여 자신의 수학적 재능이나 흥미를 개발・육성할 수 있는 기회를 가질 수 있을 것이다. 뿐만 아니라, 학생들은 다양한 접근 방법을 접함으로써, 수학적 사고 활동 과정에서 유창성을 활성화시키고, 이를 통해 창의적인 수학 교수-학습을 할 수 있을 것이다.

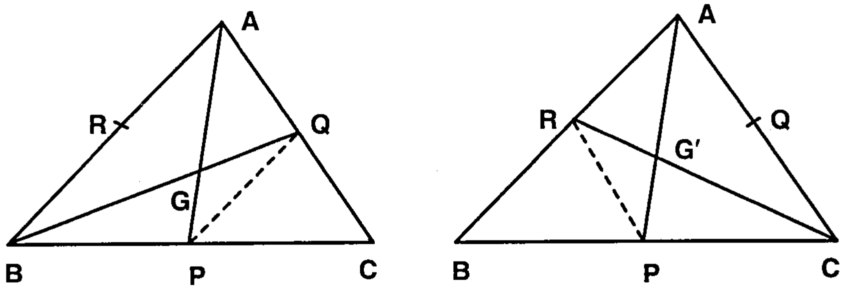
그런데, 교과서에 제시된 일부 내용에 대한 접근 방법을 살펴보면, 8종 교과서에 제시된 방법들이

모두 비슷한 수학적 아이디어를 사용하고 있다. 본 연구에서는 이처럼 비슷한 접근을 취하는 내용들 중에서 중요한 삼각형의 성질들 중의 하나인, '무게중심에 관한 정리', 즉 삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다는 정리에 대한 다양한 증명 방법들을 문헌 연구를 통해 살펴보고, 증명 방법들에 포함된 아이디어들에 대해 고찰할 것이다.

Ⅱ. 무게중심에 관한 정리의 다양한 증명들과 그 의의

우리 나라의 8종 교과서에 공통적으로 제시된 접근 방법을 소개하고, 외국의 다른 교과서들에 제시된 다양한 접근 방법들을 소개하기로 하자. 우선, 8종 교과서 모두에서 사용되는 증명의 아이디어는 다음과 같다:

△ABC에서 $\overline{BP} = \overline{PC}$, $\overline{AQ} = \overline{QC}$이므로, 삼각형의 중점 연결 정리에 의하여, $\overline{PQ} \,//\, \overline{AB}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. 이것에서, △GAB ∽ △GPQ. 또, △GAB와 △GPQ의 닮음비는 2:1. 따라서, G는 $\overline{AP}$를 2:1로 나눈다.



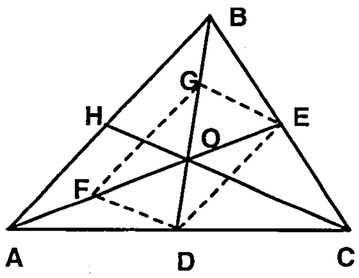
또, 중선 AP, CR의 교점을 G′이라고 하면, 위와 마찬가지 방법으로, G′은 $\overline{AP}$를 2:1로 나누는 점임을 알 수 있다. 따라서, G와 G′은 일치한다. 그러므로, △ABC의 세 중선은 한 점 G에서 만나고, G는 세 중선을 각각 2:1로 나눈다.

우리 나라의 8종 교과서 모두는 무게중심에 관한 정리를 증명하기 위한 도구로써, 닮음을 사용하고 있었다. 이제, 다른 증명의 방법들을 살펴보기로 하자.

1. 끼실료프 A.P.(1996)의 증명

"삼각형 ABC에서 점 O에서 교차하는 임의의 두 중선, 예를 들어 $\overline{AE}$와 $\overline{BD}$를 잡고, $\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{BD}$, $\overline{OE} = \frac{1}{3}\overline{AE}$를 증명하자. 이를 위해, $\overline{OA}$와 $\overline{OB}$를 점 F와 G에서 이등분하여, 사각형 DEGF를 작도하자.

직선 FG는 △ABO의 두 변의 중점을 연결하므로, $\overleftrightarrow{FG}$ // $\overline{AB}$, $\overline{FG}$ = $\frac{1}{2}\overline{AB}$. 직선 DE는 마찬가지로, △ABC의 두 변의 중점을 연결하므로, $\overleftrightarrow{DE}$ // $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ = $\frac{1}{2}\overline{AB}$. 이들로부터, $\overline{DE}$ // $\overline{FG}$, $\overline{DE}$ = $\overline{FG}$이고, 사각형 DEGF는 평행사변형이다. 그러므로, $\overline{OF}$ = $\overline{OE}$, $\overline{OG}$ = $\overline{OD}$. 이로부터, $\overline{OE}$ = $\frac{1}{3}\overline{AE}$이고, $\overline{OD}$ = $\frac{1}{3}\overline{BD}$이다.

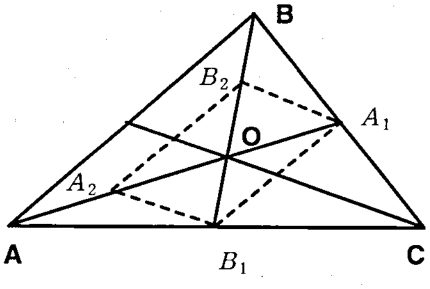


이제, 만약 세 번째 중선과 중선들 $\overline{AE}$, $\overline{BD}$들 중의 하나를 잡으면, 마찬가지로 이들의 교점은 각 중선들로부터 $\frac{1}{3}$이 되는 부분을 잘라낸다는 것을 증명할 수 있다. 즉, 세 번째 중선은 중선 $\overline{AE}$, $\overline{BD}$와 한 점 O에서 만나야 한다."

이 증명 과정에서는 증명의 기본 아이디어는 우리 나라의 교과서와 유사하다. 즉, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 우선 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 먼저 보이고, 중선이 분할된 비를 이용하여, 세 번째 중선이 그 교점을 지난다는 것을 증명하고 있다. 본 연구에서 살펴본 많은 증명들이 이러한 아이디어로 접근하고 있다.

2. 빠가렐로프 A.V.(1993)의 증명

"△ABC를 주어진 삼각형이라 하고, $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$을 삼각형의 두 중선이라 하자. 반직선 AA_1이 선분 BC와 만나므로, 반직선 AA_1은 중선 $\overline{BB_1}$과 만난다.



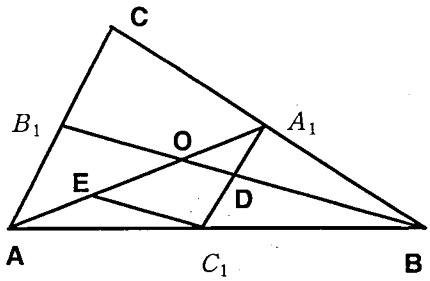
마찬가지로, 반직선 BB_1이 선분 AA_1과 만난다는 결론을 얻을 수 있다. 직선 BB_1과 AA_1은 오직 하나의 교점을 가질 수 있으며, 이 교점은 중선들 각각에 속한다. 즉, 중선들은 교차한다. 이제, O를 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{BB_1}$의 교점이라 하자.

삼각형 ABC의 중간선[1] $\overline{A_1B_1}$과 삼각형 AOB의 중간선 $\overline{A_2B_2}$를 작도하자. 이들 둘은 각각 변 AB와 평행하고, 이 변의 절반과 같다. 이로부터, 사각형 $A_1B_1A_2B_2$이 평행사변형이라는 것을 알 수 있다. 평행사변형의 성질에 의해, $\overline{B_1O}$ = $\overline{OB_2}$이고, 작도에 의해 $\overline{OB_2}$ = $\overline{B_2B}$이다. 이처럼, 중선 $\overline{AA_1}$은 중선 $\overline{BB_1}$을 2:1의 비로 나눈다. 점 C로부터 그은 중선은 중선 $\overline{BB_1}$을 마찬가지의 비로 나누므로, 이 중선은 점 O를 지난다."

이 증명 방법에서는 두 중선이 만난다는 것이 증명되어 있다는 점이 특이하다. 다른 증명 방법들에서는 두 중선이 만난다는 사실을 직관적으로 받아들이고, 이를 활용하여 증명을 전개하고 있다. 물론, 모든 학생들에게 두 중선이 교차한다는 사실이 의문점으로 여겨지지는 않겠지만, 교사나 일부 학생들에게, 이러한 직관적으로 명확한 사실에 대한 증명을 제공하는 것은 매우 의미있는 일이라 할 수 있다.

3. 부뚜조프 V.F. & 깔야긴 Yu.M. 외(1995)의 증명

"삼각형 ABC에서 점 A_1, B_1, C_1은 변 BC, CA, AB의 중점이다. 이때, 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{BB_1}$의 교점을 O라 하고, 점 D를 중선 $\overline{BB_1}$과 중간선 $\overline{A_1C_1}$의 교점, 또 점 E를 점 C_1을 지나 직선 BB_1과 평행인 직선과 중선 $\overline{AA_1}$의 교점이라고 하자.



이때, $\overline{DO}$ // $\overline{C_1E}$이므로, $\overline{A_1D}$ = $\overline{DC_1}$이고, $\overline{DO}$는 삼각형 A_1C_1E의 중간선이다(삼각형의 중간선에 관한 정리에 의해). 그러므로, $\overline{A_1O}$ = $\overline{OE}$.

1) 삼각형의 두 변의 중점을 연결한 선분을 **중간선**이라 하자.

마찬가지로, $\overline{C_1E}$는 삼각형 AOB의 중간선이고, 즉 $\overline{AE}$ = $\overline{OE}$. 등식 $\overline{A_1O}$ = $\overline{OE}$와 $\overline{AE}$ = $\overline{OE}$로부터, $\overline{AO}$ = 2 $\overline{OA_1}$, 즉 $\overline{AO} : \overline{OA_1}$ = 2 : 1이다.

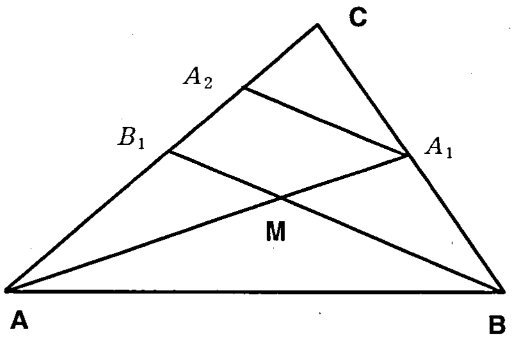
결국, 우리는 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{BB_1}$의 교점 O가 중선 $\overline{AA_1}$을 삼각형의 꼭지점으로부터 2:1로 나눈다는 것을 증명하였다. 마찬가지로, 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{CC_1}$의 교점이 중선 $\overline{AA_1}$을 같은 비로 나눈다는 것이 증명된다. 결국, 이 점은 점 O와 일치된다.

이처럼, 삼각형 ABC의 세 중선은 한 점(점 O)에서 만난다. 중선 $\overline{AA_1}$에 대해서 증명했던 것처럼, 점 O가 중선 $\overline{BB_1}$과 $\overline{CC_1}$ 각각을 꼭지점으로부터 2:1로 나눈다는 것을 증명할 수 있다."

이 증명 과정에서 보조선 $\overline{A_1C_1}$의 작도, 점 E의 설정, 보조선 $\overline{C_1E}$의 작도는 매우 인위적이어서, 학습자들이 증명의 아이디어를 파악하기 어렵다.

4. 프라솔로프 V.V. & 샤리긴 I.F.(1991)의 증명

"삼각형의 중선들이 한 점에서 만난다는 것을 증명하자. 이를 위해, 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{BB_1}$이 교차하는 점 M을 생각하자. $\triangle BB_1C$에 $\overline{BB_1}$과 평행한 중간선 $\overline{A_1A_2}$를 긋자. 그러면, $\overline{A_1M} : \overline{AM}$ = $\overline{B_1A_2} : \overline{AB_1}$ = $\overline{B_1A_2} : \overline{B_1C}$ = $\overline{BA_1} : \overline{BC}$ = 1 : 2. 즉, 중선 $\overline{BB_1}$과 $\overline{AA_1}$의 교점은 중선 $\overline{AA_1}$을 1 : 2의 비로 나눈다.



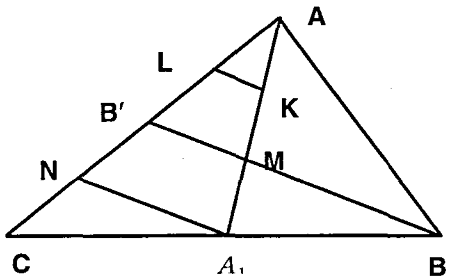
마찬가지로, 중선 $\overline{CC_1}$과 $\overline{AA_1}$의 교점은 중선 $\overline{AA_1}$을 1 : 2의 비로 나눈다. 결국, 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{BB_1}$의 교점은 중선 $\overline{AA_1}$과 $\overline{CC_1}$의 교점과 일치한다."

이 증명은 증명 과정이 끝까지 명확하게 진술되고 있지 않다. 즉, 증명의 마지막 부분이 삼각형의 두 중선들의 교점이 일치한다로 되어 있는데, 이것이 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나는 것과 어

떤 관계가 있는지에 대한 명확한 진술이 제시되어 있지 않다. 이것을 다시 말하면, 증명의 아이디어 자체가 증명에 명확하게 기술되지 않았다고 할 수 있다.

5. 두브로프스키 V.(1978)의 증명

"△ABC에서 $\overline{AA_1}$은 중선이고, M은 $\overline{AB}$을 2:1로 나누는 점이라 하자. 한편, K를 선분 AM의 중점이라 하고, B′을 직선 BM과 변 AC의 교점이라 하자. 이제, $\overline{AB'} = \overline{B'C}$를 증명하면 된다. 점 K와 A_1을 지나 직선 BM과 평행한 선분 KL과 A_1N을 작도하자.

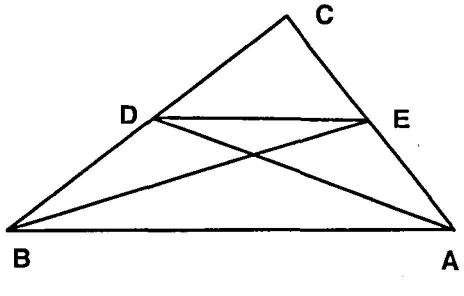


$\overline{AK} = \overline{KM} = \overline{MA_1}$이고, $\overline{CA_1} = \overline{A_1B}$이므로, 팔레스의 정리에 의해 $\overline{AL} = \overline{LB'} = \overline{B'N} = \overline{NC}$이다. 이로부터, $\overline{AB'} = \overline{B'C}$가 증명된다."

이 증명은 완전한 증명이라고 할 수 없으며, 단지 증명을 위한 기본 방향 및 아이디어만을 제시한 것이라 할 수 있다. 그리고, 증명 과정에서 $\overline{AA_1}$을 2:1로 나누는 점 M을 정하는 것, 그리고 $\overline{AM}$을 이등분하는 점 K를 잡는 것에 대한 근거 제시가 없다.

6. 샤리긴 I.F.(1996)의 증명

"삼각형 ABC에서 D, E는 선분 BC와 AC의 중점이다. 선분 AD와 BE의 교점을 M이라 하자.



$\overline{ED}$는 삼각형 ABC의 중간선이므로, 중간선의 성질에 의해 삼각형 ABM과 DEM은 닮음이고, 닮음 계수가 2이다($\frac{\overline{AB}}{DE}$ = 2).

이처럼, 임의의 두 중선의 교점은 각 중선을 2 : 1의 비로 나눈다($\frac{\overline{AM}}{MD}$ = $\frac{\overline{BM}}{ME}$ = $\frac{\overline{AB}}{DE}$ = 2). 이로부터, 삼각형의 세 중선은 한 점 M에서 만나야 한다(만약, 꼭지점 C로부터 중선을 그으면, 이 중선은 $\overline{AD}$를 2:1의 비로 나누고, 즉 점 M을 지난다)."

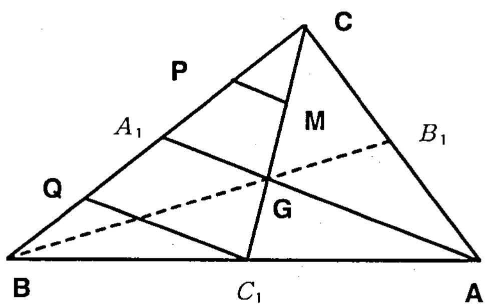
이 증명 방법은 우리 나라의 8종 교과서와 같이 닮음을 이용하고 있으며, 비교적 간단 명료하게 증명의 아이디어가 기술되어 있다. 이때, 학습자들이 보조선 $\overline{DE}$의 작도를 발견할 수 있도록 어떻게 도와줄 것인가의 문제가 남아있게 된다.

참고로, 러시아에서는 닮음을 이용한 증명을 드물게 제시하는데, 그 이유는 삼각형의 닮음은 9학년에서 배우고, 합동은 7학년에서 배운다. 즉, 합동을 이용하여 삼각형의 무게중심에 관한 정리를 증명하게 되면, 다른 단원에서 이 정리를 이용하여 많은 삼각형의 성질들을 탐구할 수 있는 기회를 제공할 수 있지만, 9학년의 닮음 단원에서 닮음을 이용하여 이 정리를 증명하면, 10학년이 되는데 10학년에서는 공간 논증기하를 배우기 때문에, 그러한 기회를 충분히 가지기 어렵기 때문이다.

그래서, 앞에서 제시했던 많은 증명 방법들은 팔레스의 정리나 삼각형의 중점 연결 정리 등을 이용하여 무게중심에 관한 정리를 증명하였는데, 이 정리들은 모두 삼각형 합동의 성질들과 사각형들을 이용하여 증명이 가능하다.

7. 파나린 Ya.P.(1997)의 증명

"중선 $\overline{CC_1}$을 점 M, G에 의해 3등분하고($\overline{CM}$ = $\overline{MG}$ = $\overline{GC_1}$), 직선 AG를 긋자. 그리고, 이 직선에 평행하고, 변 BC와 각각 점 A_1, P, Q에서 만나는 직선 MP, C_1Q를 긋자.



팔레스의 정리에 의해, 변 BC는 점 Q, A_1, P에 의해 4등분 되었다. 결국, A_1은 변 BC의 중점이

다. 마찬가지로, 직선 BG는 선분 AC와 중점 B_1에서 만난다. $\overline{PM}$은 삼각형 A_1GC의 중선이고, $\overline{QC_1}$은 삼각형 ABA_1의 중선이므로,

$$\frac{\overline{AA_1}}{\overline{GA_1}} = \frac{2\overline{QC_1}}{2\overline{PM}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{CM}} = 3.$$

이로부터, $\overline{AG} : \overline{GA_1} = 2$이고, 마찬가지로 $\overline{BG} : \overline{GB_1} = 2$이다."

이 증명은 증명의 아이디어가 조직화되지 않았다. 즉, 증명 과정을 읽으면서도 학습자들은 왜 그런 과정이 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하는데 필요한지에 대해 명확하게 인식할 수 없다.

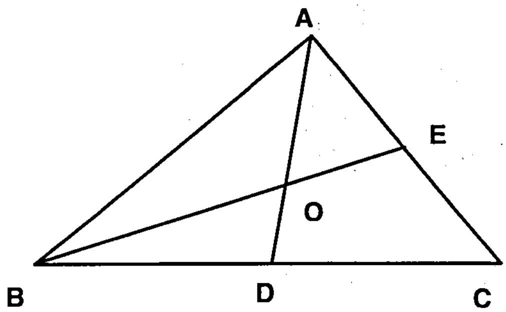
살펴본 8종 교과서에서의 증명과 다른 일곱 가지의 증명들은 모두 다음과 같은 접근 방식을 취하고 있다는 점에서 공통점이 있다: 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 첫째, 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하고, 둘째, 나머지 세 번째 중선이 중선의 교점을 지난다는 것을 증명하였다.

학생들은 이러한 접근 방법에 대해 어려움이 발생할 수 있다. 왜냐 하면, 교과서에 무게중심에 관한 정리는 "삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다"고 기술되어 있기 때문에, 증명 과정에서 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 만난다는 생각을 해 낸다는 것은 자연스러운 아이디어의 전개가 되지 못한다.

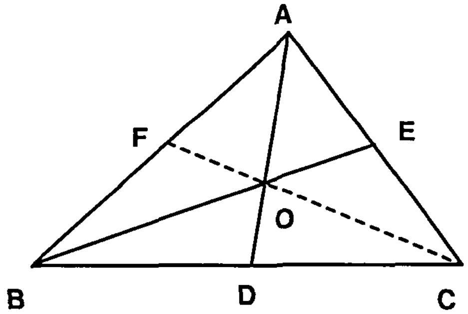
본 논문에서는 삼각형의 중선에 관한 정리에 대한 새로운 접근 방법, 즉 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 먼저 증명하고, 이를 이용하여 그 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명할 것이다.

이제, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하자. 물론, 삼각형의 두 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명해야 한다. 이 증명은 빠가렐로프의 증명 과정이나, 한인기의 연구(1999)에 그 방법이 소개되어 있으므로, 본 연구에서는 생략하기로 하자.

이제, 삼각형 ABC에서 점 O에서 만나는 두 중선 $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$을 작도하였다고 하자.



세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해선 무엇을 증명해야 할까? 이를 위해, 가능한 방법들 중의 하나는, 세 번째 중선이 두 중선의 교점 O를 지난다는 것을 증명하면 된다. 즉, $\overline{BF} = \overline{AF}$를 증명하면 된다.



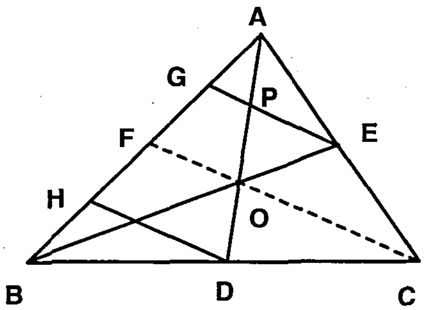
증명 과정에서 얻어진 수학적 아이디어를 기술하면 다음과 같다:

1. △ABC
2. $\overline{AD}$, $\overline{BE}$: △ABC의 중선
3. O: 두 중선 $\overline{AD}$와 $\overline{BE}$의 교점
4. $\overline{CF}$: 두 점 C와 O를 지나는 선분

주어진 것

5. $\overline{BF} = \overline{AF}$ (증명할 것)

이제, $\overline{BF} = \overline{AF}$를 증명하기 위해 무엇을 증명해야 하는가? 이 물음에 달리 접근하면, 즉 $\overline{BF}$와 $\overline{AF}$에 대해서 무엇을 알 수 있는가? 만약, $\overline{CF}$에 평행하고, 점 D와 E를 지나는 직선을 각각 그으면, 점 E와 D는 각각 중점들이므로, 탈레스의 정리에 의해, $\overline{AG} = \overline{GF}$, $\overline{BH} = \overline{HF}$를 얻을 수 있다($\overline{AP} = \overline{PO}$도 얻을 수 있다). 이제, (5)를 증명하기 위해, 예를 들어 $\overline{GF} = \overline{HF}$, 또는 $\overline{PO} = \overline{OD}$를 증명하면 된다.



6. $\overline{CF}$에 평행하고, 점 D와 E를 지나는 선분 $\overline{EG}$와 $\overline{DH}$을 긋자(보조선)

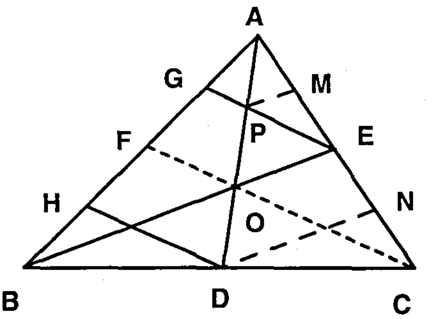
7. $\overline{AG} = \overline{GF}$, $\overline{BH} = \overline{HF}$ (2, 6, 팔레스의 정리)

8. $\overline{AP} = \overline{PO}$ (7, 팔레스의 정리)

9. $\overline{GF} = \overline{HF}$ (5, 7, 증명할 것)

10. $\overline{PO} = \overline{OD}$ (9, 증명할 것)

이제, $\overline{PO}$와 $\overline{OD}$에 대해서 무엇을 알고 있는가 생각해 보자. 점 D는 선분 BC의 중점이고, P는 선분 AO의 중점이다. 이로부터, 우리는 흥미있는 수학적 아이디어를 생각해 낼 수 있다(이 아이디어는 다른 문제들을 푸는 과정에서 준비[2]될 수 있으며, 물론 또 다른 어려운 문제를 해결하는 기본 아이디어를 제공해 주기도 한다). 즉, 점 D를 지나, 점 P를 지나 선분 BE와 평행인 선분 $\overline{DN}$과 $\overline{PM}$을 그으면, 선분 AE와 CE를 각각 이등분하게 된다. 게다가, 점 E가 선분 AC의 중점인 것을 감안하면, 점 M, E, N에 선분 AC는 4등분된다. 이로부터, $\overline{PO} = \overline{OD}$이 증명된다.

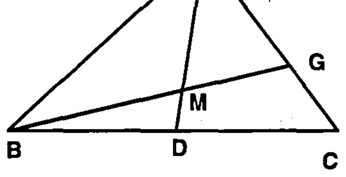


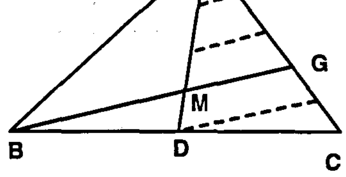
11. 점 D를 지나, 점 P를 지나 선분 BE와 평행인 선분 $\overline{DN}$과 $\overline{PM}$을 긋자(보조선)

12. $\overline{AM} = \overline{ME}$, $\overline{EN} = \overline{NC}$ (2, 8, 10, 11, 팔레스의 정리)

13. $\overline{AM} = \overline{ME} = \overline{EN} = \overline{NC}$ (2, 12)

2) 다음과 같은 문제를 통해서 관련된 수학적 아이디어를 준비할 수 있다: "점 M이 삼각형 ABC의 중선 AD를 꼭지점 A로부터 3:1로 나눈다고 한다. 이때, 직선 BM은 선분 AC를 어떤 비로 나누는가?"
참고. 문제의 주어진 조건에서 우리는 첫 번째 그림을 얻을 수 있으며, 두 번째 그림과 같은 보조선을 이용하여, 우리는 주어진 문제에 대한 해를 얻을 수 있다.





10. $\overline{PO} = \overline{OD}$ (13, 팔레스의 정리)

한편, $\overline{AP} = \overline{PO} = \overline{OD}$이므로, 중선의 교점 O는 중선 AD를 2:1로 나눈다는 것을 알 수 있다. 나머지 중선들에 대해서도 마찬가지 방법으로, 교점 O가 각 중선들을 2:1로 나눈다는 것을 증명할 수 있다.

Ⅲ. 결 론

본 연구에서는 평면 기하학의 중요한 정리들 중의 하나인 삼각형의 무게중심에 관한 정리, 즉 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만나고, 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다는 정리에 대한 우리 나라의 8종 교과서에 소개된 접근 방법과 러시아의 다양한 교과서 및 논문들에 제시된 접근 방법들을 상세히 기술하고, 그 증명 과정에 사용된 수학적 아이디어나 접근들을 분석적으로 고찰하였다.

살펴본 증명 방법들의 기본적인 접근 방법을 살펴보면, 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 증명하기 위해, 첫째, 두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하고, 둘째, 나머지 세 번째 중선이 중선의 교점을 지난다는 것을 증명하였다.

이러한 접근 방법은 자연스럽지 못할 수가 있다. 그 이유는 수학 교과서 자체에 무게중심에 관한 정리는 "삼각형의 세 중선은 한 점에서 만나고, 그 교점은 각 중선을 2:1로 나눈다"고 기술되어 있기 때문에, 증명 과정에서 '두 중선의 교점이 각 중선을 2:1로 만난다'는 것을 먼저 증명한다는 생각을 하는 것은 매우 어렵기 때문이다.

따라서, 본 논문에서는 삼각형의 중선에 관한 정리에 대한 새로운 접근 방법, 즉 삼각형의 세 중선이 한 점에서 만난다는 것을 먼저 증명하고, 이를 이용하여 그 교점이 각 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명하였다.

한 가지 흥미로운 사실은 러시아의 대부분의 교과서들에서는 삼각형의 무게중심에 관한 정리를 팔레스의 정리와 삼각형의 중점 연결 정리를 이용하고 있지만, 우리 나라의 8종 교과서 모두는 닮음을 이용하고 있다는 것이다. 그 이유는 기하학적 학습 내용 전개의 순서에서 찾아볼 수 있다. 러시아의 교과서들은 7학년에서 삼각형의 합동을 증명하고, 이를 이용하여, 8학년에서 팔레스의 정리와 삼각형의 중점 연결 정리를 증명한 후에, 9학년에서 닮음 조건들을 증명하고 있다. 그러나, 우리 나라의 교과서에서는 닮음 조건을 증명없이 제시한 후에, 이를 이용하여 팔레스의 정리나 삼각형의 중점 연결 정리를 제시하고 있다.

참 고 문 헌

한인기 (1999). 평면기하학의 기초, 청주: 협신사.

<<러시아어 문헌>>

끼실료프 A.P. (1996). *기하학 기초*, 모스크바: “교육”출판사.

두브로프스키 V. (1978). 중선에 관한 여섯 가지 증명, *끄반트* 4.

부뚜조프 V.F.; 깔야긴 Yu.M.; 시도로프 Yu.V. & 표드로바 N.E. (1995). *7학년 보충 학습 자료*, 모스크바: 발렌트.

빠가렐로프 A.V. (1993). *기하학*, 모스크바: “교육”출판사.

샤리긴 I.F. (1996). *기하학 8*, 모스크바: ROST.

파나린 Ya.P. (1997). *기하학*, 로스토프 나 돈: 펠릭스.

프라솔로프 V.V. & 샤리긴 I.F. (1991). *수학 심화 선택 교과*, 모스크바: “교육”출판사.