

## 수학 응용소프트웨어를 활용한 효과적인 이차곡선의 지도방안

김 한 희 (부산여자고등학교)

박 일 영 (부산과학고등학교)

박 용 범 (부경대학교)

현행 교육과정에서는 서로 만나는 두 직선의 들레로 회전하여 얻는 곡면 즉 직원뿔을 꼭지점을 지나지 않는 평면으로 잘라 만들어지는 원추곡선 중에서 원을 제외한 포물선, 타원, 쌍곡선에 대한 시각적 직관적 개념 형성 지도가 미흡한 실정이다.

이에 시각적, 직관적 개념 형성에 적합한 상황과 대상을 제공할 수 있는 컴퓨터 응용소프트웨어를 이용하여 이차곡선을 도입하고 Computer Algebra System을 적용한 MathView<sup>1)</sup>를 이용하여 포물선, 타원, 쌍곡선 방정식의 개념 지도 방안을 구안하였다.

### I. 연구목적 및 필요성

산업화 사회에서 요구되었던 지식과 기능의 연마를 목적으로 한 지식의 암기와 축적의 방법으로 는 정보화 사회에서 필요한 다양한 지식과 기능을 종합, 분석, 비판하고 추론하는 창의적이고 능동적 이며 자주적인 사람의 육성을 도모할 수 없다고 본다. 수학교육의 목표가 구체적 경험에 근거하여 현상을 수학적으로 해석·조직하는 활동과 직관·구체적 조작 활동에 바탕을 둔 통찰 등의 수학적 경험을 통하여 형식이나 관계를 발견하고, 수학적 개념 원리 법칙 등을 이해하도록 지도하는 데 있으나, 많은 부분에서 학습자의 구체적 조작을 통한 능동적인 학습보다는 인지적 활동을 중심으로 하는 교사 중심적 수업에 주로 의존하고 있다. 이에 학생들에게 수학의 가치에 대한 이해와 신념, 태도의 개선을 도모하고 나아가 능동적인 학습자로 만들어 나가기 위한 수학 교수·학습 방법의 개선 노력이 요구된다. 즉, 학생들은 스스로 관찰하고 추론하는 탐구 과정을 수행하고, 교사는 학생들의 사고 과정을 관찰 분석하여 오류를 반성하게 하고, 반영적 추상화 과정을 통해 새로운 지식을 구성해 나갈 수 있도록 해야 한다.

교육공학적인 측면에서 학생들이 흥미를 가지고 적극적으로 참여할 수 있는 교수·학습 방법으로 수학 교육용 응용 소프트웨어의 활용을 들 수 있다. 수학 교육용 소프트웨어를 활용함으로써 이해하기 힘든 수학적 개념을 시각적·직관적으로 표현하고, 조작 과정에서 다양하고 새로운 경험을 제공 받아 창의적이고 자율적인 문제 해결 능력을 신장시킬 수 있음에 대부분 동의하고 있다. 특히, 기하

1) Waterloo Maple 사의 등록 상표임.

교육용 응용 소프트웨어들은 학생들이 컴퓨터를 마음대로 조작하는 탐구 활동을 통하여 개념적 이해나 추론을 하기 전에 기하학적 대상들 사이의 관계를 직관적으로 파악할 수 있는 장점을 가지고 있다. 이러한 교육공학 매체들의 활용에는 학생들의 다양한 사고 과정과 학습 요소가 연계된 교수·학습 모델이 필요하다. 그리고, 교육 매체들의 유기적인 연결과 교사와 학습자 사이의 상호작용을 성공적으로 이행하기 위해서 수학적 사고와 창의력 배양을 위한 상호작용적인 교재의 구성이 요구되고 학습자 스스로가 학습 내용에 대하여 능동적이고 적극적인 태도로 수학적 개념을 찾아가도록 하는 '학습수행지(Work-Sheet)'가 필요하다.

본 연구의 적용 단원인 이차곡선의 지도는 공통수학에서 학습한 도형의 방정식을 바탕으로 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식을 알아보고 활용할 수 있게 하고, 이차곡선을 통하여 도형의 방정식과 관련된 문제를 해결할 수 있도록 지도하는 것을 목표로 설정하고 있다. 그러나 현행 교육과정에서는 포물선, 타원, 쌍곡선 등의 이차곡선에 대하여 기본 작도 개념을 지도가 이루어지지 않고 있으며 단순한 정의의 암기와 형식적 일반화로 시각적 직관적 개념 형성 지도가 미흡한 실정이다.

기하교육은 논리적 사고력을 발달시키고 실세계의 공간에 대한 직관력을 발달시키기 위한 것으로서 수학적 사고력을 길러주는데 중요한 역할을 해 왔다(Geddes·Fortunato, 1993). 기하교육의 주된 목적 중 하나는 기하학적 직관 능력과 논리적인 추론 능력의 향상이다. 분석적인 지적 과정에 의존함이 없이 문제의 의미, 의의 구조를 곧바로 파악하는 직관적인 사고는 날카로운 추측, 의미심장한 가설, 잠정적인 결론으로의 과감한 도약과 같이 생산적인 사고의 중요한 일면이다(우정호, 1998). 직관과 관련된 시각적인 요소는 기하의 교수 학습에서 중요한 역할을 한다. 그러므로 기하 교수학습을 위해 고안된 탐구형 소프트웨어의 시각적 요소에 대한 동적인 조작 가능성은 기하교육에 많은 영향을 줄 수밖에 없다(류희찬·유공주·조민식, 1999).

본 연구에서는 이차곡선의 기하적 구조 이해력을 높이고, 이해력과 응용력의 신장을 도모하여, 수학 학습에의 흥미와 자신감을 유발시킬 수 있도록 컴퓨터 응용 소프트웨어(Cabri Geometry II<sup>2</sup>), MathView)를 활용하여 기하적 해석적 성질의 지도 방법을 모색하고 이에 따른 교재의 재구성과 효과적인 지도 방법을 제안하고자 한다.

## II. 이론적 배경

### 1. 수학 교수·학습의 구성주의적 접근

수학적 사고는 직관과 추측으로부터 시작하여 추상화를 거쳐 정의와 증명에 이르는 활동 과정을 특징으로 하는 창의적 활동이라고 볼 때, 수학 학습도 이러한 과정을 거쳐 학습되어짐을 가정할 수 있다. 이를 바탕으로 오늘날 수학 교수·학습에서 학생 개개인이 가능한 한 스스로 지식 구조를 의

2) Texas instrument 사가 international dealer 임.

부적 강화가 아닌 학습자의 내적 세계에서 자주적으로 '구성'할 수 있게 해야 한다는 구성주의적 수학 교수·학습 이론이 주류를 이루고 있다. 지식 구성의 메커니즘에 대한 관점으로 Piaget의 발생적 인식론을 바탕으로 한 구성주의는 '지식의 자주적 구성', '지식의 성장 지향성', '지식의 사회적 구성'을 지식 구성의 원리로 보고 있다. 지식의 자주적 구성의 메커니즘에 주목하며, 경험의 추상화, 표상, 반성으로 이어지는 반영적 추상화를 중심 아이디어로 삼고 있다.

수학교육학적 구성주의의 원리로 '학생 중심적 개별화', '발문 중심적 상호작용', '의미 지향적 활동', '반영적 추상화'를 들 수 있다. 지식의 전달자에서 안내자로의 교사 역할 변화와 능력과 개성의 차를 고려하는 교수·학습, 교사의 계획되고 준비된 상호작용에 의한 발문, 상호 의견 교환과 합의 도출, 동화와 조절 등에 의한 내면화된 자주적 활동 등을 강조하고 있다. 그러나 지식이 학생에 의해 자주적으로 구성된다고 해서 그것이 결코 학생의 내면 세계에서 지식이 저절로 구성된다는 것을 의미하지는 않고 적절한 환경에서 교사의 안내 또는 도움을 받아 구성되어질 수 있는 것으로 보고 있다. 따라서 교사는 학생 스스로 지식을 구성해 나갈 수 있도록 환경을 만들며, 학생 개개인의 사고 과정을 면밀히 관찰·분석하고, 사고 과정에서 발생하는 여러 가지 오류를 반성할 수 있도록 하는 과정을 거쳐 학생 스스로 수학 지식을 자주적으로 구성할 수 있다(박영배, 1996).

구성주의 수학 수업은 학습자가 받아들이기 힘든 규칙을 암기시키거나 계산 알고리즘만을 강조하고 적용시키는 수업에서 벗어나 구체적 조작 활동과 조작의 과정에서 나타난 학생 스스로의 발견을 존중함으로써 사고 과정에 충실하게 된다. 교사는 학생들이 문제 의식을 갖고 반영적 추상화를 시도할 수 있게 환경을 조성하고, 학생간의 상호작용이 원활하게 이루어지도록 학습 상황을 조성하여 이를 통하여 구성활동이 일어나도록 유도하여야 한다.

## 2. 수학교육과 컴퓨터

NCTM의 학교수학의 원리와 규준(1998)에서는 수학 교수에 모든 학생들의 수학적 이해를 돕기 위해 공학을 사용해야하며, 점차 증가하고 있는 기술 세계에서 수학을 사용하도록 학생들을 준비시킬 것을 주장하고 있다. 이러한 공학은 주요한 수학적 아이디어의 이해와 더 깊이 있는 내용 탐구를 가능케 한다. 특히 기하의 상당부분은 활동을 통해, 물리적 모델, 그림, 역동적 소프트웨어를 도구로 하여 학습되어야 한다. 일상의 경험에 컴퓨터 애니메이션과 기술 공학적 환경의 상호작용이 학생들에게 시각화와 공간 추론을 촉진시키고, 이 경험들을 학교 기하와 연결시킴으로서 수학의 다른 영역의 문제해결에 중요한 도구를 획득할 수 있음을 강조하고 있다.

수학에서 컴퓨터는 새로운 직관과 이론의 발견에 기여하고 있을 뿐만 아니라 학습 과정에서 적당한 예와 반례를 쉽게 만들 수 있다는 유용한 점을 들 수 있다. 현행 교육과정과 새로운 교육과정에서도 복잡한 계산이나 문제해결력 향상을 위하여 계산기나 컴퓨터를 활용할 것을 권장하고 있다. 이제는 단순한 사용 제안의 단계를 넘어서 수학교육에 직관적 사고력과 통찰력을 기르는 것과 아이디

어의 탐구와 개념 발달에 적극 활용할 수 있는 환경을 조성하여야 할 때이다. 수학교육에 컴퓨터를 사용하는 것은 ‘도구로서 사용할 것인가’, ‘교사(tutor)’로서 또는 ‘학생(tutee)’으로서 사용할 것인가에 따라 각기 다른 의미를 갖고 있다. 또한 적절한 사용 환경과 준거를 고려하여 신중하게 접근하여야 할 것이다. Hade와 Baylor(1993)는 수학 학습에 컴퓨터를 도구로서 사용할 때, 그래핑 도구(Graphing Tool)는 학생들이 대수적 조작에 앞서 그래프 표현을 배울 수 있게 하고, 기호 연산 조작 도구(Symbolic Manipulation Tool)는 적은 시간에 더 많은 개념적 이해를 돕는다고 하였다. 또한 동적 기하 도구(Geometric Construction Tool)로 사용되었을 때 van Hiele 이론에 의거한 내용의 재구성 과 탐구 중심의 접근법으로 지도한 결과 일반화에 효과가 있음을 강조하였다.

앞으로 학생들에게 전반적으로 교실에서 학습 경험을 조직하는데 있어서, 테크놀러지는 효과적인 교수에서 핵심적인 요소가 될 것이다. 새로운 테크놀러지는 기존의 수학 학습에서 중시되는 표상들의 연결된 표현 체계를 갖추고 표현들 간의 개념적 연결을 가능하게 하며, 수학적 표현과 형상화에 대한 의미를 확장시킬 수 있도록 만든다(Kaput, 1998). 한편, 표상들 사이의 번역에서 발생하는 인지적 부담은 학생과 컴퓨터 사이의 인터페이스가 적절히 구성되어짐으로써 자연스럽게 해소될 수 있다고 본다.

‘수학 교수·학습에 어떤 컴퓨터 소프트웨어를 사용할 것인가’에 대한 논의를 살펴볼 필요가 있다. 수학 학습을 위한 소프트웨어는 하나를 변화시키면 이와 관련된 모든 것들이 동시에 변화되는 역동적인 매체이어야 하고, 상호작용이 가능하여야 하며 종래의 학습의 모든 경로가 프로그램에 미리 결정되어 있는 CAI 도구로서는 자기주도적인 열린 학습이 일어나기 힘들다고 지적하였다(장경운, 1995; 류희찬, 1998). 이런 점을 고려할 때 수학 교육용 소프트웨어의 활용 준거는 직관적으로 설명될 수 없는 문제제의 접근가능성, 학습자의 과정 수행 참여 가능성, 학습자의 실수나 의문에 즉각 답을 할 수 있는지 여부, 다음 단계로의 이행에 필요한 생각의 시작점 제공 여부, 복잡하고 동적인 문제로의 일반화 가능성 등을 들 수 있다(허만성, 1998). 따라서 수학 교육용 Math Engine은 CAS(Computer Algebra System)와 연동된 응용 프로그램을 사용하는 것이 교수·학습의 효율성을 높일 수 있다. 그리고 이러한 테크놀러지의 활용을 통한 수학 교수·학습에는 상호작용적인 교재로의 재구성이 필요하고, 교사-학생-컴퓨터 사이의 원활한 상호작용을 위한 학습수행지(Work-Sheet) 개발이 요구된다.

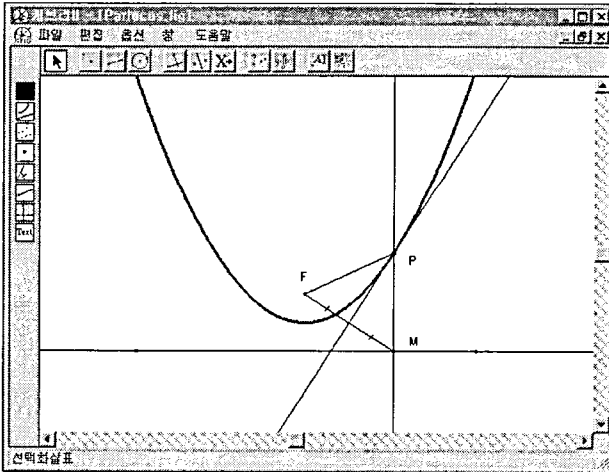
### 3. Cabri Geometry II와 MathView의 구조와 학습 환경

본 연구에서는 역동적 기하 소프트웨어인 Cabri Geometry II와 기호 연산 조작 프로그램(Symbolic Manipulation Program)인 MathView를 활용한 지도 방안을 구안하게 되었다.

#### 가. Cabri Geometry II의 특징

도형에 대한 학생들의 경험을 강화시킬 수 있는 역동적 기하소프트웨어로서 자(직선, 선분)와 컴

퍼스(윈) 만을 사용하는 작도와 측정을 통하여 학생들의 흥미를 자극할 수 있고 지필 환경에서 쉽지 않은 실험 활동을 통한 기하교육에 도움이 될 수 있다.

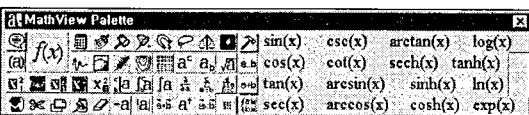


<그림 1> Cabri Geo. II를 이용한 작도 예

강화해 줄 수 있다.

이러한 소프트웨어를 활용한 조작과 실험은 수학 학습의 필수 요건인 수학적 다양성 체험과 반영적 추상화를 가능케 하고, 도형을 그 정의에 의하여 구현해 봄으로써 확실한 개념을 취득하여 그로부터 파생되는 도형의 성질을 자연스럽게 접근할 수 있다.

나. MathView의 기본 구조와 학습 환경



직관적 인터페이스 구성과 ‘Click and solve’ 방식으로 작동되어 조작이 쉽고 수식 입력과 연산을 손쉽게 사용할 수 있다. 재조작 실행으로 실시간에 연산 결과와 그래프를 연동시켜 변화를 관찰할 수 있고, Plug-Ins를 제공받아 Web Browser에서 학습할 수 있는 장점을 가지고 있다.

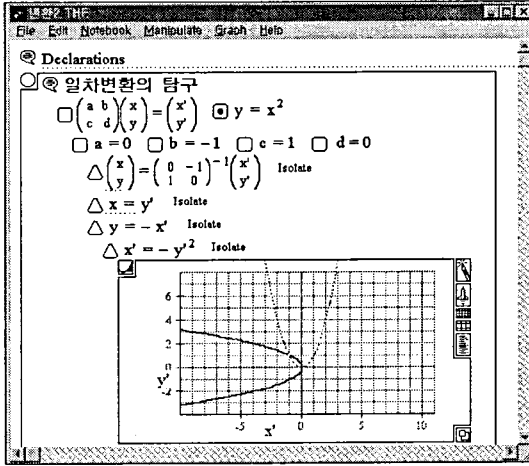
① Interactive Icon-based Interface : 수식 및 기호를 palette의 Icon을 사용하여 입력하고, 자체를 화면에 표시(real mathematical notation)한다.

② Symbolic Manipulation : 수치 연산을 포함한 기호 연산 조작이 Computer Algebra System을 응용한 Math Algorithm의 적용으로 문제 풀이 과정 및 결과를 추론한다.

③ Click and Solve 방식으로 직관적인 인터페이스 구성과 대상을 설정한 후 명령어 선택 방식으로 탐구 및 사고 활동을 수행할 수 있다.

④ Hand-Mouse Manipulation을 이용하여 수식을 이항하거나 정리할 수 있고, 변수나 수식의 대입

- ① 상호작용적인 해석기하, 변환기하, 유클리드 기하가 가능하다.
- ② 타원 쌍곡선 등의 원추곡선을 쉽게 지도할 수 있고, 사영기하와 쌍곡기하의 고급 개념을 탐구할 수 있다.
- ③ 직교좌표와 극좌표를 모두 사용할 수 있고, 기하학적 도형의 방정식을 구할 수 있다.
- ④ 자취의 표현과 Animation을 이용한 연속적인 변화의 관찰이 가능하다.
- ⑤ 매크로 기능을 이용하여 반복 작도가 가능하고 계산기와 표 그리고 측도 등의 각기 다른 표상들을 이용한 실험 활동을



<그림 2> MathView의 Notebook 구성

이 가능하다. 또, Proposition과 Theory의 위치를 바꾸어 수업 안을 작성할 수 있다.

⑤ Notebook <그림 2> : 하나의 notebook 안에 계산 명령과 텍스트를 함께 저장하여 단계별로 재현할 수 있으며, 학습자의 의도대로 자유롭게 실험하고 탐구하는 상호작용적인 수학교재(Interactive Mathematics Texts)를 작성할 수 있다.

### III. 학습지도 모형의 설계

본 장에서는 현 교육과정 고등학교 수학II의 '이차곡선'단원의 내용 중에서 포물선의 방정식, 타원의 방정식, 쌍곡선의 방정식에 대한 시각적 개념 형성과 도입 및 그들의 방정식을 유도하는 전개 수업 모형을 설계하였다. 여기서 제시하는 수업 지도 모형은 고등학교에서 직접 지도한 모델을 제시한 것이다.

이차곡선의 지도는 공통수학에서 학습한 도형의 방정식을 바탕으로 원추곡선인 포물선, 타원, 쌍곡선의 방정식을 알아보고 이차곡선 도형의 방정식과 관련된 문제를 해결할 수 있도록 지도하는 것을 목표로 삼고 있다. 이 단원은 추상성, 형식성, 논리성의 수학적 특성을 가지고 있어 단순한 암기와 형식적 일반화로는 개념 정립이 어렵다. 이에 본 연구에서는 이차곡선의 기하적 구조 이해력을 높이고, 이해력과 응용력 신장을 도모하여, 수학 학습에의 흥미와 자신감을 유발시킬 수 있도록 시각적·직관적 개념 형성에 적합한 Cabri Geometry II를 활용하여 이차곡선을 도입하였다. 내용 전개는 Computer Algebra System을 적용한 MathView를 활용하였다. 대수, 해석, 기하의 여러 표상을 연계한 지도 방법을 모색하기 위해 상호작용적 교재를 구성하고, 사고 과정과 개념 구성 단계에 맞춘 학습수행지(Work-Sheet)(부록)를 활용하였다.

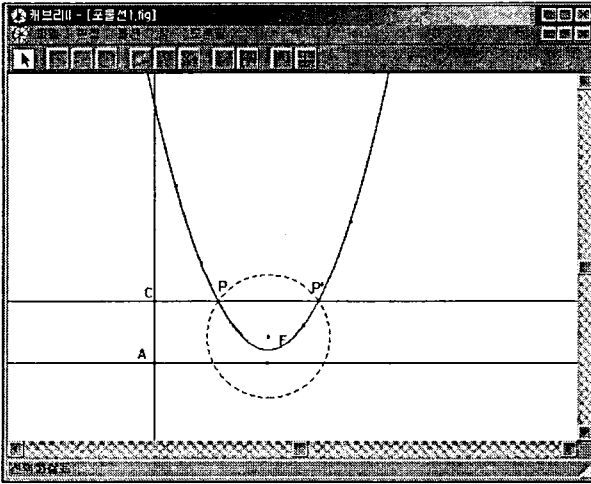
#### 1. 포물선(Parabola)의 방정식 탐구

##### 가. 도입

- (1) 정의 : 한 정점과 이 점을 지나지 않는 정직선에 이르는 거리가 같은 점의 자취.
- (2) 작도 지도 및 직관적 이해 : Cabri Geometry II를 활용한다.

##### [작도 1] <그림 3>

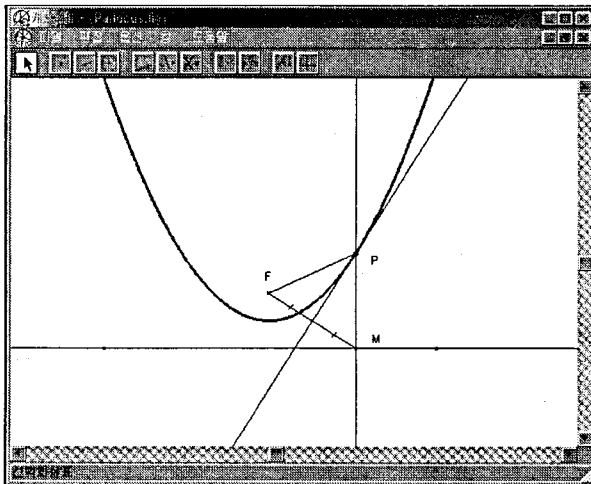
- ① Cabri Geo. II 화면에서 정점 F를 잡고, 정점을 지나지 않는 직선을 긋는다.



<그림 3> Cabri Geo. II에서의 포물선 [작도 1]

- ② 직선 L에 수직인 직선 H를 세우고 두 직선의 교점을 A라 한다.
- ③ 수선 H 위에 임의의 점 C를 잡아 이 점에서 직선 L에 평행인 직선 L'를 긋는다.
- ④ 선분 AC의 길이를 컴퍼스 도구를 이용하여 점 F를 중심으로 한 원을 작도한다.
- ⑤ 원과 직선 L'의 교점 P, P'를 자취그리기로 설정한 후 점 C를 움직여 변화를 관찰한다.
- ⑥ 자취그리기를 선택하여 교점 P와 C, P'와 C를 설정하여 자취를 그린 후 원추곡선 도구를 선택하여 자취 위의 임의의 다섯개 점을 잡아 포물선을 완성한다.

[작도 2]

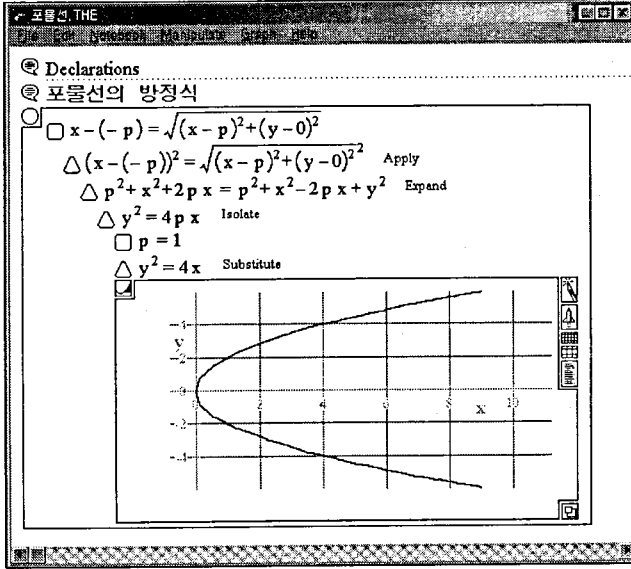


<그림 4> Cabri Geo. II 포물선 관찰 [작도 2]

- ① Cabri의 '포물선' 파일을 열어 직선 위의 점 M과 정점 F를 이은 선분의 수직이등분선을 긋는다.
- ② 직선 H와 수직이등분선의 교점을 P라 하고, 자취 그리기를 선택하여 점 P의 M에 대한 자취를 나타낸다.
- ③ 수직이등분선과 자취, 수직선의 상호 관계를 점 M을 움직여보며 관찰한다.(이등변 삼각형, 선분 PF의 길이와 선분 PM의 길이, 접점, 접선 등을 관찰한다.)
- ④ 꼭지점과 정점, 정직선의 관계를 알아본다.(초점과 준선을 정의한다.)
- ⑤ 이 도형과 이차함수의 그래프와의 관계를 알아본다.

나. 전개 : MathView 를 이용한 포물선의 방정식 유도

- ① 정점을  $(p, 0)$ , 정직선을  $x = -p$  ( $p > 0$ )라 잡는다. 자취의 점을  $(x, y)$ 라 하면, MathView를 실행하여 정점과 정직선 사이의 거리를 식으로 표현한다.

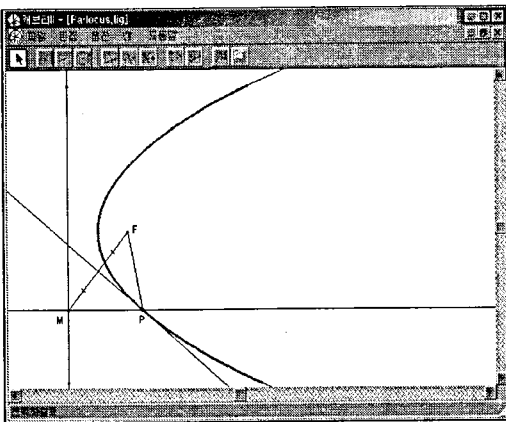


<그림 5> MathView를 이용한 포물선의 방정식 유도

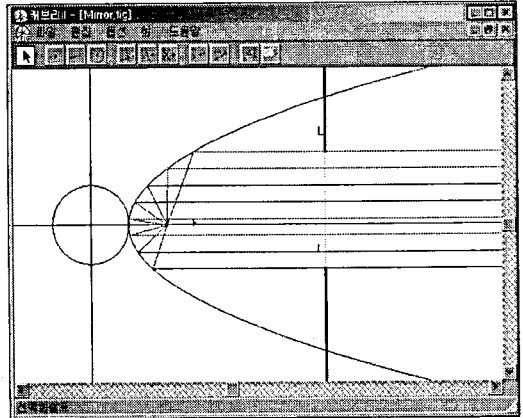
⑦ 관계식과 그래프를 관찰하고, 초점, 준선, 꼭지점을 구하여본다.

다. 정리·평가 및 개념 발전

- ① 포물선은 이차함수 그래프의 일반화임을 알고, 정점(초점) (0, p)과 정직선(준선)  $y = -p$ , 방정식  $y^2 = 4px$ , 꼭지점을 정리한다.
- ② 포물선의 활용 예제 파일 <그림 6>과 <그림 7>을 열어 확인하고, 이 도형의 성질을 토론한다.
- ③ 형성 평가 예제를 풀어보고, 정리와 학습 소감을 학습수행지에 기록한다.



<그림 6>



<그림 7> 곡면 거울

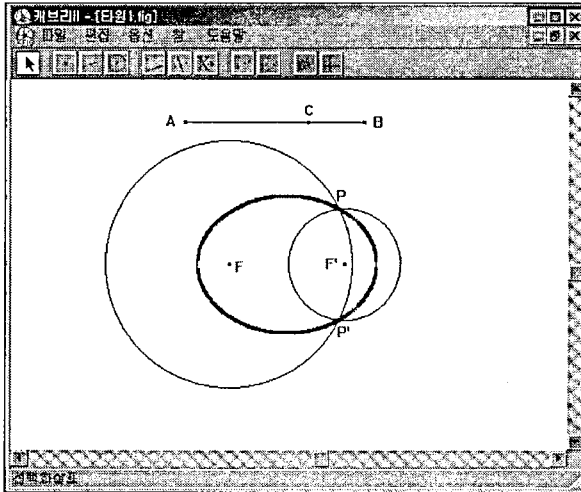
- ② 양변 제곱을 위해 Apply를 실행하여 제곱한 후 Expand와 Isolate를 차례로 실행하여 방정식을 구한다.
- ③ 식의 구성 과정을 살펴보고 방정식의 형태를 이해한다.
- ④ P의 값을 1로 잡아 마지막 명제에 대입하여 방정식을 구한다.
- ⑤ 방정식을 선택하여 Graph▶Other▶Implicit 메뉴를 click 하여 그래프를 그리고, 그래프 화면의 도구상자를 이용하여 세부 사항을 조정하여 완성된 그래프 형태를 구성한다.
- ⑥ P의 값을 자신의 생각대로 여러 가지 값을 입력하여 방정식과 그래프의 변화를 동시에 관찰한다.



2. 타원(Ellipse)의 방정식 탐구

가. 도입

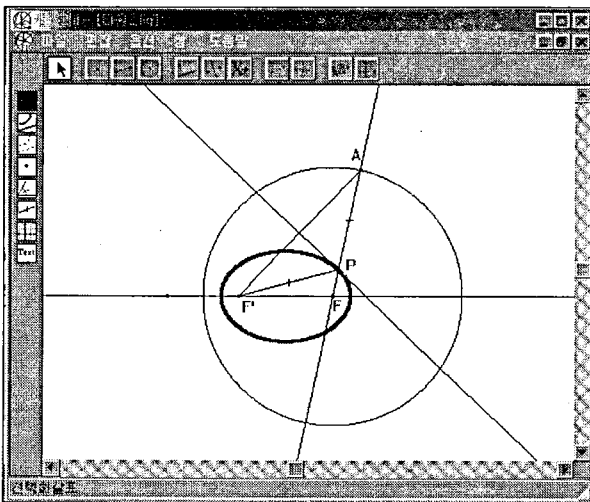
- (1) 정의 : 두 정점에서 거리의 합이 일정한 점들의 자취
- (2) 작도 지도 및 직관적 이해 : Cabri Geometry II를 활용한다.



<그림 8> Cabri Geo. II를 이용한 타원의 작도

[작도 1]

- ① Cabri 상에 선분 AB를 긋고 선분 위에 임의의 점 C를 잡는다.
- ② 평면 위에 두 점 F, F'를 잡고, 컴퍼스 도구를 선택하여 선분 AC와 선분 BC의 길이를 반지름으로 하는 원을 작도한다. (중심거리가 반지름의 합보다 작게 F와 F'를 잡는다.)
- ③ 두 원의 교점을 각 P, P'라하고 이를 자국그리기로 설정한 후 점 C를 움직여 변화를 관찰한다.(애니메이션 실행)
- ④ 자취그리기를 선택하여 교점 P와 C, P'와 C를 설정하여 자취를 그린 후 원추 곡선 도구를 선택하여 자취 위의 임의의 다섯 개의 점을 잡아 타원을 완성한다.



<그림 9> 타원의 관찰 [작도 2]

[작도 2]

- ① Cabri 파일을 열어 주어진 원 위에 한 점 A를 잡아 직선 FA를 그리고, 점 F'와 A를 연결하는 선분을 긋자.
- ② 선분 F'A의 수직이등분선을 작도하여 FA를 지나는 직선과의 교점을 P라 하고, 자국그리기를 선택하여 점 A를 움직여 점 P가 그리는 자국을 살펴보자.
- ③ 자취 그리기를 선택하여 점 P의 A에 대한 자취를 나타낸다.
- ④ 점 A를 움직여보며 이등변삼각형, 선

분 PF의 길이와 선분 PF'의 길이, 접선 등을 관찰한다.

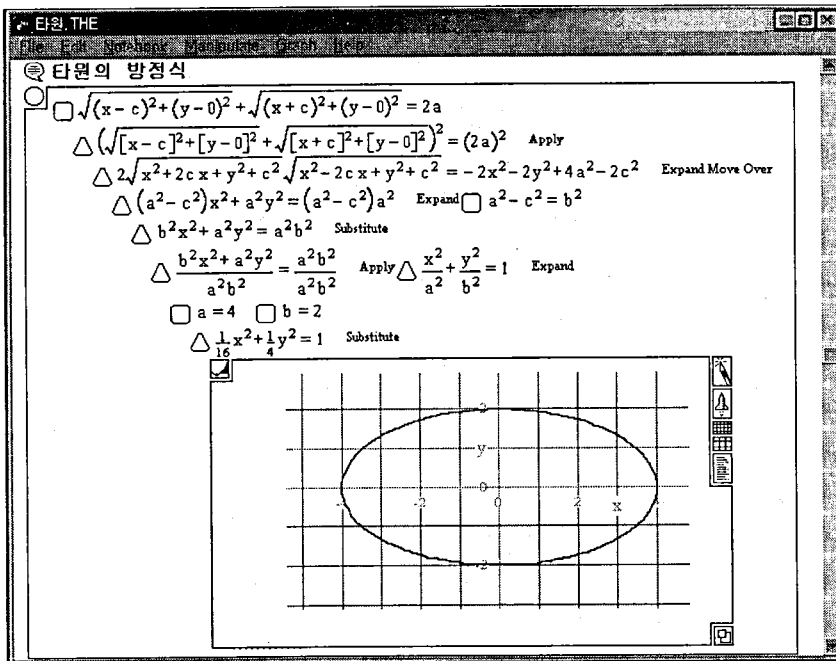
⑤ 정점(초점)과 축, 꼭지점 등 이 도형의 여러 가지 성질들을 살펴본다.

나. 전개 : MathView를 이용한 타원의 방정식 유도

① 정점 F(-c, 0), F'(c, 0)와 자취 위의 점을 (x, y)라 할 때, 정의 에 따라  $\overline{FP} + \overline{F'P} = 2a$ 의 관계식을 입력한다.

② 양변을 두 번 제곱하여 정리하는 과정을 Apply와 Expand, Isolate를 차례로 실행하여 방정식을 구한다.

③ 식의 구성 과정을 살펴보고 방정식  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $\because b^2 + c^2 = a^2$ )의 형태를 이해한다.



<그림 10> MathView를 이용한 타원의 방정식 유도

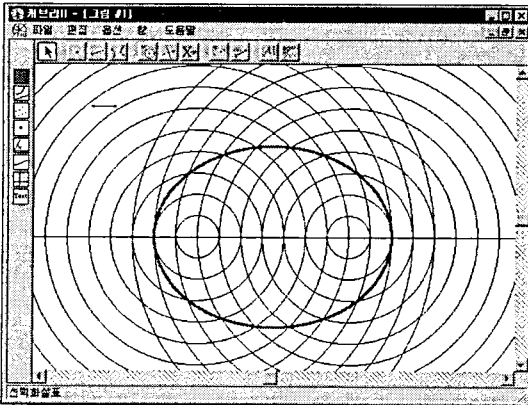
④ a = 4, b = 2 를 마지막 명제에 대입하여 방정식을 구한다.

⑤ 마지막 방정식을 선택하여 Graph ▶ Other ▶ Implicit 메뉴를 click 하여 그래프를 그리고, 그래프 화면의 도구상자를 이용하여 세부 사항을 조정하여 완성된 그래프 형태를 구성한다.

⑥ a, b의 값을 자신의 생각대로 여러 값을 입력하여 방정식과 그래프의 변화를 동시에 관찰한다.

⑦ 관계식과 그래프를 관찰하고, a, b 값의 조건과 초점과 장축, 단축, 꼭지점을 구한다.

다. 정리·평가 및 개념 발전



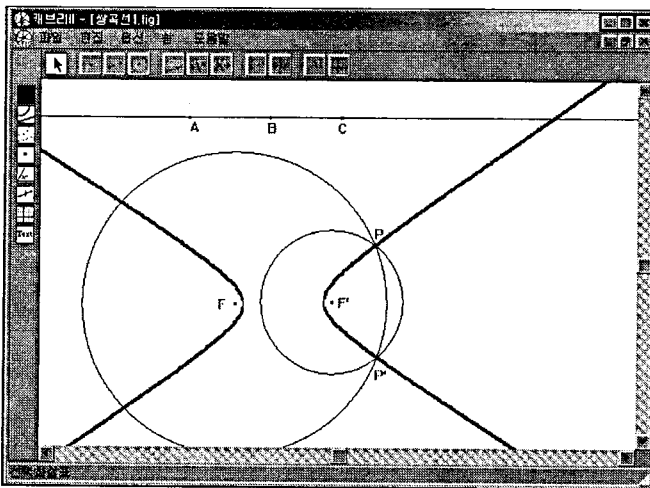
<그림 11> 동심원 물결이 만드는 타원

- ① 타원의 방정식을 알고, 정점  $F(-c, 0)$ ,  $F'(c, 0)$ 에서의 거리의 합이  $2a$  인 점의 자취를  $(x, y)$ 라 할 때, 방정식  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  과 조건  $a > b > 0$ ,  $c^2 = a^2 - b^2$  을 확인하고 성질을 정리한다.
- ② 생활 속의 타원의 예 <그림 11>를 Cabri 파일을 열어 확인한다.
- ③ 형성 평가 예제를 풀어보고, 정리와 학습 소감을 학습수행지에 기록한다.

3. 쌍곡선(Hyperbola)의 방정식 탐구

가. 도입

- (1) 정의 : 두 정점에서 거리의 차가 일정한 점의 자취
- (2) 작도 지도 및 직관적 이해 : Cabri Geometry II를 활용한다.



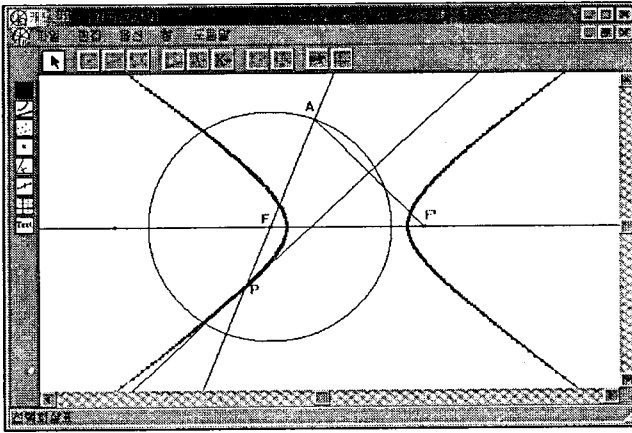
<그림 12> Cabri Geo. II를 이용한 쌍곡선 작도

[작도 1]

- ① Cabri 상에 직선을 그어 두 점 A, B를 잡고 선분 AB의 밖에 직선 위에 임의의 점 C를 잡는다.
- ② 평면 위에 두 점 F, F'를 잡고, 컴퍼스 도구를 선택하여 선분 AC와 선분 BC의 길이를 반지름으로 하는 원을 작도한다.(중심거리가 반지름의 합보다 크게 F와 F'를 잡는다.)
- ③ 두 원의 교점을 각 P, P'라하고 이를 자국그리기로 설정한 후 점 C를 움직여 변화를 관찰한다.(애니메이션 실행)
- ④ 자취그리기를 선택하여 교점 P와 C, P'와 C를 설정하여 자취를 그린 후 원추곡선 도구를 선택하여 자취 위의 임의의 다섯개 점을 잡

C, P'와 C를 설정하여 자취를 그린 후 원추곡선 도구를 선택하여 자취 위의 임의의 다섯개 점을 잡

아 타원을 완성한다.



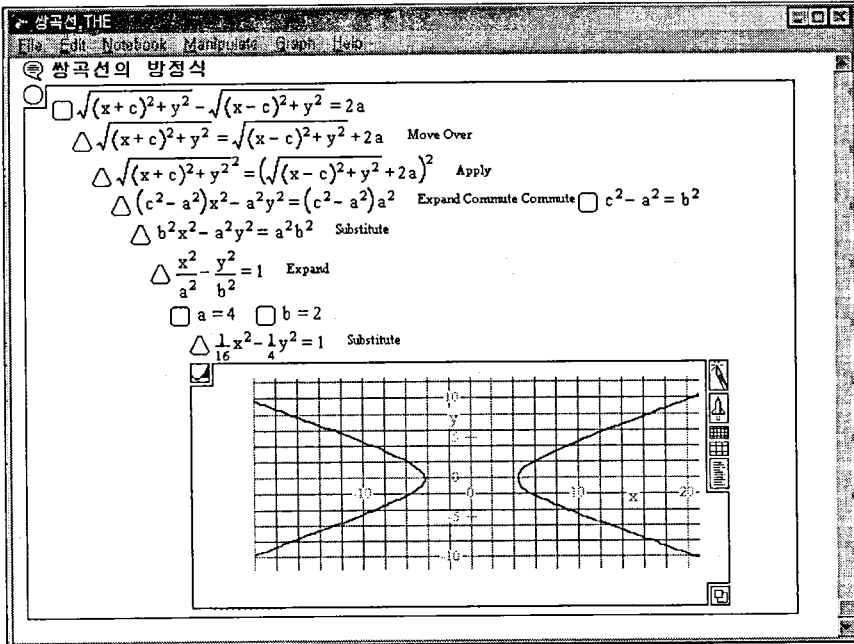
[작도 2]

- ① Cabri 파일(타원)을 열어 점 F'를 잡고 원 밖으로 끌면 나타난다.
- ② 점 A를 움직여보며 이등변삼각형, 선분 PF의 길이와 선분 PF'의 길이, 접점, 접선 등을 관찰한다.)
- ③ 정점(초점)과 주축, 꼭지점 등 이 도형의 여러 가지 성질들을 살펴본다.

<그림 13>

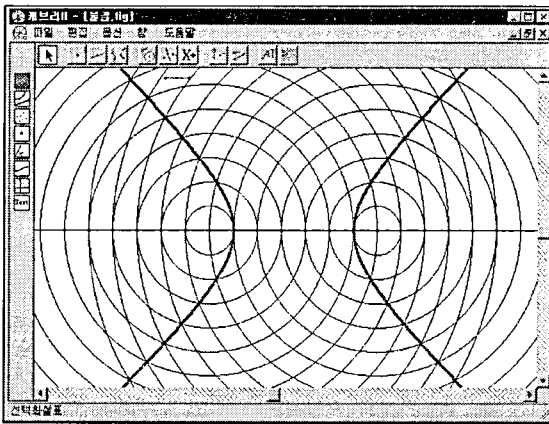
나. 전개 : MathView를 이용한 타원의 방정식 유도

- ① 정점  $F(-c, 0)$ ,  $F'(c, 0)$ 와 자취 위의 점을  $(x, y)$ 라 할 때, 정의  $\overline{FP} - \overline{F'P} = 2a$  (일정)에 따라 식  $\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$  을 입력한다.



<그림 14> MathView를 이용한 쌍곡선의 방정식 유도

- ② 양변을 제곱하여 정리하는 과정을 Apply와 Expand, Isolate를 차례로 실행하여 방정식을 구한다.
- ③ 식의 구성 과정을 살펴보고 방정식  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $\because a^2 + b^2 = c^2$ )의 형태를 이해한다.
- ④  $a = 2, b = 2$  를 대입하여 마지막 명제에 대입하여 방정식을 구한다.
- ⑤ 마지막 방정식을 선택하여 Graph ▶ Other ▶ Implicit 메뉴를 click 하여 그래프를 그리고, 그래프 화면의 도구상자를 이용하여 세부 사항을 조정하여 완성된 그래프 형태를 구성한다.
- ⑥ a, b의 값을 자신의 생각대로 여러 값을 입력하여 방정식과 그래프의 변화를 동시에 관찰한다.
- ⑦ 관계식과 그래프를 관찰하고, a, b 값의 조건과 초점과 꼭지점을 구한다.



<그림 15> 물결 무늬 속의 쌍곡선

다. 정리·평가 및 개념 발전

- ① 타원의 방정식을 알고, 두 정점  $F(-c, 0), F'(c, 0)$ 에서의 거리의 합이  $2a$  인 점의 자취를  $(x, y)$ 라 할 때, 방정식  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과 조건  $c > a > 0$  과  $b^2 = c^2 - a^2$ 을 확인하고 성질을 정리한다.
- ② 타원의 예 <그림 15>를 Cabri상에서 열어 확인한다.
- ③ 형성 평가 예제를 풀어보고, 정리와 학습 소감을 학습수행지에 기록한다.

#### IV. 결론

수학적 개념을 자기규제성을 갖고 구성할 수 있도록 하는 수학 교수·학습 방안을 찾기 위하여 선행 연구에 대한 분석을 실시하고 그에 따라 이차곡선의 학습 요소를 재구성하여 Cabri Geometry II와 MathView를 활용한 개념 형성 지도 방안을 제시하였다. 이러한 지도 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 추상적이고 형식적인 수학 개념 형성에 컴퓨터 응용 소프트웨어를 이용한 결과, 실행·조작 과정에서 시각적·직관적 지식 구성에 유용하였다. 학습수행지와 컴퓨터 응용 프로그램을 매개로 한 교사-학생, 학생-컴퓨터 응용소프트웨어의 원활한 상호작용으로 다양한 수학적 체험을 가능하게 하였다.

둘째, Cabri Geometry II를 이용한 동적기하의 조작과 실험을 실행한 결과, 작도와 관찰을 통하여 흥미를 이끌어낼 수 있었고 이차곡선의 기하적 구조 이해력이 높아졌으며, 이로부터 파생되는 이차

곡선의 여러 가지 성질에 자연스럽게 접근할 수 있었다. 또한 MathView를 이용하여 실시간에 나타나는 대수적 연산 결과와 그래프의 변화를 한 공간에서 학습할 수 있어 역동적으로 자기규제성을 갖고 지식 체계를 세우는 데 유용하였다.

셋째, 상호작용적인 수학교재(Interactive Mathematics Texts)를 구성함으로써 학생은 능동적이고 적극적인 태도로 스스로 학습동기를 갖게 되었고, 사고 과정에 따라 구성된 학습수행지는 체계적인 발문과 응답의 상호작용을 유도하여 개념 형성에 유용하였으며, 학습 요소간 연동 지도에 효과적이었다. 학습수행지의 학습 결과와 반성 등을 통하여 수학에 대한 가치와 태도를 관찰할 수 있는 자료를 얻을 수 있었다.

## V. 앞으로의 과제

수학 교수·학습 환경을 '철판과 지필'이란 기본 틀을 벗어나 컴퓨터 응용 소프트웨어를 활용한 환경에서는 교사나 소프트웨어의 근본 의도와 달리 발생할 수 있는 학생들의 다양한 경험을 어떻게 통제하고 관리하느냐하는 것은 교사의 책임이므로 컴퓨터 소프트웨어와 수학적 지식에 대한 교사의 연구와 노력이 더욱 요구되어지고, 이를 적절히 관리할 수 있는 교수·학습 환경 구성에 대한 논의가 필요할 것이다. 급속한 공학의 발전과 정보 전달의 가속화 등은 수학 학습에도 광범위한 영향력을 발휘하고 있으므로 학교 수학 교육에서 무엇이 중요하고 무엇을 가르칠 것인가에 대한 연구와 정보화 사회의 다양하고 개별화되는 교수·학습 환경에 적합한 교육과정과 교재(전자교과서 등)의 연구가 요구된다.

## 참 고 문 헌

- 교육부 (1995). 고등학교 교육과정 해설 -수학-.
- 류희찬 (1998) 컴퓨터를 활용한 수학교육의 이론과 실제, 대한수학교육학회 1998 추계 수학교육연구 발표대회 논문집, pp.29-43.
- 류희찬·유공주·조민식 (1999). 탐구형 소프트웨어를 활용한 기하 학습 내용의 구성방안 탐색, 대한수학교육학회 1999 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.227-253.
- 박영배 (1996). 수학 교수·학습의 구성주의적 전개 과정에 관한 연구, 서울대학교대학원 박사학위논문.
- 박용범·김한희·박일영 (1999). 수학 개념의 자기주도적 구성을 위한 교수·학습 모델 개발, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 9, pp.97-114.
- 박한식 외 (1999). 고등학교 수학II, 서울: (주) 지학사.
- 우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초, 서울: 서울대학교 출판부.
- 장경운 (1995). 역동적인 기하학습을 위한 소프트웨어의 특징, 한국수학교육학회 전국수학교육 연구

발표회 프로시딩, pp.169-172.

- 양기열·주미 (1998) 소프트웨어를 이용한 기하 교수 학습 방안, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 37(2), pp.215-225.
- 허만성 (1998). 중등 수학교과 교수-학습을 위한 CAS Math Engine과 연계한 컴퓨터 응용프로그램 모형설계 및 ITs 작성에 관한 소고, 대한수학교육학회 1998 추계 수학교육연구발표대회 논문집, pp.245-267.
- Carol Scheftic (1993). Interactive Mathematics Texts : Ideas For Developers, In Thomas Lee(Ed.), *Mathematical computation with Maple V ; Ideas and Applications*, pp.51-63, Boston: Birkhäuser.
- Douglas, T. Owens(Ed.) (1993). Research Ideas for the classroom; Middle grades Math. New York: Macmillian Publishing company.
- James J. Kaput (1998). Mixing New Technology, New Curricula and New Pedagogies to Extraordinary Performance from Ordinary People in the Next Century. *Department of mathematics, University of Massachusetts-Dartmouth ICMI-EARCOME1 Proceeding Vol 1*. pp.141-156.
- James J. Kaput & J. Roschelle (1999). The mathematics of change and variation from a Millennial perspective; New content, New context. In Celia Hoyles, ... (Eds.), *Rethinking the Mathematics Curriculum*, pp.155-170, London : Falmer press.
- NCTM (1998). *Principles and Standards for School Mathematics; Discussion Draft*, Virginia: NCTM.
- Patricia S. Wilson(Ed.) (1993). *Research Ideas for the classroom; High school Math*. New York: Macmillian Publishing company.

[ 부 록 ]

1. 포물선의 방정식 - 학 습 수 행 지 (Work-sheet)

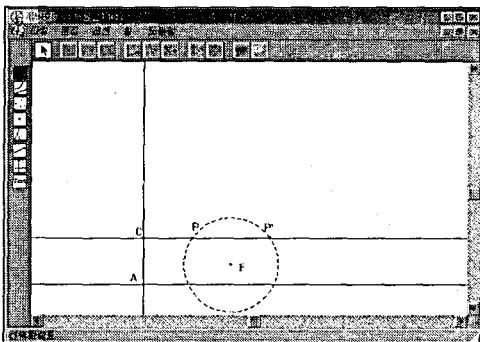
월 일

학번 :

성명 :

1. 포물선의 방정식 탐구

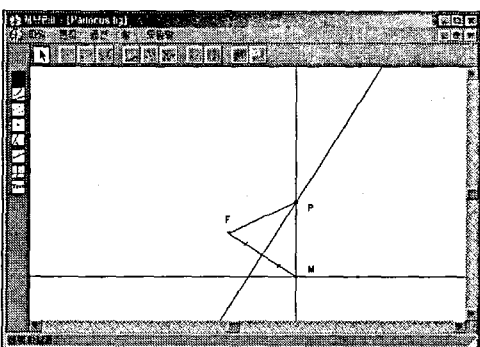
<정의>



<작도1>

[작도1] Cabri를 이용하여 작도하여보자.

- ① 정점 F를 잡고, 정점을 지나지 않는 직선을 긋는다.
- ② 직선 L에 수직인 직선 H를 세우고 H위에 임의의 점 C를 잡아 직선 L에 평행인 직선 L'를 긋고, AC의 길이 만큼 컴퍼스로 점 F에서 원을 작도한다.
- ③ 원과 직선 L'의 교점 P, P'를 자국그리기, 자취, 원추곡선 도구를 활용하여 자취를 그려보자.
- ④ 자취의 변화와 특징을 토론하여보자



<작도 2>

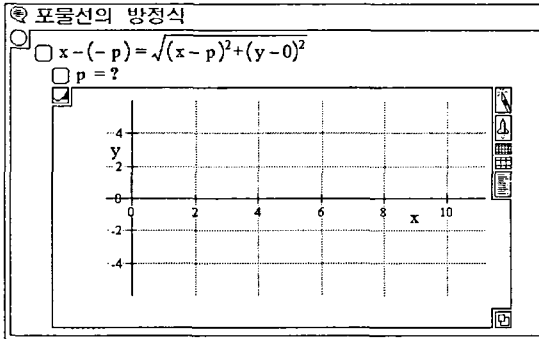
[작도2]

- ① Cabri의 '포물선' 파일을 열어 자취그리기를 선택하여 점 P의 M에 대한 자취를 나타내어라.
- ② 점 M을 움직여보며 수직이등분선과 자취, 수직선의 상호 관계를 관찰하여보자.
- ③ 꼭지점과 정점, 정직선의 관계를 알아본다.
- ④ 위의 두 작도 결과를 관찰하고 특징과 도형간의 관계를 말하여보자.

[ MathView 를 이용한 포물선의 방정식 유도]

- ① 정점을  $(p, 0)$ , 정직선을  $x = -p$  ( $p > 0$ )라 잡고, 자취의 점을  $(x, y)$ 라 하면, MathView에서 정점과 정직선 사이의 거리를 식으로 표현하여보자.
- ② MathView를 사용하여 식을 정리하면?
- ③  $P=1$ 일 때, 방정식을 완성하고 Implicit 도구를 이용하여 그래프를 그려보자.

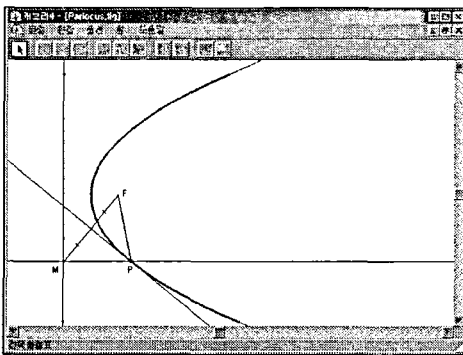




④ P에 다양한 값을 입력하여 방정식과 그래프의 변화를 관찰하고 특징을 말하여보자.

⑤ 초점, 준선, 꼭지점을 구하여보자.

[정리·평가 및 개념 발전]



① 형성 평가 문제를 풀이하고 결과를 확인하여보자.

② 포물선의 방정식과 그 성질을 정리하여보자.

③ Cabri 파일 <포물선-예1>에서 직선 MP와 선분 FP의 관계를 알아보자. <포물선-예2>에서 직선 LI를 움직여 곡면거울에서 나타나는 성질을 말하여보자.

[활동 내용의 정리 및 활동 소감]