

# CFDS기법에 연계된 특성경계조건의 응용성에 대한 소개

홍 승규\*, 이 광섭\*

## Applications of Characteristic Boundary Conditions within CFDS Numerical Framework

S. K. Hong and K. S. Lee

Characteristic boundary conditions are discussed in conjunction with a flux-difference splitting formulation as modified from Roe's linearization. Details of how one can implement the characteristic boundary conditions which are made compatible with the interior point formulation are described for different types of boundaries including subsonic outflow and adiabatic wall. The validity of boundary conditions are demonstrated through computation of transonic airfoil, supersonic ogive-cylinder, hypersonic cylinder, and S-duct internal flows. The computed wall pressure distributions are compared with published experimental and computed data. Objectives of this paper are thus to give insight of formulation procedure of a flux-difference splitting method and to pave ways for other users to adopt present boundary procedure on their numerical methods.

**Key Words:** CFDS 수치해석(Characteristic Flux Difference-Splitting Numerical Analysis), 특성경계조건(Characteristic Boundary Conditions), 보존변수 벡터(Conservative Variable Vector), 원시변수 벡터(Primitive Variable Vector), 특성변수 벡터(Characteristic Variable Vector), 아음속 입구/출구조건(Subsonic Inflow/Outflow), 단열조건(Adiabatic Condition)

### 1. 서론

80년대 이후 Computational Fluid Dynamics (CFD)의 이론이 일반 좌표계와 flux splitting이라는 개념의 도입으로 넓은 속도범위와 복잡한 형상에 응용되기 시작하면서 비행체 설계도구로써 사용하기에 이르게 되었다. 그러나 1차원 이론에 근거를 둔 flux-splitting algorithm이 2차, 3차원으로 확장되고 보다 광범위하게 응용

되기 시작하면서 upwind 방법들의 한계가 또한 보고되기 시작하였으니 carbuncle 현상이나 expansion shock[1] 등이 그 예의 일부가 될 것이다. 그러나 실제로 체계공력설계를 위한 전체 형상 또는 주요부품 주변의 유동해석을 할 경우 경계조건의 불확실성이 수치해의 안정성 및 정확도에 더 많은 영향을 미치고 있음을 경험하고 있다. 한 예로 관(duct) 내부유동 해석시 출구면에서의 경계조건을 알지 못하므로 외삽을 하거나 압력을 고정시켜 수치해를 구하고 있으나 출구의 압력이 또한 관 내부 유동의 유

\* 정희원, 국방과학연구소(3체계-2-1)

량 및 유동현상에 영향을 주게 된다. 따라서 본 연구에서는 특성방정식을 경계면(boundary plane)에서 flux-splitting 방법에 연계(coupling)시키는 수치해석의 이론 전개과정을 자세히 제시하여 이 분야를 연구하시는 분들에게 조금이라도 도움이 되고자 한다. 또한 flux-splitting 수치해석에도 본 연구의 flux difference 기법 이외에 Steger[2], Van Leer[3], Hirsh[4] 등의 많은 방법들을 열거할 수도 있겠으나 되도록 한가지 방법을 집중 조명함으로써 타 방법들을 이용하는 CFD 연구자에게도 비교할 수 있는 대안을 제공하고자 한다.

이에 소개하고자 하는 특성방정식의 기본 개념은 Navier-Stokes(N-S) 방정식이 내포하고 있는 특성치를 분석하고 이의 특성을 이해하여 계산 경계면에 들어오고 나가는 characteristics (또는 wave)를 일부 사용하고 일부는 모델링을 하여 가능한 한 원래의 N-S 방정식이 갖고 있는 형태를 최대한 활용하여 경계조건의 불확실성을 최소화하는데 목적이 있다.

이를 위하여 제 2절에서는 일반 좌표계로 변환된 N-S 방정식을 정의하고, 제 3절 수치기법에서는 본 연구에서 사용하고 있는 소위 Characteristic Flux Difference Splitting(CFDS) 수치기법을 자세히 전개하였다. 제 4절에서는 특성경계조건을 CFDS 방법에 적용하는 절차를 경계면의 조건에 따라 설명하였다. 끝으로 제 5절에서는 특성경계조건을 적용한 예제로 천음속 익형, 초음속 고양각 동체, 극초음속 무딘 물체 및 S-Duct 내부유동에 대한 유동해석 결과를 제시하여 본 연구에서 기술하는 수치이론과 경계조건의 타당성 및 유용성을 입증하기를 원한다.

## 2. 지배 방정식

N-S 방정식의 각 변수들을 다음과 같이 자유류 값을 특성 값으로 무차원화하였다.

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad p^* = \frac{p}{p_\infty}, \quad T^* = \frac{T}{T_\infty}$$

$$\mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad u^* = \frac{u}{a_\infty/\sqrt{\gamma}}$$

무차원화된 방정식을 일반곡선 좌표계( $\xi, \eta, \phi$ )로 변환하면 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \phi} = \quad (2.1)$$

$$\frac{\sqrt{\gamma} M_\infty}{Re} \left[ \frac{\partial \hat{F}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{G}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{H}_v}{\partial \phi} \right]$$

보존량 벡터  $\hat{Q}$ 와 플럭스 벡터  $\hat{F}$  ( $\hat{G}, \hat{H}$  유사함)는 아래와 같이 정의된다.

$$\hat{Q} = \frac{1}{J} \mathbf{Q} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \xi_x \\ \rho v U + p \xi_y \\ \rho w U + p \xi_z \\ (e + p) U \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

U, V, W는 각각  $\xi, \eta, \phi$ -방향에 대한 contravariant velocity를 나타낸다. 편의상 무차원 변수를 의미하는 \*표시는 (2.1)식 이후부터 생략하였다.

## 3. 수치 기법

본 해석에서는 풍상차분법인 Roe의 플럭스분할[5]을 기본으로 하고 그 변형인 Conservative Supra-Characteristics Method(CSCM)[6,7]를 이론적으로 재정립하고 향상시킨 소위 CFDS 방법을 적용한다. CFDS 기법은 지배방정식을 보존변수에서 특성변수 또는 원시변수로의 변환을 통하여 궁극적으로 경계면에서 특성경계조건 적용을 용이하게 하기 위한 변환기법을 채택한다. 3.1절에서 수치기법을 자세히 설명하

고, 3.2절에서 시간적분법을 설명한다.

### 3.1 CFDS 수치기법

첫단계는 연속공간에서의 보존변수(Conservative variable vector)  $Q$ 에 대한 지배방정식을 이산공간(discrete space)으로의 변환이다.

$$J^{-1} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 \quad (3.1)$$

편의상 공간에서 1차원 플럭스( $F$ )만 나타내었지만 2차, 3차까지의 연장도 유사하게 할 수 있다.

$$J^{-1} \delta Q + \Delta F = 0 \quad (3.2)$$

이때,  $\Delta F = F_j - F_{j-1}$  또는

$$\Delta F = F_{j+1} - F_j \quad (3.3)$$

플럭스 벡터의 요소들 중 비선형 항에 대하여는 다음과 같이 이산화 되는 것이 CFDS 기법 전개의 근간이 되고 있다. 즉,

$$\Delta(\rho u) = \overline{\rho} \Delta u + \overline{u} \Delta \rho \quad (3.4)$$

위에서  $\overline{u} = \frac{1}{2}(u_i + u_{i+1})$  로써,  $\overline{(\quad)}$  는 구간  $[i, i+1]$  의 산술평균을 의미한다.

플럭스 차이 분할기법의 목적은 플럭스 차이  $\Delta F$  를 보존변수  $Q$ 의 함수로 나타내어 식 (3.2)를 미지수 함수  $Q$ 로 선형화 하는데 있다.

즉,  $\Delta F = \tilde{A} \Delta Q$ , 또는

$$J^{-1} \delta Q + \tilde{A} \Delta Q = 0 \quad (3.5)$$

이때  $\tilde{A}$ 를 플럭스 함수  $F$ 의 보존변수  $Q$ 에 대한 Jacobian matrix라 칭할 수 있으며 Roe의 property U를 만족한다. 본 CFDS 기법에서는  $\tilde{A}$ 를 보존변수, 특성변수, 원시변수 사이의 변형행렬과 고유치로 분리시켜 선형화된 지배방정식(3.5)을 보존변수의 함수에서 원시변수 또는 특성변수의 함수로 쉽게 변환하고자 한다. 이 목적을 위하여 보존변수 차이

(conservative variable difference)  $\Delta Q$  와 원시변수 차이(primitive variable difference)  $\Delta \tilde{Q}$  를 다음과 같이 정의한다.

$$\Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta \rho \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho w) \\ \Delta(e) \end{bmatrix}, \quad \Delta \tilde{Q} = \begin{bmatrix} -\Delta \rho \\ \rho \Delta u \\ \rho \Delta v \\ \rho \Delta w \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad P \equiv p/(\gamma - 1) \quad (3.6)$$

이때  $\Delta \tilde{Q} = [\Delta \rho \ \Delta u \ \Delta v \ \Delta w \ \Delta P]^T$  로도 정의할 수 있으나,  $\overline{\rho} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i+1})$ 를 포함시킴으로써 상대적으로 Jacobian matrix  $\tilde{A}$ 의 요소변수들을 더욱 간단히 할 수 있다.  $Q$ 와  $\tilde{Q}$ 를 정의하였으니 두 벡터사이의 변환행렬  $\overline{M}$  또는  $\overline{M}^{-1}$ 를 다음 식에서 구할 수 있다.

$$\Delta \tilde{Q} = \overline{M}^{-1} \Delta Q \quad \text{또는} \quad \Delta Q = \overline{M} \Delta \tilde{Q} \quad (3.7)$$

이때  $\overline{M}^{-1}$ 에 붙은 표시  $\overline{(\quad)}$ 는  $\overline{M}^{-1}$ 의 요소들이 구간 평균되어져 있음을 의미하고 이는 물리적으로 두 이웃간의 정보가  $\overline{(\quad)}$ 를 통하여 서로 교통이 되고 또한 구간  $[i, i+1]$ 에서 일정한 상수 값을 사용하는 의미가 되기도 한다.  $\overline{M}$ 는 식(3.7)에서  $\Delta Q$ 와  $\Delta \tilde{Q}$ 를 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \Delta \rho \\ \Delta(\rho u) \\ \Delta(\rho v) \\ \Delta(\rho w) \\ \Delta(e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\Delta \rho \\ \rho \Delta u \\ \rho \Delta v \\ \rho \Delta w \\ \Delta P \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

식(3.7)를 식(3.8)과 같이 표현하고 식(3.8)의 행렬식을 계산하면  $\overline{\mathbf{M}}$  을 얻을 수 있으며 그 결과는 다음과 같다.

$$\overline{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{q^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{u}{q^2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{q^2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{w}{q^2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{q^2} & \frac{u}{q^2} & \frac{v}{q^2} & \frac{w}{q^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

여기서,  $\overline{q^2} = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$

$\overline{\mathbf{M}}^{-1}$  는  $\overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{M}}^{-1} = \mathbf{I}$  의 관계식을 만족하며 식(3.7)로부터도 얻어질 수 있다.

$$\overline{\mathbf{M}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{s} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{s} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{w}{s} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & -u & -v & -w & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

여기서,  $\overline{s} = 2\overline{q^2} - \overline{q^2}$

$$\overline{q^2} = \frac{1}{2}(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2})$$

식(3.5)의  $\overline{\mathbf{A}}$ 가 포함하고 있는 고유치  $\overline{\lambda}$ 를 구하기 이전에 원시변수에 대한 Jacobian matrix를 구하고 이것으로부터  $\overline{\mathbf{A}}$ 를 구하면 대수적으로 더 손쉬운 방법이 될 수 있다. 이를 위하여  $\overline{\mathbf{A}}$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\Delta \mathbf{F} = \overline{\mathbf{M}} \overline{\mathbf{A}} \Delta \tilde{\mathbf{Q}} \quad (3.11)$$

이때 곱  $\overline{\mathbf{M}} \cdot \overline{\mathbf{A}}$ 를 원시변수에 대한 Jacobian matrix라 볼 수 있으며  $\overline{\mathbf{M}}$ 를 추출함으로써  $\overline{\mathbf{A}}$ 가 대수적으로 간단한 형태가 된다. 식(3.11)을 보면  $\Delta \mathbf{F}$ 는 N-S 방정식으로부터,  $\Delta \tilde{\mathbf{Q}}$ 는 원시벡터의 정의이고,  $\overline{\mathbf{M}}$ 는  $\mathbf{Q}$ 와  $\tilde{\mathbf{Q}}$ 사이의 변환행렬로 이미 정의되어 있으므로  $\overline{\mathbf{A}}$ 를 대수적으로 구할 수 있다. 즉 관계식  $\overline{\mathbf{A}} \Delta \tilde{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{M}}^{-1} \Delta \mathbf{F}$ 에서  $\overline{\mathbf{A}}$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\overline{\mathbf{A}} = \quad (3.12)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{U} & \overline{\xi_x} & \overline{\xi_y} & \overline{\xi_z} & 0 \\ 0 & \overline{U} & 0 & 0 & (\gamma-1)\overline{\xi_x} \\ 0 & 0 & \overline{U} & 0 & (\gamma-1)\overline{\xi_y} \\ 0 & 0 & 0 & \overline{U} & (\gamma-1)\overline{\xi_z} \\ 0 & \frac{\gamma P}{\rho} \overline{\xi_x} & \frac{\gamma P}{\rho} \overline{\xi_y} & \frac{\gamma P}{\rho} \overline{\xi_z} & \overline{U} \end{bmatrix}$$

여기서  $\overline{U} = \overline{\xi_x} u + \overline{\xi_y} v + \overline{\xi_z} w$ ,

$\overline{\xi_x} = (\gamma_\eta z_\phi - \gamma_\phi z_\eta)$ , 그리고  $\overline{(\ )}$ 는

$(\ )$ 를  $J$ 로 나눔을 의미함.

다음엔  $\overline{\mathbf{A}}$ 의 고유치  $\overline{\lambda}$ 를  $|\overline{\mathbf{A}} - \overline{\lambda}| = 0$ 로부터 구하면 다음과 같이 계산된다.

$$\overline{\mathbf{A}} = \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{U} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{U} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{U} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{U} + \overline{c} \overline{\xi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \overline{U} - \overline{c} \overline{\xi} \end{bmatrix}$$

여기서,  $\overline{\xi} = \sqrt{\overline{\xi_x^2} + \overline{\xi_y^2} + \overline{\xi_z^2}}$ ,

$$\overline{c} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$$

문헌[4]에 기술되어 있듯이  $\overline{\mathbf{A}}$ 와  $\overline{\mathbf{A}}$ 를 만족시키는 left eigenvector  $\overline{\mathbf{T}}^{-1}$ 가 존재하고,

$$\overline{\mathbf{T}}^{-1} \text{는 } \overline{\mathbf{T}}^{-1} \overline{\mathbf{A}} = \overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{T}}^{-1} \quad (3.14)$$

를 만족하는 것으로 찾을 수 있다. 또한 right eigenvector  $\overline{\mathbf{T}}$ 가 다음 식을 만족하며

$$\overline{\mathbf{A}} \overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{A}} \quad (3.15)$$

이때의  $\overline{\mathbf{T}}$ 를 구할 수도 있다. 이때 물론  $\overline{\mathbf{T}} \overline{\mathbf{T}}^{-1} = \mathbf{I}$ 이다.

식(3.14)에서는 유일한  $\overline{\mathbf{T}}^{-1}$ 를 구할 수가 없고 플럭스 분할 기법의 저자들마다 조금씩 다른  $\overline{\mathbf{T}}^{-1}$ 를 사용하고 있다. 본 CFDS 전개에서는 Lombard[8]가 사용한  $\overline{\mathbf{T}}^{-1}$ 를 채택한다.

$$\overline{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma P} \\ 0 & \frac{\overline{x}_\eta}{\overline{X}_\eta} & \frac{\overline{y}_\eta}{\overline{X}_\eta} & \frac{\overline{z}_\eta}{\overline{X}_\eta} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{x}_\phi}{\overline{X}_\phi} & \frac{\overline{y}_\phi}{\overline{X}_\phi} & \frac{\overline{z}_\phi}{\overline{X}_\phi} & 0 \\ 0 & \frac{\overline{\xi}_x}{\rho c \xi} & \frac{\overline{\xi}_y}{\rho c \xi} & \frac{\overline{\xi}_z}{\rho c \xi} & \frac{1}{\gamma P} \\ 0 & \frac{-\overline{\xi}_x}{\rho c \xi} & \frac{-\overline{\xi}_y}{\rho c \xi} & \frac{-\overline{\xi}_z}{\rho c \xi} & \frac{1}{\gamma P} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

여기서,  $\overline{X}_\eta = \sqrt{\overline{x}_\eta^2 + \overline{y}_\eta^2 + \overline{z}_\eta^2}$ ,  
 $\overline{X}_\phi = \sqrt{\overline{x}_\phi^2 + \overline{y}_\phi^2 + \overline{z}_\phi^2}$

또한  $\overline{T}$  는  $\overline{T}^{-1} \cdot \overline{T} = I$  로부터 구할 수 있으며  $\overline{T}$  의 row vector 들은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \overline{T}_1 &= \left[ -\overline{\rho} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\overline{\rho}}{2} \quad \frac{\overline{\rho}}{2} \right] \\ \overline{T}_2 &= \left[ 0 \quad \frac{\overline{y}_\phi \overline{\xi}_z - \overline{z}_\phi \overline{\xi}_y}{(\overline{\xi})^2 / \overline{X}_\eta} \quad \frac{\overline{z}_\eta \overline{\xi}_y - \overline{y}_\eta \overline{\xi}_z}{(\overline{\xi})^2 / \overline{X}_\phi} \right. \\ &\quad \left. \frac{\overline{\rho c \xi}_x}{2 \overline{\xi}} \quad \frac{-\overline{\rho c \xi}_x}{2 \overline{\xi}} \right] \\ \overline{T}_3 &= \left[ 0 \quad \frac{\overline{z}_\phi \overline{\xi}_x - \overline{x}_\phi \overline{\xi}_z}{(\overline{\xi})^2 / \overline{X}_\eta} \quad \frac{\overline{x}_\eta \overline{\xi}_z - \overline{z}_\eta \overline{\xi}_x}{(\overline{\xi})^2 / \overline{X}_\phi} \right. \\ &\quad \left. \frac{\overline{\rho c \xi}_y}{2 \overline{\xi}} \quad \frac{-\overline{\rho c \xi}_y}{2 \overline{\xi}} \right] \\ \overline{T}_4 &= \left[ 0 \quad \frac{\overline{x}_\phi \overline{\xi}_y - \overline{y}_\phi \overline{\xi}_x}{(\overline{\xi})^2 / \overline{X}_\eta} \quad \frac{\overline{y}_\eta \overline{\xi}_x - \overline{x}_\eta \overline{\xi}_y}{(\overline{\xi})^2 / \overline{X}_\phi} \right. \\ &\quad \left. \frac{\overline{\rho c \xi}_z}{2 \overline{\xi}} \quad \frac{-\overline{\rho c \xi}_z}{2 \overline{\xi}} \right] \\ \overline{T}_5 &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\gamma \overline{P}}{2} \quad \frac{\gamma \overline{P}}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

지금 우리의 원래의 목적인  $\Delta F = \tilde{A} \Delta Q$  를 상기시키면, 식(3.11)로부터

$$\begin{aligned} \Delta F &= \overline{M} \overline{A} \Delta Q \\ &= \overline{M} \overline{A} \overline{M}^{-1} \Delta Q \\ &= \overline{M} \overline{T} \overline{\Lambda} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \Delta Q \end{aligned} \quad (3.18)$$

로 표현되고 이때 식(3.7), (3.14)들이 사용되었다. 식(3.5)와 식(3.18)를 비교하면  $\tilde{A} = \overline{M} \overline{T} \overline{\Lambda} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1}$  임을 알 수 있으며 Jacobian matrix  $\tilde{A}$  를 변환변수인  $\overline{M}$ ,  $\overline{T}$ ,  $\overline{M}^{-1}$ ,  $\overline{T}^{-1}$  그리고 고유치 행렬  $\overline{\Lambda}$  로 표현됨을 알 수 있다.

따라서 식(3.2)로부터

$$J^{-1} \delta Q + \Delta F = 0,$$

$$\text{또는 } J^{-1} \delta Q + \tilde{A} \Delta Q = 0, \quad (3.19)$$

$$\text{또는 } J^{-1} \delta Q + \overline{M} \overline{T} \overline{\Lambda} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \Delta Q = 0$$

로 표현할 수 있다. 이때  $\tilde{A}$  는 Roe의 Property U를 만족하는 Jacobian matrix이다. 그러나 Roe-평균 변수를 이용한 Roe의 flux Jacobian  $\Delta F = A \Delta Q$  의  $A$  와 위  $\tilde{A}$  를 수식적으로 엄밀히 비교할 때 조금씩 다른 값을 갖고 있다. Roe의 평균을 취한  $A$  와 대수적인 평균을 취한  $\tilde{A}$  를 비교하면 각 항들의 형태는 유사하나 식(2.2)의  $\hat{F}$  중  $\rho u U$  와 같은 triple product 항에 대하여  $\Delta(\rho u U)$  를 적용하여 이산화하는 과정에서 각 항을 분리하는 방법에 따라서  $\tilde{A}$  의 요소들이 약간의 차이를 보인다. 즉 연속공간에서의 Jacobian 행렬은 동일하지만 이산화 공간에서는  $A$  가 서로 다른 형태를 취할 수 있으며 이는 Jacobian matrix  $A$  가 유일하지 않게 존재하고 있다는 것을 보여주고 있다.

식(3.19)과 같이 복잡한 형태로  $\tilde{A}$  를 변환한 이유는 첫째, 식(3.19)을 특성변수  $\tilde{Q}$  로의 변환시킴이 용이하기 때문이다. 즉, 특성변수 차분을 다음과 같이 정의할 수 있고

$$\Delta \tilde{Q} = \overline{T}^{-1} \Delta Q = \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \Delta Q \quad (3.20)$$

$$\delta \tilde{Q} = \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \delta Q \quad (3.21)$$

이는 식(3.19)을

$$J^{-1} \delta \tilde{Q} + \overline{\Lambda} \Delta \tilde{Q} \approx 0, \text{ 또는}$$

$$J^{-1} \delta \tilde{Q}_i + \overline{\lambda}_i \Delta \tilde{Q}_i \approx 0 \quad (3.22)$$

로 변환시킬 수 있음을 보여주고 있다. 따라서 식(3.22)은 5개의 선형적으로 독립된 방정식을 나타내며  $i$ 번째 특성변수  $\tilde{Q}_i$ 가  $i$ 번째 특성선을 따라  $\overline{\lambda}_i$ 의 속도로 이동되고 있으며 이때의 불변 상수를 Riemann constant라고 하는 것도 잘 알려진 사실이다.

둘째, 고유치  $\overline{\Lambda}$ 를 분리하여  $\overline{\Lambda} = \overline{\Lambda}^+ + \overline{\Lambda}^-$ 로 나타내어 이 고유치의 부호에 따라 전방 또는 후방 차분법을 적용하여 수치적으로 안정하고 충격파와 같은 불연속 점을 포착하는데 유용하기 때문이다. 따라서 플럭스 분할의 근간이 되는

$$\begin{aligned} \Delta F &= \overline{A} \Delta Q = \overline{M} \overline{T} \overline{\Lambda} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \Delta Q \\ &= \overline{M} \overline{T} (\overline{\Lambda}^+ + \overline{\Lambda}^-) \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \Delta Q \\ &= \overline{A}^+ \nabla Q + \overline{A}^- \Delta Q \quad (3.23) \\ &= \nabla F_{j-1}^+ + \Delta F_j^- \\ &= \overline{M} \overline{T} \overline{\Lambda}^+ \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \nabla Q \Big|_{j-1}^j \\ &\quad + \overline{M} \overline{T} \overline{\Lambda}^- \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \Delta Q \Big|_j^{j+1} \end{aligned}$$

을 제시하게 되고, 여기서 후방차분 기호  $\nabla$ 와 전방차분 기호  $\Delta$ 는 다음과 같다.

$$\nabla Q = Q_j - Q_{j-1}, \quad \Delta Q = Q_{j+1} - Q_j \quad (3.24)$$

### 3.2 시간 적분

시간에 대해 후방 차분을 취하고, 식(3.23)과 같은 분할 기법을 식(3.19)에 적용하여 3차원으로 확장하면 다음과 같은 차분식을 얻을 수 있다.

$$J \frac{\delta Q}{\Delta t} + \overline{A}^+ \nabla_\xi Q + \overline{A}^- \Delta_\xi Q + \overline{B}^+ \nabla_\eta Q \quad (3.25a)$$

$$+ \overline{B}^- \Delta_\eta Q + \overline{C}^+ \nabla_\phi Q + \overline{C}^- \Delta_\phi Q = 0$$

$$Q^{(n+1)} = Q^{(n)} + \delta Q \quad (3.25b)$$

(3.25)식을 정리하면 다음과 같은 {Numerics}  $\delta Q = \{Physics\}$  형태의 대수방정식을 얻을 수 있다.

$$\left( \frac{J}{\Delta t} I + \overline{A}^+ \nabla_\xi + \overline{A}^- \Delta_\xi + \overline{B}^+ \nabla_\eta + \overline{B}^- \Delta_\eta + \overline{C}^+ \nabla_\phi + \overline{C}^- \Delta_\phi \right) \delta Q = RHS \quad (3.26)$$

$$RHS = -(\overline{A}^+ \nabla_\xi Q + \overline{A}^- \Delta_\xi Q + \overline{B}^+ \nabla_\eta Q + \overline{B}^- \Delta_\eta Q + \overline{C}^+ \nabla_\phi Q + \overline{C}^- \Delta_\phi Q)$$

그러나 (3.26)식을 풀어 해  $\delta Q$ 를 구하기 위해서는 큰 행렬식의 역변환이 필요하여 많은 메모리와 계산 시간을 요구하게 된다. 이 어려움을 해결하기 위하여 Diagonally Dominant Alternating Direction Implicit Approximate Factorization(DDADI AF) 기법을 도입하여 해를 구한다. 결과적으로 (3.26)식은 다음과 같은 식으로 전환된다.

$$\begin{aligned} &(-\overline{A}^+_{j-1}, D, \overline{A}^-_j) D^{-1} \\ &(-\overline{B}^+_{k-1}, D, \overline{B}^-_k) D^{-1} \quad (3.27) \\ &(-\overline{C}^+_{l-1}, D, \overline{C}^-_l) \delta Q = RHS \end{aligned}$$

여기서,

$$D = \frac{J}{\Delta t} I + \overline{A}^+_{j-1} - \overline{A}^-_j + \overline{B}^+_{k-1} - \overline{B}^-_k + \overline{C}^+_{l-1} - \overline{C}^-_l$$

(3.27)식으로부터 다음과 같은 3단계의 계산을 통해  $\delta Q$ 를 계산한다.

$$(-\overline{A}^+_{j-1}, D, \overline{A}^-_j) \delta Q^{**} = RHS \quad (3.28a)$$

$$(-\overline{B}^+_{k-1}, D, \overline{B}^-_k) \delta Q^* = D \cdot \delta Q^{**} \quad (3.28b)$$

$$(-\overline{C}^+_{l-1}, D, \overline{C}^-_l) \delta Q = D \cdot \delta Q^* \quad (3.28c)$$

식(3.27)의 RHS 항에 점성항을 추가할 수 있으며 이 점성항은 외재적으로 처리하였다.

#### 4. 특성경계조건(Characteristic Boundary Condition)

본 경계조건의 배경은 1982년 AIAA에 발표된 Lombard et al.[9]의 이론을 근간으로 이를 3차원 code에 확장시킨 것이다. 이 장에서 기술하려는 특성경계조건의 근본 개념은 각 방향 ( $\xi, \eta$ , or  $\phi$ ) 의 경계 면에서 그 방향에의, 예를 들면  $\xi$ -방향 내부점들에서 적용된 부분적으로 1차원으로 분리된 방정식은

$$\left[ -\tilde{A}^+_{j-1}, D, \tilde{A}^-_j \right] \begin{bmatrix} \delta Q_{j-1} \\ \delta Q_j \\ \delta Q_{j+1} \end{bmatrix} = RHS \quad (4.1)$$

의 형태를 유지하면서 내부 점과 경계 점에의 지배방정식을 동시에 푸는 소위 내재적 경계조건 처리이다. 예로  $j(\xi)$  방향으로 선형 이산화된 upwind 방정식은 다음과 같다.

$$(I + \tilde{A}^+_{j-1} \nabla + \tilde{A}^-_j \Delta) \delta Q = -\tilde{A}^+_{j-1} (Q_j - Q_{j-1}) - \tilde{A}^-_j (Q_{j+1} - Q_j)$$

$$\text{여기서, } I \equiv \frac{I}{\Delta t} \quad (4.2)$$

왼쪽경계  $j=1$  에서는 계산 영역의 외부에서 오는 것들을 포함하면

$$(I + \tilde{A}^+_0 \nabla + \tilde{A}^-_1 \Delta) \delta Q = -\tilde{A}^+_0 (Q_1 - Q_0) - \tilde{A}^-_1 (Q_2 - Q_1)$$

or

$$-\tilde{A}^+_0 \delta Q_0 + (I + \tilde{A}^+_0 - \tilde{A}^-_1) \delta Q_1 + \tilde{A}^-_1 \delta Q_2 = RHS \quad (4.3)$$

으로 나타나게 된다.

본 연구에서 적용하는 특성경계조건은 영역의 외부에서 오는 정보는 생략을 하되 그 효과를 비정상 항인  $\delta Q$  를 통하여 모델을 하고 내부 점  $j=2$ 에서  $j=1$ 로 전달되는 플럭스는 유지하려는 것이 기본 원리이다. 따라서 식(4.3)은

$$(I + \tilde{A}^-_1 \Delta) \delta Q_1 = -\tilde{A}^-_1 (Q_2 - Q_1) \quad (4.4)$$

으로 나타내지고  $\tilde{A}$  의 정의를 도입하면 다음

과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{I}{\Delta t} \overline{M T} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \delta Q_1 \\ & + \overline{M T} \overline{\Lambda} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} (\delta Q_2 - \delta Q_1) \\ & = -\overline{M T} \overline{\Lambda} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} (Q_2 - Q_1) \end{aligned} \quad (4.5)$$

이때 식(4.5)의 LHS의 첫째 항을 다음같이 근사식으로 표현하고

$$\begin{aligned} \frac{I}{\Delta t} \overline{M T} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \delta Q_1 & \approx \frac{I}{\Delta t} \overline{M T} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \delta Q_1 \\ & \Rightarrow \frac{I}{\Delta t} \overline{M T} \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} \delta Q_1 \\ & = \frac{I}{\Delta t} \overline{M T} \delta \tilde{Q}_1 \end{aligned}$$

$$(\overline{T}^{-1} \rightarrow \overline{T}^{-1'})$$

여기서 양변의  $\overline{M T}$  를 소거하였을 때

$$\frac{I}{\Delta t} \delta \tilde{Q}_1 + \overline{\Lambda} \Delta \delta \tilde{Q}_1 = -\overline{\Lambda} \Delta \tilde{Q}_1 \quad (4.6)$$

과 같이 특성방정식으로 자동적으로 변환된다. 이때 식(4.5)의 양변에 가상의 외부점  $j=0$ 에 상응한  $\tilde{A}^+_0 = \tilde{A}^+$  ] $^j=1$ 의 관련 플럭스들이 생략되고 이 효과를  $\delta \tilde{Q} = T^{-1} M^{-1} \delta Q$  에서  $\delta \tilde{Q} = T^{-1} M^{-1} \delta Q$ 로 변환하였다. 원래형태의 N-S 방정식의 특성변수들은

$$\delta \tilde{Q} = [\delta S, \delta W_1, \delta W_2, \delta P^+, \delta P^-]^T \quad (4.7)$$

로  $\lambda_1$ 을 지닌 엔트로피 변화  $\lambda_2, \lambda_3$ 에 상응한  $\xi = \text{constant}$  면에 평행하고  $\eta$ 방향과  $\phi$ 방향으로 tangential 속도의 변화 그리고  $\lambda_4$ 를 갖고 왼쪽에서 오른쪽으로 이동하는(right running)  $P^+$ -compatibility,  $\lambda_5$ 를 갖고 오른쪽에서 왼쪽으로 이동하는(left running)  $P^-$ -compatibility를 나타내고 있다. 이때 경계면  $j=1$ 에서는 흐름의 방향에 따라 또는 경계의 형태에 따라 inflow, outflow 또는 wall이 될 수 있으며 본 연구에서는 가장 흔히 사용되는 세 가지 경우에 대하여 예를 들고자 한다. 이때 밖에서 경계면으로 들어오는 incoming characteristics 에 해당하는 원래의 변수  $\delta \tilde{Q}$  대신에 그때의 물리적 조건에 가장 적합하다고 생각되는 변수  $\delta \tilde{Q}'$ 로 변환하여 이를  $T^{-1}$ 의 상응하는 행렬의 열을  $T^{-1}$ 로 대신하여 나타낸다. 다음의 예를 들어보자.

### 4.1 아음속 입구 경계조건 (subsonic inflow condition)

아음속 입구 경계조건의 경우 특성변수  $\delta \tilde{Q}$ 의 성분 중

$$\delta \tilde{Q}_1 = \delta(\text{엔트로피}),$$

$$\delta \tilde{Q}_2 = \delta(\eta\text{-방향 tangential velocity}) = 0,$$

$$\delta \tilde{Q}_3 = \delta(\phi\text{-방향 tangential velocity}) = 0,$$

$$\delta \tilde{Q}_5 = \delta(P^-\text{compatibility})$$

를 원래의 변수로 유지하고 네 번째 변수를 right-to-left characteristics  $P^+$ 에서 total enthalpy  $H$ 로 변경한다. 즉 이때  $\overline{\Lambda}_4^- = 0$  이므로 식(4.6)은 단순히  $\delta \tilde{Q}_4 = 0$  로 변경되며  $\delta(P^+) = 0$  에서  $\delta(H) = 0$  로 바꾸어 적용한다.  $H = \frac{\gamma P}{\rho} + q^2$  이므로 또,

$$\delta \tilde{Q} = T^{-1} M^{-1} \delta Q = T^{-1} \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \rho \delta u \\ \rho \delta v \\ \rho \delta w \\ \delta P \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

를 상기시키면  $n$  번째 열의  $\tilde{Q}$  를 바꾸려면  $M^{-1}$ 과  $\delta Q$ 는 고정이 되어 있으므로 상응하는  $T^{-1}$ 의 열을 바꾸기만 하면 자연히  $\delta \tilde{Q} = \delta(P^+)$ 에서  $\delta \tilde{Q}' = \delta(H)$ 로 변환이 된다. 즉,

$$T^{-1}]_{4th} = \left[ 0 \quad \frac{\tilde{\xi}_x}{\rho c \xi} \quad \frac{\tilde{\xi}_y}{\rho c \xi} \quad \frac{\tilde{\xi}_z}{\rho c \xi} \quad \frac{1}{\gamma P} \right]$$

에서

$$T^{-1}]_{4th} = \left[ -\frac{1}{\rho} \quad \frac{u}{\gamma P} \quad \frac{v}{\gamma P} \quad \frac{w}{\gamma P} \quad \frac{1}{P} \right]$$

로 4번째 열을 바꾸어 주면 된다. 위에서 전 엔탈피가 아닌 다른 새로운 변수 또는 여러 변수들의 조합으로 바꾸어 그때의 incoming characteristics를 가장 잘 나타내는 새로운 변수를 사용할 수도 있을 것이다.

### 4.2 아음속 출구 경계조건 (Subsonic Outflow)

오른쪽 경계면  $j=N$ 에서는 위의 방정식(4.2)가

$$\begin{aligned} (I' + \tilde{A}_{N-1}^+ \nabla) \delta Q_N = \\ - \tilde{A}_{N-1}^+ (Q_N - Q_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

로 축소되며 외부에서(left-to-right) 오는 특성을 포함하는  $\tilde{A}_N^-$  항들을 삭제하고 이의 효과를  $I'$ 에서  $I''$ 로 대체한다. 즉

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \overline{M T} \overline{T}^{-1} M^{-1} \delta Q_N \\ + \overline{M T} \overline{\Lambda}^+ \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} (\delta Q_N - \delta Q_{N-1}) \\ = - \overline{M T} \overline{\Lambda}^+ \overline{T}^{-1} \overline{M}^{-1} (Q_N - Q_{N-1}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

이때 평균값은 구간  $[N-1, N]$ 에서 산술 평균된 값이다.

$\overline{M T}$ 를 상쇄하면 식(4.10)은

$$\frac{1}{\Delta t} \delta \tilde{Q}'_N + \overline{\Lambda}^+ \nabla \delta \tilde{Q}_N = - \overline{\Lambda}^+ \nabla \tilde{Q}_N \quad (4.11)$$

이며 첫 번째에서 네 번째 특성에 해당하는 방정식은

$$\frac{1}{\Delta t} \delta \tilde{a}_N + \overline{\Lambda}^+ \nabla \delta \tilde{a}_N = - \overline{\Lambda}^+ \nabla \tilde{a}_N \quad (4.12)$$

이며 원래 방정식들을 변형 없이 사용한다.

5번째 특성방정식은  $\overline{\Lambda}^+]_5 = \lambda^+_5 = 0$ 이며 이

때는  $\frac{1}{\Delta t} \delta \tilde{Q}]_{5th} = 0$ 로 간략화 된다. 이때 5번째 특성은 계산영역 오른쪽(외부)에서  $j=N$ 으로 들어오는 것으로 이것이 무엇인지 우리는 알지 못한다. 다만 경험적으로 5번째 특성에 해당하는 변수를  $\delta \tilde{Q}]_{5th} = \delta p$ 로 압력을 정한다. 실제 3차원 코드에서는  $\delta p$ 가 아니라 오른쪽에  $\eta$ -와  $\phi$ -방향의 flux 차이에 의한 값이 더해지므로 경계면에서의 각 격자점마다 압력  $p$ 가 각각의 값으로 수렴하게 되어 경계면의 압력분포  $p$ 를 계산반복에 따라 찾아가게 된다.

식(4.10)의 형태를 유지하면서 실제로는 원래 혹은 모델화 되어진 방정식을 오른쪽 경계에서 푸는 방법은  $\lambda_5^-$ 에 해당되는  $T^{-1}]_{5th}$ 를

$$\left[ 0 \quad -\frac{\tilde{\xi}_x}{\rho c \xi} \quad -\frac{\tilde{\xi}_y}{\rho c \xi} \quad -\frac{\tilde{\xi}_z}{\rho c \xi} \quad \frac{1}{\gamma P} \right] \quad \text{에서}$$



$[0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{\gamma P}]$ 로 바꾸는 것이다. 이는

$$\begin{aligned} \delta \tilde{Q} &= T^{-1} M^{-1} \delta Q \\ &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{\gamma P}] \begin{bmatrix} \delta \rho \\ \rho \delta u \\ \rho \delta v \\ \rho \delta w \\ \delta P \end{bmatrix} \\ &= \frac{\delta P}{\gamma P} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

로 귀착되기 때문이다. 이때  $\frac{1}{\gamma P}$  는 원래  $T^{-1}]_{5h}$ 의 5번째 행이  $\frac{1}{\gamma P}$  이기 때문에 차원을 일정하게 맞추어 주기 위함이다.

여기서  $\delta \tilde{Q}]_{5h} = \delta(c^2)$  과 같이 음속의 제곱 항을 사용하면  $T^{-1}]_{5h}$  는  $T^{-1}]_{5h} = [-\frac{P}{\rho^2} \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{\rho}]$  와 같이 표현된다.

### 4.3 단열 벽면 경계조건

단열의 벽면조건이 지금까지 사용한 CBC 중에서도 가장 안정한 것으로 여러 경우의 계산 결과에서 입증되었다. 이때는 벽면에서 단열 ( $\Delta T=0$ ), no-slip condition( $u=v=w=0$ ) 의 4가지 경계조건 외에 왼쪽벽면(left wall)에서는 4번째  $P^+$ -compatibility equation 또는 오른쪽 벽면(right wall)에서는  $P^-$ -compatibility equation을 원래 방정식의 형태로 사용한다. 왼쪽 벽면에서는 식(4.5)로 부터

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \delta T_{emp} + \delta T_{emp} &= \Delta T_{emp} \\ \delta \bar{W}_\eta &= 0, \quad \delta \bar{W}_\xi = 0, \quad \delta \bar{W}_z = 0 \\ \frac{1}{\Delta t} \overline{M T} \delta P^- + \overline{M T} \lambda^-_5 \Delta P^- & \\ = -\overline{M T} \lambda^-_5 \Delta P^- & \end{aligned} \quad (4.14)$$

이때 첫 번째  $\delta Temp$ -Equation 의 오른쪽 항  $\Delta Temp$  가  $Temp$ 의 초기 값에 무관하게 단열조건으로 수렴하게 하는 중요한 역할을 하게 된다. 오른쪽 벽면에서는 다음과 같은 형태이고,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \delta T_{emp} + \delta T_{emp} &= -\Delta T_{emp} \\ \delta \bar{W}_\eta &= 0, \quad \delta \bar{W}_\xi = 0, \quad \delta \bar{W}_z = 0 \\ \frac{1}{\Delta t} \overline{M T} \delta P^+ + \overline{M T} \lambda^+_4 \nabla \delta P^+ & \\ = -\overline{M T} \lambda^+_4 \nabla P^+ & \end{aligned} \quad (4.15)$$

4번째 특성식만이 원래의 N-S 방정식으로부터 남겨지고 나머지 4개의 방정식은 단열 및 no-slip의 조건을 나타내게 된다. 식(4.15)의 첫 번째 식의 오른쪽에서는 왼쪽 벽면의  $+\Delta T_{emp}$  대신  $-\Delta T_{emp}$  이 사용되어  $Temp$ 의 기울기를 벽면에 수직(normal)하게 잡아주고 있고, 4번째 식은 원래의  $P^+$ -compatibility를 유지하고 있음을 주지하고자 한다. 또한 속도에 대하여는 delta form으로 나타내져 있기 때문에 유동장의 초기화때 벽면에서는  $u = v = w = 0$  를 초기에 만족시키도록 하는 것이 중요하다. 그렇지 않을 경우 no-slip condition이 벽면에서 유지되지 않는다.

### 5. 경계조건의 응용성 검증

이 장에서는 CFDS 기법에 특성경계조건을 적용시킨 계산결과를 설명한다. 세 가지 속도영역 즉, 천음속과 초음속 및 극초음속 흐름에서 코드의 해석결과를 기존 자료와 비교하고자 한다. 5.1절에서는 0012 익형에 대한 천음속 계산결과를, 5.2절에서는 고양각을 가지는 ogive 문제에 대한 계산 결과를 실험치와 비교하였고, 5.3절에서는 실린더와 같은 무딘 물체가 극초음속으로 비행하는 문제의 결과를 문헌에 발표된 결과와 비교하였으며, 또한 5.4절에서는 S-duct 내부유동에 대하여 몇 가지 출구경계조건들과 실험자료 및 타 계산결과와 서로 비교하였다. 이들 여러 속도 영역에 대한 적용결과에서 CFDS 해석 결과가 물리적으로 타당함을 보여 주고 있다.

### 5.1 0012 익형에 대한 천음속 유동

CFDS 코드의 천음속 특성을 0012 익형에 대한 흐름을 수치해석으로 알아보았다. 코드에 사용된 난류모델은 Baldwin-Lomax(B-L)[10] 대수모델이며, 자유류의 조건은 마하수가 0.799, 받음각이 2.26도 이다. 계산 격자는 익형위에 209개, 벽면에 수직하게 65개의 격자점을 분포시킨 c-type 이다. 점성류 해석을 위해서 첫 번째 격자의  $y^+$  는 5보다 충분히 작게 유지하였고, 계산영역은 익형코드의 20배를 반경으로 하였다. 익형표면에서는 no-slip과 벽면에 대한 특성경계조건을, 원방경계(far-field)와 익형 뒷 전 후류 출구 쪽은 특성경계조건을 부과하였다. 그림1에 1차 정확도로 계산한 결과를 마하수 0.1 간격으로 등마하수 분포를 나타냈으며 벽면 위에서 점성유동의 효과를 포함한 경사진 충격파를 볼 수 있다. 또한 익형표면의 압력계수와 실험치를 그림2에 서로 비교하였다. 여기서 사각형 기호가 실험자료[11]이고 점선은 1차 정확도, 실선은 2차 정확도의 수치해석 결과를 나타낸다. 공간에 대한 정확도를 높이기 위해서 minmod 제한자를 이용한 MUSLE 형태를 사용하였다. 비교적 익형표면의 압력분포가 실험치와 계산치가 서로 잘 일치하지만 충격파의 위치가 차이가 나는데, 이것은 참고문헌[11]의 결과에서도 확인되듯이 난류모델의 영향으로 분석된다. 많은 계산들이 충격파의 위치포착을 실험치보다 downstream에서 하고 있는데 천음속 특성으로 보아 충격파의 위치는 유동조건에 민감하므로 그림1의 차이는 별로 큰 차이가 아니라 사료된다. 그러므로 천음속 영역에서 CFDS의 해석결과는 비교적 정확도를 갖는 것으로 판단된다.

### 5.2 초음속 ogive

Nose 부분이 3 caliber 인 secant ogive와 동

체로 구성된 3차원 slender body 에 대하여 초음속 유동해석을 수행하였다. 자유류 흐름은 마하수 3.0, 받음각 10, 레이놀즈 수  $6.0 \times 10^6$  이다. 난류모델은 기존 B-L 모델을 고양각 흐름에서 잘 맞도록 수정한 Degani-Schiff(D-S)[12]모델을 사용하였다. 계산 격자는 길이방향으로 84개, 벽면에 수직하게 65개, 원주방향으로 62개를 분포시켰으며, 물체가 대칭이므로 반쪽 면만 계산 영역으로 하였다. 동체표면에서는 no-slip과 벽면 특성경계조건을, 원방경계는 입/출구 특성경계조건을 적용하였다. 그림3은 등마하수 분포로써 충격파의 모양을 잘 보여주고 있다. 그림4에는 동체와 그 길이 방향의 윗면과 아랫면의 압력분포를 실험결과[13]와 비교하였다. 그림에서 x축은 동체직경으로 무차원화 시킨 caliber 단위이고 y축은 정압력(static pressure)을 전압력(total pressure)로 무차원화 한 값이다. 실험자료중 아랫면과 윗면의 압력 값은 각각 원형기호와 사각형 기호이다. 점선과 실선은 각각 1차 및 2차의 공간정확도로 계산한 결과로서 이들은 서로 유사하나 2차 정확도의 계산 결과가 실험치와 더 잘 일치함을 보여주고 있다. 그림5는 동체  $x=5.77$  caliber 위치에서 원주방향의 압력분포를 실험치와 비교한 것이며, 여기서도 2차 정확도의 결과가 실험치와 잘 일치한다. 그림에서 원주방향으로 100도 부근에서 cross-flow 박리가 발생하는데, B-L 난류모델을 사용하면 이 부분의 압력 값이 실험치와 차이를 보인다. 따라서 B-L 모델에서 사용하는 함수  $f(y)$ 를 변형하는 D-S 모델을 사용하므로써 실험치와 잘 일치하는 결과를 얻었다.

### 5.3 극초음속 무딘 물체

반경이 50 cm 인 2차원 무딘 물체가 마하수 8.0 인 자유흐름에 놓인 유동[14]의 수치해석을 수행하였다. 계산영역과 격자는 그림6과 같고

격자수는 101x50 이고, 적용된 경계조건은 ogive 문제와 유사하다. Roe scheme 이나 CFDS와 같은 flux difference 방법에서는 극초음속 무딘 물체 수치계산시 carbuncle과 같은 비 물리적인 해가 발생되며 이러한 현상을 치유하기 위한 여러 방법들이 문헌에 제시되었다. 이런 충격파의 불안정 현상은 격자와 충격파가 서로 평행하게 정렬되어 있고 충격파와 평행한 방향의 속도 성분이 없는 영역에서 발생할 수 있으나, 격자의 간격이 커지면 이 현상이 발생하지 않는 경우도 있다. 본 연구에서는 충격파와 평행한 방향(그림6에서 J 방향)의 고유치  $\lambda_1$ 에 대해서만 수정하였으며 그 결과를 그림7에 제시하였다. 그림7에서  $\lambda_1$  값이 작은 영역에서만 그 값이 수정되었음을 알 수 있다.  $\lambda_1$ 수정 방법은 Sanders et al.[15]이 제안한 방법을 기본으로 하였다. 즉 플럭스를 계산할 때 임의의 계산점 부근의 H형으로 나타내어지는 격자점들에 대응하는 시스템의 고유치중에서 가장 큰 값으로 대처하여  $\lambda$ 를 수정(fixing)하는

$$\lambda_{j+1/2,k}^H = \max(\lambda_{j+1/2,k}, \lambda_{j,k+1/2}, \lambda_{j,k-1/2}, \lambda_{j+1,k+1}, \lambda_{j+1,k-1/2})$$

를 사용하였다. 그림8의 (a)는 등마하수 분포, (b)는 등압력 분포이고 (c)는 정체점 선의 물리량(압력, 밀도, 온도)들을 Nakamori[14]의 결과와 비교한 것이다. CFDS 계산결과는 선으로 표시하고 Nakamori 결과는 기호로 표시하였는데 두 계산결과 충격파 위치 및 각 물리량들이 서로 잘 일치한다. 그러므로 격자계와 정렬된 강한 충격파가 예측되는 곳에서는  $\lambda_1$ 에 대한 수정만으로 충분히 안정되고 정확한 수치해석 결과를 얻을 수 있으며, 보다 복잡한 3차원 문제에서의 체계적인 eigenvalue fixing 방법에 대해서는 더 많은 연구가 필요하다.

#### 5.4 S-duct 내부유동에 대한 출구 경계조건 영향비교

S-duct 입구가 마하수 0.6, Reynolds 수  $1.76 \times 10^6$  인 흐름에 놓인 관유동에 대해 출구경계조건변화에 대한 결과를 검토하였다. 내부유동에 대한 실험문헌은 참고문헌[16]에 잘 정리되어 있으나 대부분이 낮은 마하수 영역인 비압축성 유동에 대한 실험이다. 내부유동을 수치 해석할 때 출구면에 대한 경계조건 설정이 중요한 문제이며, 대부분의 상용코드나 연구자들이 extrapolation 과 정압력을 고정시키는 정도의 출구면 경계조건을 적용하고 있다. 본 CFDS 코드에서는 아음속 출구조건으로 특성방정식으로 나타내지는 4개의 원래의 N-S 방정식을 원형대로 유지하고, 외부에서 오른쪽 경계면으로 들어오는 특성치를 모델링 한다. 특성변수로는 일반적으로 정압력(p)를 선택하나 몇 가지 변수에 대한 결과를 검토하기 위하여 음속( $c^2$ )과 원래의 P\*-Compatibility 방정식을 선택하여 그 결과를 서로 비교하였다.

원형 단면의 S-duct에 대한 형상과 격자계는 그림9와 같고, 위치  $x=0$ 에서 관이 굽어지기 시작한다. S-duct의 구성은 관 입구(4.6D), S-duct 구간(30deg. - 30 deg.), 관 출구(10D)로 구분되며, 여기서 D는 관의 직경으로 16.51cm 이다. 그림9의 격자계는 대칭면으로 관의 일부만을 보여주고 있으며 전체 격자계는  $77 \times 33 \times 49$  이다. 실험에서 측정된 부분은  $x/D = -2(\text{I}), 2^\circ(\text{II}), 15^\circ(\text{III}), 32^\circ(\text{IV}), 45^\circ(\text{V}), 60^\circ(\text{VI})$  이며, 그림9의 형상에서 윗표면이  $\phi = 0^\circ$ , 중간이  $\phi = 90^\circ$ , 그리고 아래 표면이  $\phi = 180^\circ$ 이다. 그림10의 (a)는 S-duct 곡면의 대칭면에 대한 등 마하수 분포이고 (b)는 등압력분포이다. 그림10(b)에서 오목한 곡면은 압력이 높고 볼록한 곡면에서는 압력이 낮아지는 것을

알 수 있다. 또한 그림11에는 출구경계조건으로 세 종류의 특성경계조건을 적용한 수치해석 결과와 참고문헌[17] 및 실험자료의 압력분포를 서로 비교하였다. 출구면 경계조건은 4.2절에서 설명한  $\delta(p)=0$ ,  $\delta(c^2)=0$ ,  $P^-$ -compatibility equation(원래 형태의  $T^{-1}]_{5th}$ ) 으로 차례로 BC1, BC2, BC3로 명명하였다. BC1과 BC2의 결과는 서로 유사하고 BC3의 결과는 이들과 약간의 차이를 보인다. 그림11의 (a),(b),(c)는  $\phi=0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  표면의 압력분포이다. 그림(a)에서 수치해석 결과는 오목한 면(x좌표 1-3구간)에서 실험치와 차이를 보이는 반면 볼록면(x좌표 3-5구간)에서는 실험치와 잘 일치하는 경향을 보이고, 참고문헌[17]의 결과는 오목면에서 실험치와 잘 일치하고 볼록면에서 실험치와 차이를 보이는데 그림(c)에서도 이러한 경향을 볼 수 있다. 점선의 사각형으로 표시된 계산결과를 중첩하였다. 이 결과는 중앙차분을 사용하는 in-house code로써 관입구와 출구의 경계조건으로 자유류의 압력을 사용한 결과이다. 출구의 압력값에 따라서 CFDS의 경우 경계조건 BC1( $\delta p=0$ ), 또는 BC2( $\delta c^2=0$ )를 적용한 것이 전반적으로 실험치와 근사한 수치해를 보여주고 있다. 그림11의 CFDS와 참고문헌[17]의 수치계산에서는 B-L 난류모델이 사용되었다. 경계조건의 민감성을 나타내는 예로 그림11(a)에 duct 면을 따르는 압력분포가 민감하게 얻어지는 것을 볼 수 있다.

그림11의  $\phi=180^\circ$ 일 경우 오목(concave)한 곡면위의 계산치와 실험치의 차이가 크게 나타나고, 이곳이 난류유동의 영향을 많이 받는 곳으로 간주되어 그림9-11의 결과에 사용한 B-L 모델 이외에 1-Equation 난류모델인 Baldwin-Barth(B-B)[18] 모델을 적용해보았다. 그림12에 B-B 난류모델을 적용한 결과와 B-L 난류모델을 적용한 결과를 실험치와 서로 비교하였다.

그림12의 (a)에서 B-B 모델의 결과가 오목한 면에서도 실험치에 잘 일치함을 보이고, 그림(b),(c)에서도 B-B 모델의 결과가 B-L모델의 결과보다 실험치에 더 잘 맞음을 보여준다. 그러므로 복잡한 유동해석에서는 더욱 진보된 난류모델의 적용이 올바른 물리량의 예측에 도움이 될 수 있음을 보여주고 있다.

## 6. 결론

CFDS 수치해석 기법의 알고리즘 전개와 수식유도 과정을 자세히 기술하여 이 수치기법에 대한 이해를 증진시키도록 노력하였으며 이에 필요한 각 행렬 값들을 제시하였다. 또한 특성경계조건 적용에 대한 설명으로 벽면 및 아음속 입구와 출구면에서 방정식의 전개와 특성변수 선정에 대하여 몇 가지 예를 들어 설명하였다. 코드의 성능을 나타내기 위하여 천음속 익형, 초음속 유도탄 동체, 극초음속 무딘물체의 수치해를 해석하였으며, 수치해석 결과가 실험에서 측정된 압력이나 타 계산 결과와 서로 잘 맞는 것을 확인하였다.

출구경계면의 중요성을 나타내는 문제로 S-duct 내부유동의 출구면 경계조건에 대해서 몇 가지 특성변수로 정압력(p), 음속(c),  $P^-$ -compatibility 식을 적용한 결과를 서로 비교하였다. 그 결과 압력과 음속을 특성변수로 선택한 경우의 해석 결과가 실험치와 가장 근접하였다. 이 내부유동 해석에서도 난류모델의 선정이 유동에 영향을 주고있음을 보여주었다.

## 참고문헌

- [1] Quirk, J. J., "A Contribution to the Great Riemann Solver Debate," Intl. J. for Numerical Methods in Fluids, Vol. 18, pp. 555-574, 1994.

- [2] Steger, J. L. and Warming, R. F., "Flux Vector Splitting of the Inviscid Gasdynamics Equations with Application to Finite Difference Methods," *J. Comput. Phys.*, 40, 1981, pp.263-293.
- [3] Van Leer, B., "Flux-Vector Splittings for the Euler Equations," *Lector Notes in Physics*, 170, 1982, pp.507-512.
- [4] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Chap. 16, 1989, John Wiley & Sons.
- [5] Roe, P. L., "The Use of Riemann Problem in Finite Difference Schemes," *Lecture Notes in Physics*, Vol. 141, 1981, pp. 354-359, Berlin, Springer Verlag.
- [6] Lombard, C. K., "CSCM for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics for Real and Perfect Gases," NASA-CR-166307, 1982.
- [7] Lombard, C. K. and Bardina, J., "Multi-Dimensional Formulation of CSCM - An Upwind Flux Difference Eigenvector Split Method for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA-83-1895, AIAA 6th CFD Conference, July 1983.
- [8] Bardina, J. and Lombard, C. K., "Three Dimensional Hypersonic Flow Simulations with the CSCM Implicit Upwind N-S Method," AIAA-87-1114-CP, June 1987.
- [9] Lombard, C. K. et al., "CSCM for Splitting the Hyperbolic Systems of Gasdynamics with Computed Boundaries for Real and Perfect Gases," June 1982.
- [10] Baldwin, B. and Lomax, H., "Thin Layer Approximation and Algebraic model for Separated Turbulent Flows," AIAA-78-257, Jan. 1978.
- [11] Terry L. Holst, "Viscous Transonic Airfoil Workshop Compendium of results," AIAA-87-1460.
- [12] D. Degani, L.B. Schiff and Y. Levy, "Numerical Prediction of Subsonic Turbulent Flows over Slender Bodies at High Incidence," *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 12, 1991.
- [13] R. P. Pekdis, W.B. Sturek, "Surface Pressure Measurement on Slender Bodies at Angle of Attack in Supersonic Flow", Memorandum Report ARBRL-MR-02876, 1978.
- [14] I. Nakamori and Y. Nakamura, "An Upwind Scheme for Inviscid and Viscous Hypersonic Flow," AIAA-95-1732-CP.
- [15] Richard Sanders, Eric Morano, and Marie-Claude Druguet, "Multidimensional Dissipation for Upwind Schemes: Stability and Applications to Gas Dynamics," *J. Comput. Phys.* 143, 511-537, 19998.
- [16] Vakili, A., Wu, J.M., Hingst, W.R., and Towne, C. E., "Comparison of Experimental and Computational Compressible Flow in a S-Duct," AIAA Paper 84-0033, Jan. 1984.
- [17] G. J. Harloff, C.F. Smith, J.E. Bruns, and J.R. DeBonis, "Navier-Stokes Analysis of Three-Dimensional S-Ducts," Sverdrup Technology, Inc., Brook Park, Ohio 44142, *Journal of Aircraft* Vol.30, No. 4, July-Aug. 1993.
- [18] B. S. Baldwin and T. J. Barth, "A One-Equation Turbulence Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows," AIAA-91-0610, 29th Aerospace Science Meeting, 1991.

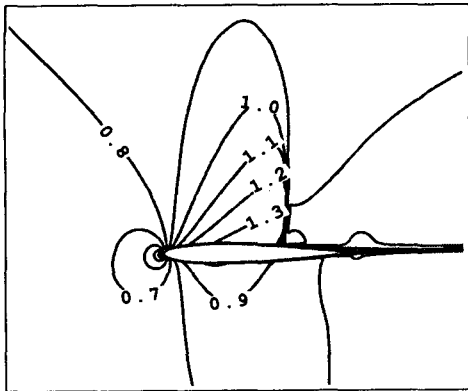


Fig. 1. Mach contours around NACA 0012 airfoil at  $M=0.799$ ,  $AOA=2.26$

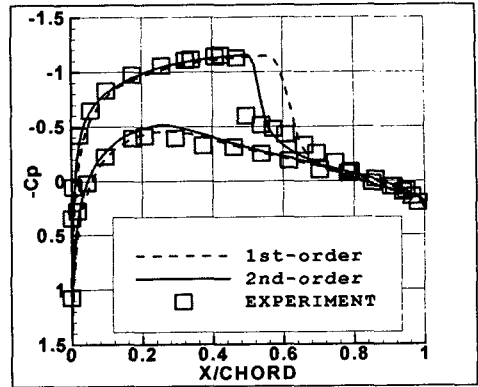


Fig. 2. Wall pressure distribution over NACA0012 airfoil at  $M=0.799$ ,  $AOA=2.26$

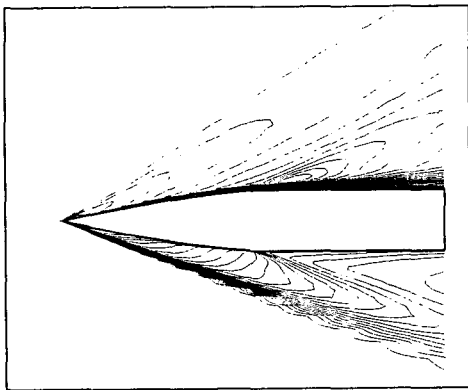


Fig. 3. Mach contours in symmetric plane at  $M=3.0$ ,  $AOA=10.0$

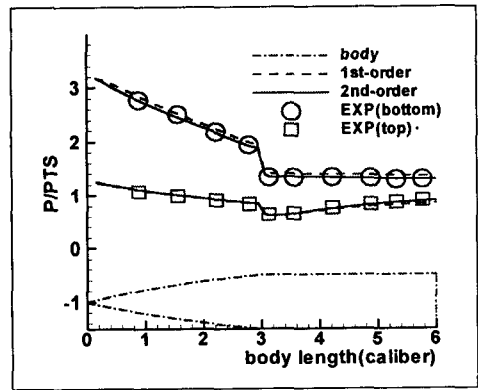


Fig. 4. Surface pressure distribution over a ogive at  $M=3.0$ ,  $AOA=10.0$

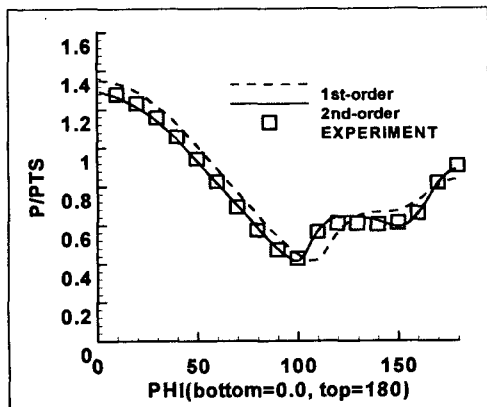


Fig. 5. Circumferential pressure distribution at  $x=5.77$  for  $M=3.0$ ,  $AOA=10$

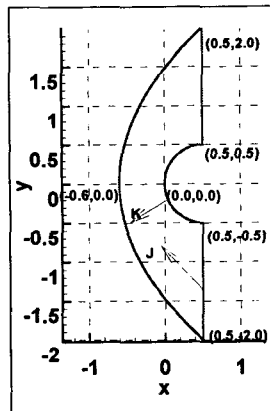


Fig. 6.(a) Domain of Computation.

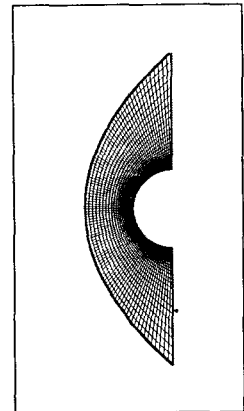


Fig. 6.(b) Grid system(101x50)

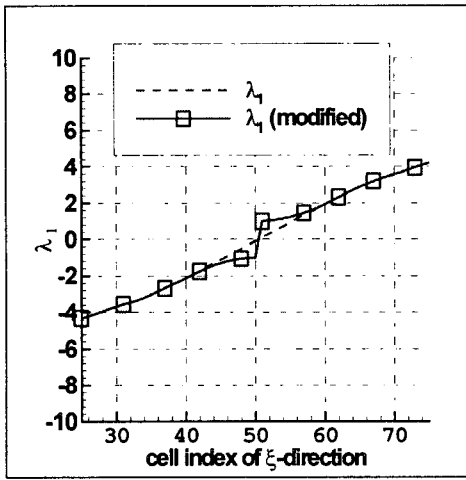


Fig. 7. Comparison of modified  $\lambda_1$  and original  $\lambda_1$

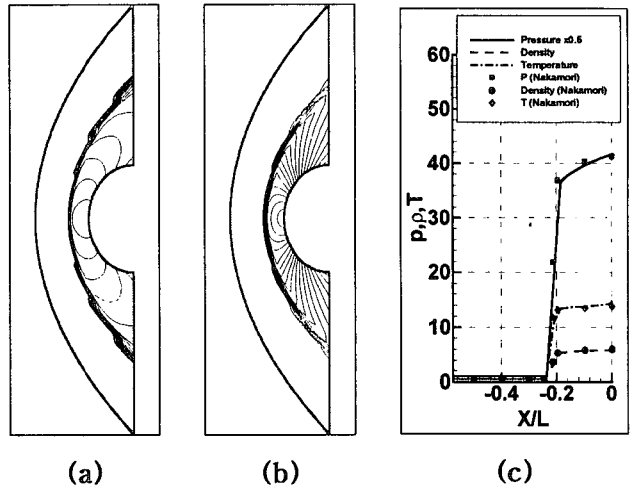


Fig. 8. Hypersonic flow at Mach 8: (a) Mach contours; (b) pressure contours; (c) Stagnation line properties.

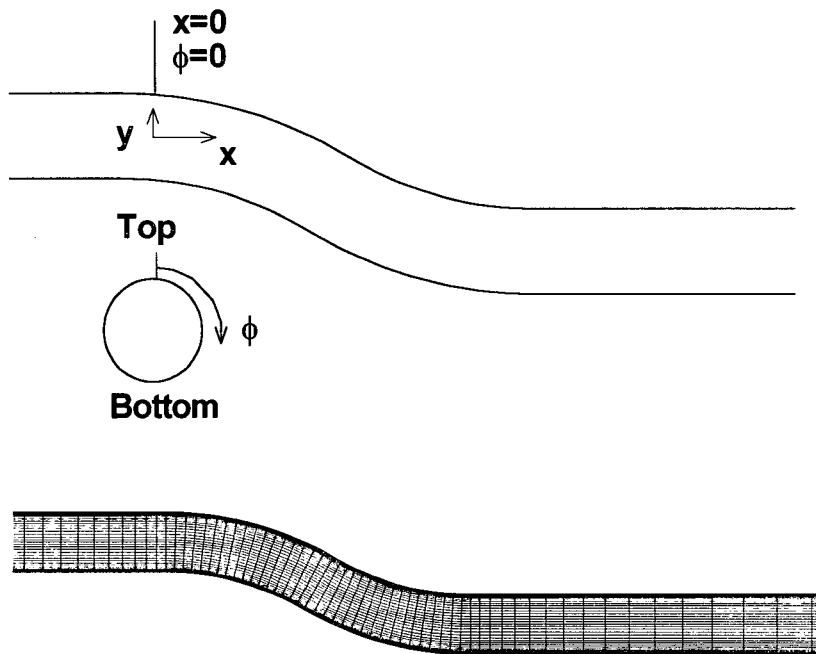
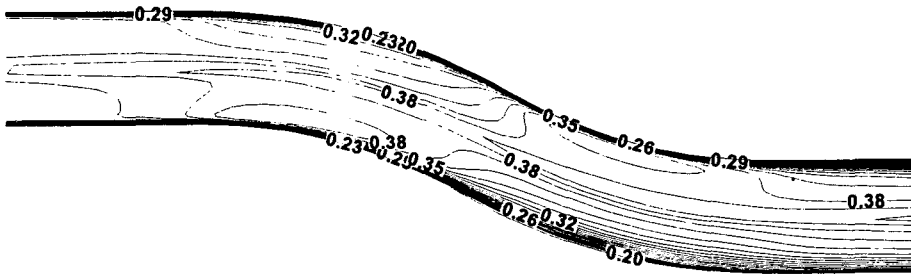
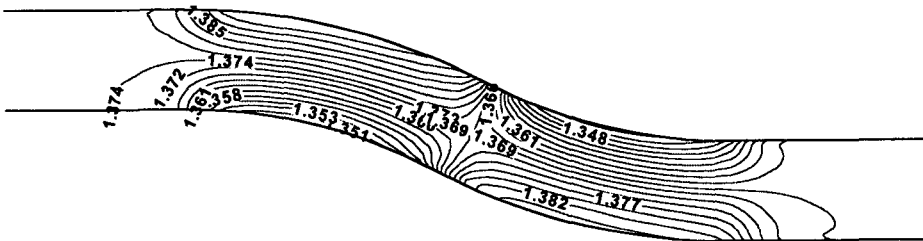


Fig. 9. Geometry and grid system for circular S-duct(77x33x49)

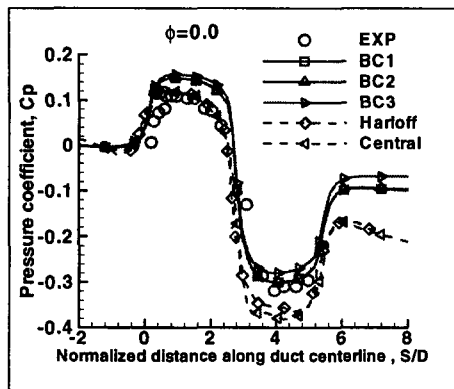


(a)



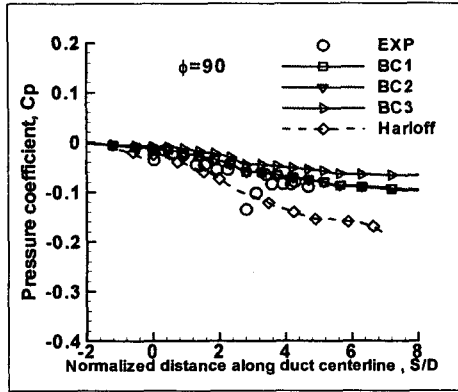
(b)

Fig. 10. (a) S-duct Mach contours in symmetric plane  
 (b) S-duct pressure contours in symmetric plane

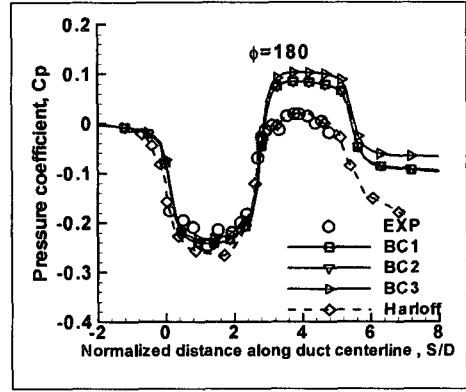


(a)



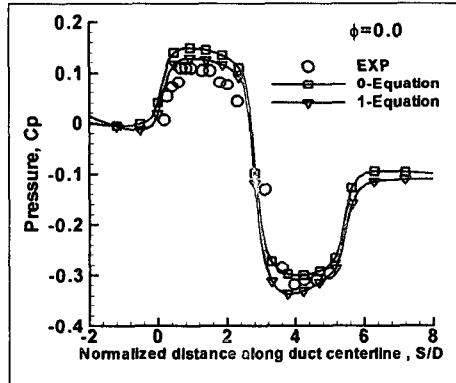


(b)

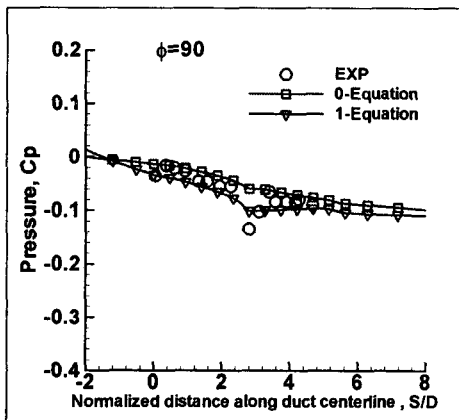


(c)

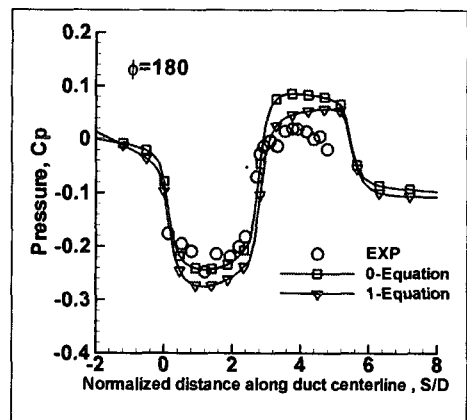
Fig. 11. S-duct surface pressure distributions for three different characteristic boundary conditions, (a)  $\phi=0$  (b)  $\phi=90$  (c)  $\phi=180$



(a)



(b)



(c)

Fig. 12. Comparison of S-duct surface pressure distributions between computation and measurement. (a)  $\phi=0$  (b)  $\phi=90$  (c)  $\phi=180$