

SIMPLE 알고리즘을 이용한 압축성유동해석

안희섭^{*1}, 손창현^{*2}, 문수연^{*3}

Numerical Calculations of Compressible Flows using a SIMPLE Algorithm

Hee-Sub Ahn, Chang-Hyun Sohn, Su-Yeon Moon

A well-known pressure correction method, a SIMPLE algorithm, is extended to treat compressible flows. Collocated grids are used and density is linked to pressure via an equation of state. The influence of pressure on density in the case of compressible flows is implicitly incorporated into the extended SIMPLE algorithm. The first-order Upwind and high-order Quick scheme are compared with respect to an accuracy and convergence time at all speeds. The extended method is verified on a number of test cases and the results are compared with other numerical results available in the literature. The calculated results show that the Quick scheme improves accuracy at all speed and also reduces the calculation time at supersonic flows, compared with the Upwind scheme.

Key Words: 압축성유동(Compressible Flow), 심플알고리즘(SIMPLE Algorithm), 충격파(shock), 유한체적법(Finite Volume Method)

	기호설명		
u	: 직각좌표계 속도	P	: 압력
U	: 체적면 수직방향속도	T	: 온도
\dot{m}	: 질량유량	S	: 생성항
x	: 직각좌표계	V	: 체적
η	: 일반좌표계	c	: 음속
ρ	: 밀도	a	: 이완계수
\vec{T}	: 응력텐서	γ	: 비열비
J	: Jacobian		상첨자
R	: 기체상수	'	: 수정값
M	: 마하수	o	: 이전값(old value)
		-	: 평균값

하첨자

i, j : 텐서기호
 e, w, \dots : 체적면위치

^{*1} 회원, 경북대학교 기계공학부 대학원

^{*2} 회원, 경북대학교 기계공학부

^{*3} 회원, 경북대학교 기계공학부

1. 서 론

일반적으로 유동현상에 대한 수치해석은 비압축성유동과 압축성유동으로 분류하여 연구가 되어왔다. 그러나 공학에서 다루고 있는 많은 유동현상들은 단순히 비압축성 유동 또는 압축성 유동으로 분류하기 힘든 경우가 많이 있다. 예를 들어 램제트 연소실의 경우 화염의 안정성화를 위한 재순환 영역은 낮은 마하수를 가지며 수축팽창노즐을 지나면서 초음속 유동으로 변화하게 된다. 그리고 초음속 유동의 경우에도 박리가 발생하는 경우 박리영역은 매우 낮은 속도를 가지게 된다. 이와 같이 많은 경우에 비압축성 영역과 압축성 영역을 동시에 포함한 유동현상을 해석할 필요성이 있다. 비압축성유동은 압력을 주변수로, 압축성유동은 밀도를 주변수로 하는 점이 두 가지 방법에 있어서 가장 큰 차이라고 할 수 있다. 이러한 차이로 인해 각각의 유동특성에 적합한 수치해석방법이 개발되었고 많이 사용되고 있다. 대표적인 예로써 비압축성 유동에서 속도-압력 coupling을 위한 SIMPLER 계통의 알고리즘⁽¹⁾이나 압축성유동에서 밀도의 변화가 작은 저마하수유동에서 약한 밀도-압력의 coupling을 보완하기 위한 연속방정식에 가상밀도(fictitious density)를 추가하는 방법^(2,3) 등이 있다. 그러나 이러한 방법들은 비압축성과 압축성이 혼합된 유동에서는 사용하기가 힘들며 사용을 하더라도 정확도가 떨어지게 된다.

Karki와 Patankar⁽⁴⁾, Peric⁽⁵⁾ 등은 기존의 비압축성 유동해석방법으로 널리 쓰이는 SIMPLE 알고리즘을 수정하여 아음속부터 초음속까지의 유동장에 대해 해석을 하였다. 본 연구에서는 위의 연구자들이 제시한 수정 SIMPLE 알고리즘을 SIMPLE-C의 형태로 수정하여 압축성유동을 해석하였으며 대류항의 이산화방법이 유동해석의 결과에 미치는 영향과 각 기법간의 수렴성에 대해 연구를 수행하였다

2. 지배방정식 및 이론

2.1 지배방정식

정상상태의 연속방정식, Navier-Stokes방정식, 스칼라량(ϕ)방정식은 아래와 같다.

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = s^m \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} - \vec{T}) = s^u \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi - \Gamma_\phi \nabla \phi) = s^\phi \quad (3)$$

$$\vec{T} = -\left(p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{u}\right) \vec{I} + 2\mu \vec{D} \quad (4)$$

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_m} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

각각의 지배방정식을 일반좌표계로 좌표변환을 하면 지배방정식은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} (\rho U_j) = J s^m \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta_j} (\rho U_j u_i) - \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left\{ \frac{\mu}{J} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \eta_m} \beta_{km} \beta_{kj} \right) \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left\{ \frac{\mu}{J} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \eta_m} \beta_{ki} \beta_{jm} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta_j} (p \beta_{ij}) \\ + \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left\{ \frac{2\mu}{3J} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \eta_m} \beta_{ij} \beta_{km} \right) \right\} = J s_i^u \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta_j} (\rho U_j \phi) - \frac{\partial}{\partial \eta_j} \left\{ \frac{\Gamma_\phi}{J} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta_m} \beta_{km} \beta_{kj} \right) \right\} \\ = J s^\phi \end{aligned} \quad (8)$$

위에서 나타나는 좌표변환함수는 다음과 같다.

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial \eta_j}, \quad U_j = u_m \beta_{mj} \quad (9)$$

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \eta_j} \right) = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{21} \alpha_{12} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \beta_{11} = \frac{b_{11}}{\delta \eta_2}, \quad \beta_{21} = \frac{b_{21}}{\delta \eta_2} \\ \beta_{12} = \frac{b_{12}}{\delta \eta_1}, \quad \beta_{22} = \frac{b_{22}}{\delta \eta_1} \end{aligned} \quad (11)$$

2.2 속도-밀도-압력 coupling

본 연구에서는 모든 변수가 검사체적의 중앙에 저장되는 집중격자계를 사용한다. 검사체적면에서의 속도는 Rodi와 Majumdar⁽⁶⁾에 의해 제시된 운동량보간방법을 통하여 구하고 압력은 선형보간에 의해 구한다.

지배방정식을 이산화시키고 검사체적중앙(P점)에서의 속도성분을 이완계수를 사용하여 나타내면 다음과 같다.

$$u_{1P} = \alpha_u [H_P^u + D_{1P}^u (p_w - p_e) + D_{2P}^u (p_s - p_n)] + (1 - \alpha_u) u_{1P}^o \quad (12)$$

$$u_{2P} = \alpha_v [H_P^v + D_{1P}^v (p_w - p_e) + D_{2P}^v (p_s - p_n)] + (1 - \alpha_v) v_{1P}^o$$

여기서

$$H_P^u = (\Sigma \alpha_{nb}^u u_{1nb} + S_u^U \delta V_P) / A_{PP}^u$$

$$D_{1P}^u = b_{11P} / A_{PP}^u, \quad D_{2P}^u = b_{22P} / A_{PP}^u$$

$$D_{1P}^v = b_{21P} / A_{PP}^v, \quad D_{2P}^v = b_{22P} / A_{PP}^v$$

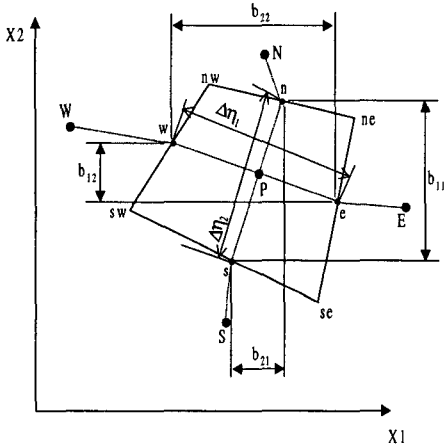


Fig. 1 Geomery of control volume

체적면에서의 속도 (u^*)는 주유동방향의 압력구배가 지배적이고 교차방향의 압력구배에 의한 영향은 작다는 가정하에 체적중양에서의 속도와 같은 형식으로 표시하면 식 (13)과 같다.

$$u_{1e}^* = \alpha_u [\overline{H_P^u + D_{2P}^u (p_s - p_n)} + D_{1e} (p_P - p_E)] + (1 - \alpha_u) u_{1e}^*$$

$$u_{2e}^* = \alpha_v [\overline{H_P^v + D_{2P}^v (p_s - p_n)} + D_{1e} (p_P - p_E)] + (1 - \alpha_v) u_{2e}^* \quad (13)$$

위 식에 의해 검사체적의 중앙과 면에서의 속도수정을 SIMPLE-C방법을 사용하면 다음과 같다.

$$u_{1P}' = \alpha_u [D_{1P}^u (p_w' - p_e') + D_{2P}^u (p_s' - p_n')] / [1 - \alpha_u \Sigma (A_{nb}^u / A_{PP}^u)] \quad (14)$$

$$u_{1e}' = \alpha_u D_{1e}^u (p_P' - p_E') / [1 - \alpha_u \Sigma (A_{nb}^u / A_{PP}^u)]$$

비압축성유동에서의 SIMPLE 계통의 알고리즘은 운동량보간에 의해 구해진 속도성분 (u^*)과 질량유속 (\dot{m}^*)이 일반적으로 연속방정식을 만족시키지 못하므로 압력수정 (p')을 통하여 속도수정 ($u_{1,2}'$)과 질량유속 ($\dot{m}_{1,2}'$)을 수정함으로써 연속방정식을 만족되도록 한다.

이러한 개념을 압축성유동까지 확장시키면 압축성유동에서는 연속방정식을 만족시키는 질량유속을 구하기 위해서 비압축성유동에서 사용한 속도수정 이외에 밀도도 수정을 하여야 한다. 검사체적 'e'면에서의 연속방정식을 만족시키는 질량유속 (\dot{m}^{**})은 다음과 같고 밀출친 2차의 수정항은 생략한다.

$$\dot{m}^{**} = [(\rho^o + \rho') (U_1^* + U_1')]_e \quad (15)$$

$$= (\rho^o U_1^* + \rho' U_1^* + \rho^o U_1 + \rho' U_1)_e = (\dot{m}_e^* + \dot{m}_e')$$

$$\dot{m}_e^* = (\rho^o U_1^*)_e, \quad \dot{m}_e' = (\rho' U_1^* + \rho^o U_1 + \rho' U_1)_e$$

밀도는 다음과 같이 수정된다.

$$\rho' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) p' \quad (16)$$

($\partial \rho / \partial p$)는 유동의 종류에 따라 다양한 형태를 취할 수 있지만 등엔트로피(isentropic flow)에서는 다음과 같다.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) = \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\gamma RT} = C_\rho \quad (17)$$

속도수정과 밀도수정을 식(15)의 질량유속수정항에 대입하면 다음과 같이 된다.

$$\dot{m}_e' = \rho_e^o \left[\frac{\alpha_u \overline{D_{1e}^u}}{(1 - \alpha_u \Sigma (A_{nb}^u / A_{PP}^u))} + \frac{\alpha_v \overline{D_{1e}^v}}{(1 - \alpha_v \Sigma (A_{nb}^v / A_{PP}^v))} \right] (p_P' - p_E') + U_{1e}^* (C_\rho p')_e \quad (18)$$

식(18)의 첫 번째 항은 압력수정의 확산역할을 하며, 두 번째 항은 압력수정의 대류역할을 한다. 두 항의 상대적인 중요성은 유동종류에 따라 결정되는 데 두 번째 항으로 각 항을 나누면 첫번째 항은 M^{-2} 에 비례하는 가중계수를 가지고 두 번째 항은 1이 된다. 즉, 아음속 유동의 경우에는 첫 번째 항의 가중계수가 1보다 훨씬

크므로 압력수정의 확산이 지배적이 되며 초음속유동에선 반대가 된다. 여기서 C_p 가 '0'이 되면 완전한 비압축성유동이 된다. 대류항의 이산화 기법은 1차 정확도의 상류도식과 고차의 Quick scheme⁽⁸⁾를 사용하였다. Quick scheme의 경우 식(18)의 대류역할을 하는 두 번째 항의 계산에 있어서 상류의 한 점으로부터 정보를 받는 상류도식보다 정보전달이 빨리 이루어 질 것으로 생각된다.

3. 계산결과 및 검토

3.1 비압축성 유동

3.1.1 Skew cavity

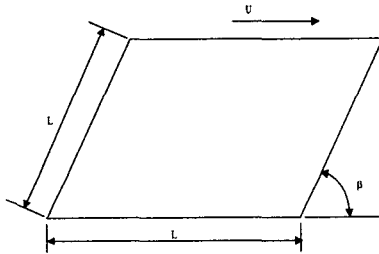


Fig. 2 Geometry of skew cavity

Fig. 2는 본 문제의 기하학적인 형태를 도시한 그림이다. 상판은 U의 속도로 움직이고 나머지 세 벽면은 고정되어 있다. 기움각 β 가 각각 $30^\circ, 45^\circ$ 일 때 레이놀드수(Reynolds number) 100, 1000 에 대하여 검증을 하였다.

Fig. 3과 Fig. 4는 기움각도에 따른 cavity중앙에서 속도를 Peric등의 수치해석결과와 비교한 것이다. 여기서 Re 수는 $\rho UL/\mu$ 로 정의된다. Quick scheme을 사용한 결과는 적은 격자수임에도 불구하고 Peric의 계산치와 일치함을 알수 있다.

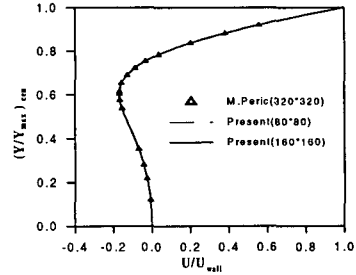
3.1.2 이차원 확대채널유동

Fig. 5는 이차원확대채널의 기하학적인 형상과 경계조건을 도시한 그림이다. 채널의 벽면과 길이는 아래 식으로 정의된다.

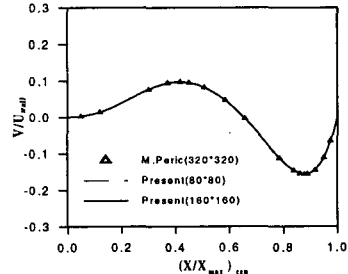
$$y_{wall} = 1 - (\tanh(2 - 30x/Re) - \tanh 2)/2$$

$$0 \leq x \leq Re/3$$

2차원 확대채널유동은 2차원비직교좌표계의 프로그램 검증에 자주 쓰이는 문제로 Cliff



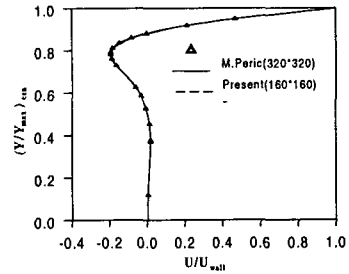
(a) U- profile at center



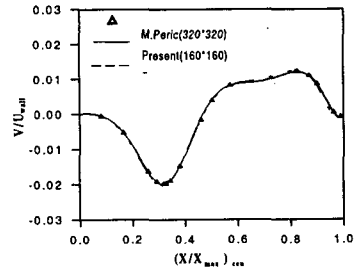
(b) V- profile at center

Fig. 3 Velocity profile at cavity center

($Re=100, \beta=45^\circ$)



(a) U- profile at center



(b) V- profile at center

Fig. 4 Velocity profile at cavity center

($Re=1000, \beta=30^\circ$)

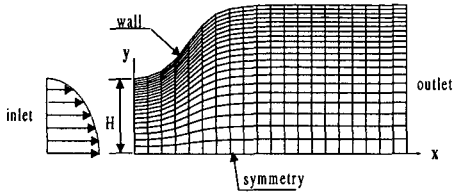


Fig. 5 Geometry and boundary condition of 2D-expansion channel

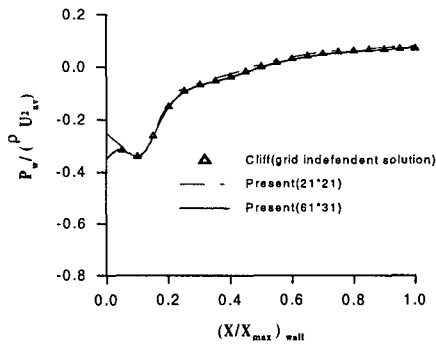


Fig. 6 Pressure coefficient along wall

등의 수치해를 선택하였다. $Re=10$ 에서 계산을 하였으며, 입구에는 완전 발달한 속도를 주었고, 상부는 벽면조건(no-slip condition)을 하부는 대칭조건(symmetry)을 사용하였다. 기본격자는 21×21 를 사용하였고 격자의존성을 알아보기 위하여 61×31 격자도 사용하였다. Fig. 6은 채널 벽면을 따른 압력분포 $P_w = p_w / \rho U_{\infty}^2$ 의 변화를 비교한 그림이다. Cliff 등의 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

3.2 압축성 유동

아음속(Subsonic), 천음속(Transonic), 초음속(Supersonic)유동의 세 가지 경우에 대해 해석을 하였으며 Fig. 7은 개략도를 나타내는 그림이다. 운동량방정식은 오일러(Euler)방정식을 수치비교대상으로 Eidelman⁽⁷⁾의 수치해인 상,하 벽면의 마하수를 선정하였다. Eidelman은 1차 정확도와 2차 정확도의 Godunov방법을 사용하여 유동을 해석하였으며 1차 정확도로는 유동장 내부의 충격파의 거동을 정확히 예측할 수 없음을 밝혔다. 본 연구에서는 상류도식과 Quick

scheme⁽⁸⁾의 해석결과를 각각 Eidelman의 1차 정확도와 2차 정확도의 결과와 비교하여 압축성 유동의 거동을 살펴보았다.

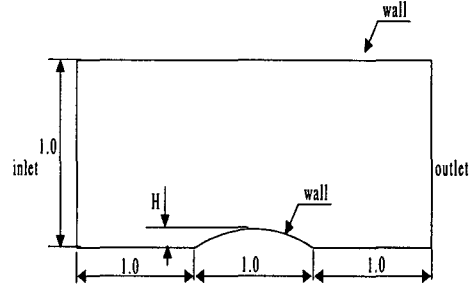
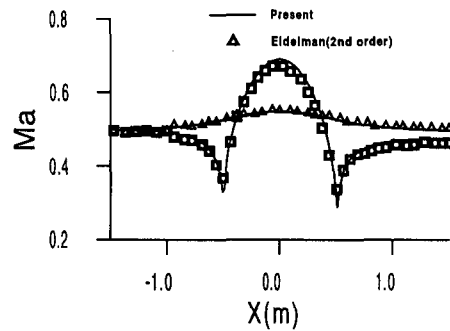
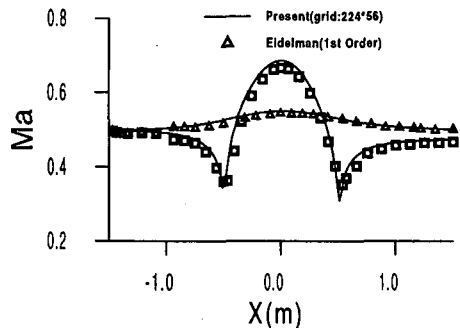


Fig. 7 Channel with a circular arc bump

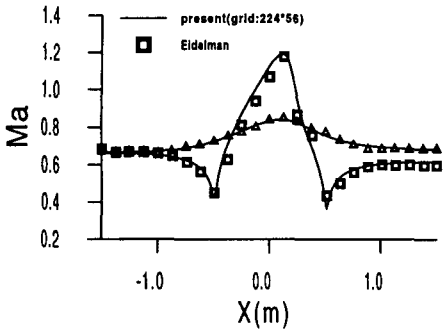


(a) Upwind scheme

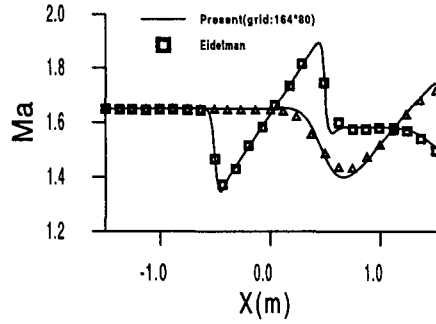


(b) Quick scheme

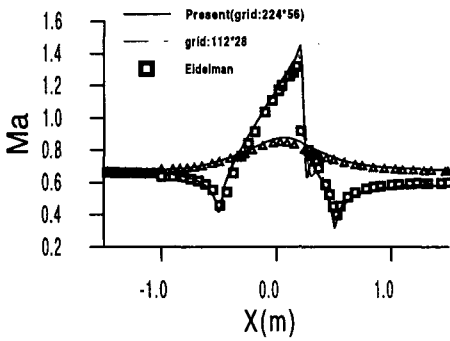
Fig. 8 Profiles of Mach number along top and bottom wall in the subsonic flow of a circular arc bump



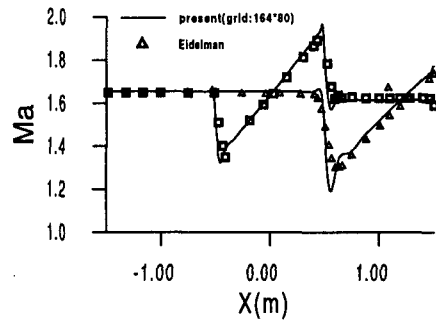
(a) Upwind scheme



(a) Upwind scheme



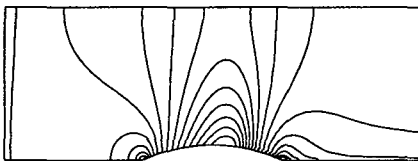
(b) Quick scheme



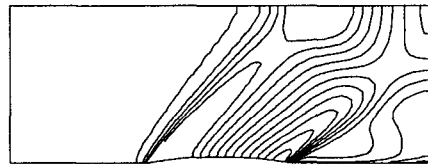
(b) Quick scheme

Fig. 9 Profiles of Mach number along top and bottom wall in the transonic flow of a circular arc bump

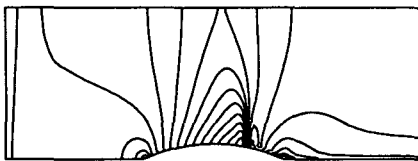
Fig. 11 Profiles of Mach number along top and bottom wall in the supersonic flow of a circular arc bump



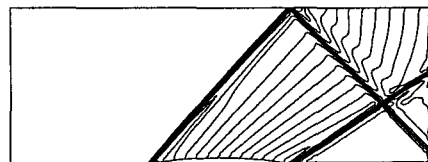
(a) Upwind scheme



(a) Upwind scheme



(b) Quick scheme



(b) Quick scheme

Fig. 10 Contours of Mach number in the transonic flow of a circular arc bump

Fig. 12 Contours of Mach number in the supersonic flow of a circular arc bump

3.2.1 아음속(Subsonic) 유동

채널내의 bump높이 'H'는 10%이며 입구에서 전압(total pressure)과 total temperature를 경계 조건으로 하였다. 입구전압과 출구정압의 압력비는 1.186으로 지정하였으며 주어진 압력비에 해당하는 마하수는 0.5이다. 격자는 224*56을 사용하였다. Fig.8 의 결과에서 상류도식이나 Quick scheme이나 모두 Eidelman의 결과와 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

3.2.2 천음속(Transonic) 유동

'H'는 10%이며 입구 경계조건으로 전압과 total temperature를 주었고 입구전압과 출구정압의 압력비는 1.356이며 주어진 압력비는 마하수 0.675에 해당한다. Fig. 9의 결과는 Eidelman의 결과와 잘 일치하고 있다. (a), (b)에서 최대 마하수가 발생하는 위치는 선단으로부터 약72%인 지역으로 동일하나 그 강도는 서로 다를 수 있다. Ni⁽⁹⁾의 결과에서도 최대마하수는 약 1.43이며 선단으로부터 약 70-75%사이에서 충격파가 발생하고 있다. Eidelman의 해석결과도와 유사하다. Quick scheme의 결과가 위의 두 경우보다 약간 높은 값을 나타내는 것은 고차정확도의 기법에서 나타나는 overshooting현상으로 판단된다. Fig. 10은 등마하선도를 나타내는 그림으로 충격파의 발생위치 부근에서 그 강도가 차이가 남을 보이고 있다. 이러한 현상은 Eidelman의 결과에서도 동일하게 나타나고 있다.

3.2.3 초음속(Supersonic) 유동

'H'는 4%이며 입구 경계조건으로 마하수를 1.65로 지정하였고 출구에서의 모든 변수값은 외삽하였다. Fig. 11의 결과는 Eidelman의 결과와 잘 일치하고 있으며 천음속유동의 경우와 마찬가지로 상류도식과 Quick scheme 모두 충격파의 발생위치는 두 도식 모두 비슷하게 예측하나 그 강도에 있어서는 차이가 나고 있다. 특히 Fig. 12의 (a)에서 상류도식은 하부에서 발생한 충격파가 상부벽면에서 반사되는 것이 보이지 않고 있으며 이와 반대로 Quick scheme은 반사되는 것이 선명하게 보이고 있다.

3.2.4 2차원 축소-확대 노즐

유동장 내부에 아음속부터 초음속까지의 유동

영역이 공존하는 대표적인 문제로써 기하학적인 형상은 Fig. 13과 같다. Mason⁽¹⁰⁾에 의해 디자인되었으며, 입구의 마하수는 0.232이고 출구의 정압과 입구의 전압의 압력비는 0.1135로 설계되었다. Fig. 14는 벽면과 중앙부의 압력을 실험치와 비교한 것으로 상류도식이나 Quick scheme 모두 실험치와 일치하고 있다.

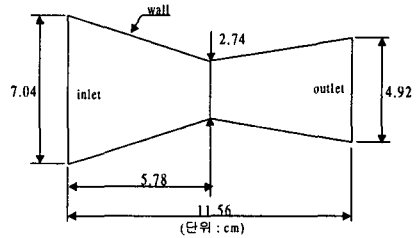
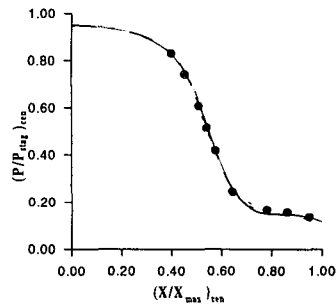


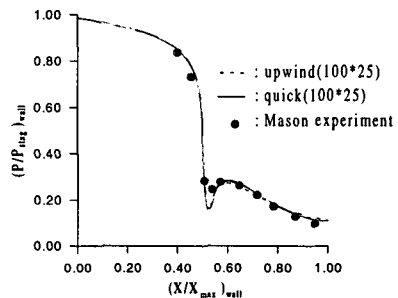
Fig. 13 Geometry of Nozzle

Table 1. Comparison of computing time

Scheme	Bump 유동			Nozzle
	아음속	천음속	초음속	
Quick	87'13"	135'13"	25'25"	2'42"
Upwind	73'06"	100'34"	32'37"	2'23"



(a) Pressure distribution along center



(b) Pressure distribution along wall

Fig. 14 Pressure distribution

3.3 수렴시간 비교

Table. 1은 본 연구에서 수행한 유동문제를 계산하는 데 걸린 시간을 동일한 격자, 수렴기준, PC를 사용하여 측정하였다. 일반적으로 비압축성 유동해석의 경우 고차의 정확도를 가지는 Quick scheme은 상류도식에 비해 수렴시간이 매우 많이 소요되는 것으로 알려져 있다.⁽⁴⁾ 상류도식과 Quick scheme중 수렴시간면에서 어느 한 쪽이 우세하다고 말할 수 없지만 아음속과 천음속유동에서는 상류도식이 우세하며 초음속유동에서는 Quick scheme이 빨리 수렴한다는 것을 알 수 있다. 초음속유동은 아음속이나 천음속에 비해 상대적으로 일방향성 유동성격이 강하기 때문에 상류의 한 점으로부터 정보를 받는 상류도식보다는 상류의 두 점으로부터 정보를 받는 Quick scheme에서 정보전달이 빨리 이루어지기 때문이라 생각된다.

4. 결 론

압력을 주변수로 한 SIMPLE-C 알고리즘을 이용한 유한체적법과 집중격자계를 이용하여 비압축성, 압축성유동을 동시에 해결할 수 있는 2차원 프로그램을 개발하였다. 지배방정식의 대류항을 상류도식과 Quick scheme을 사용하여 계산을 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 초음속유동형태가 될수록 Quick scheme이 수렴시간이 상류도식에 비해 더 빠름을 알 수 있다.

(2) 유동장 내부에 충격파가 발생시에는 1차 정확도를 가지는 상류도식은 발생위치의 예측은 가능하나 충격파의 강도를 정확히 예측을 하지 못하며 이에 비해 Quick scheme은 강도를 상류도식보다 더 정확히 예측할 수 있다.

(3) 상류도식은 충격파의 반사등이 잘 예측되지 못하며 Quick scheme은 이러한 충격파의 거동을 예측할 수가 있다.

참고문헌

- [1] S. V. Patankar, 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill Book Company.
- [2] D. Kwak, J. L. C. Chang, S. P. Shanks., and S. R. Chakravarthy, 1986, "A Three Dimensional Incompressible Navier-Stokes Flow Solver Using Primitive Variables", *AIAA Journal*, Vol. 24, pp.390~396.
- [3] J. L. C. Chang, D. Kwak, 1984, "On the Method of Pseudo Compressibility for Numerically Solving Incompressible Flows", *AIAA Paper*, 84-0252.
- [4] K. C. Karki and S. V. Patankar, 1989, "Pressure Based Calculation Procedure for Viscous Flows at All Speeds in Arbitrary Configurations", *AIAA*, Vol. 27, No. 9, pp.1167~1174.
- [5] I. Demirdžić and Ž. Lilek and M. Perić, 1993, "A Collocated Finite Volume Method For Predicting Flows at All Speeds", *Int. J. Numer. Method in Fluids*, Vol. 16, pp.1029~1050.
- [6] W. Rodi and S. Majumdar and Schönung, 1989, "Finite Volume Methods for Two-Dimensional Incompressible Flows with Complex Boundaries", *Com. Methods in Applied Mech. and Eng.*, Vol. 75, pp.369~392.
- [7] S. Eidelman, A. D. Colella and R. P. Shreeve, 1984, "Application of Godunov Method and Its Second-Order Extension to Cascade Flow Modelling", *AIAA Journal*, Vol. 22, pp.1609-1615.
- [8] T. Hayase., J. A. C. Humphrey., R. Greif, 1992, "A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures", *J. Com. Physics*, vol. 98, pp.108-118
- [9] R. H. Ni, 1982, "A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations", *AIAA Journal*, Vol. 20, pp.1565-1571.
- [10] M. L. Mason, L. E. Putnam, R. J. Re, 1980, "The Effect of Throat Contouring on Two-Dimensional Converging-Diverging Nozzles at Static Conditions", *NASA TP* 1704.