

☒ 연구논문

불량률과 일치하는 공정능력 지수  $C_{pd}$ 

임태진 · 변시섭

송실대학교 산업·정보시스템공학과

A Process Capability Index  $C_{pd}$  Consistent with  
the Proportion of Nonconforming ItemsTae Jin Im · Si Sub Pyun  
Soongsil University

## Abstract

Process capability indices(PCI)  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$ , and  $C_{pmk}$  are widely used to evaluate the process performance. The PCI's have been evolved to consider the 'off targetness' more adequately. However, all of these indices are found to be inconsistent with the proportion of nonconforming items, in some cases. That is, the PCI for a process may result in higher value even when the proportion of defectives increases. For these reasons, we propose a new capability index,  $C_{pd}$ , which is consistent with the defect rate. The characteristics of the new PCI,  $C_{pd}$  are investigated with respect to the existing PCI's. Some statistical properties of an estimator for  $C_{pd}$  are also investigated by a Monte Carlo simulation. Sensitivity study under minor deviation from normality is also performed to show the robustness of  $C_{pd}$ . A good estimator for  $C_{pd}$  is under study.

## 1. 서론

약어(Acronym) 및 기호(Notations)

PCI 공정능력 지수(Process Capability Index)

$\mu$  공정평균

$\sigma$  공정표준편차

LSL 규격하한(Lower Specification Limit)

USL 규격상한(Upper Specification Limit)

$M$  규격중심;  $M = (LSL + USL) / 2$

$T$  공정 목표치(target value)

$P(D)$  공정불량률

$\Phi(\cdot)$  표준정규누적분포함수;  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{z^2}{2}) dz$

$d$  규격공차;  $d = (USL - LSL) / 2$

$p$  공정평균의 이탈도(off targetness);  $p = |\mu - T| / \sigma$

$k$  규격에 대한 공정평균의 상대적 이탈도;  $k = \frac{2|M - \mu|}{USL - LSL}$

공정능력분석의 목적은 공정의 산출물(output)이 규격한계를 얼마나 잘 만족하는가를 평가하기 위함이다[12]. PCI는 공정에서 산출하는 제품에 대해 통계적으로 관리해야 할 공정의 특성을 평가할 목적으로 개발되었으며, 공정이 규격을 만족하는 제품을 생산할 능력을 갖고 있는지를 나타내는 지수이다. PCI는 사용자가 공정의 성능을 쉽게 파악할 수 있고, 다수의 서로 다른 공정의 수행도(performance)를 동시에 감시할 수 있어 생산분야에서 다양한 형태로 널리 사용되고 있다.

PCI 도입 당시 깔려 있던 동기는 '부적합 제품의 비율'을 감시하고자 함이었다[10]. 최근에 손실함수(loss function)의 개념을 PCI에 접목시킨 연구가 유행하기도 했으나, 처음의 동기를 상실한 경향이 있다.

일반적으로 공정 산출물의 특성치  $X$ 의 분포함수를  $F(\cdot)$ 라 하면, 공정불량률은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$P(D) = P(X > USL) + P(X < LSL) = 1 - F(USL) + F(LSL) \quad (1)$$

특성치가 정규분포를 따르는 경우의 공정불량률은 아래와 같다.

$$P(D) = 1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) \quad (2)$$

공정 A의 PCI 값이 공정B의 PCI 값보다 크다면, 일반적으로 공정 A의 불량률이 더 낮을 것이라고 기대하기 마련이다. 즉, PCI가 다음과 같은 조건을 만족할 때 불량률과 일치한다고 말할 수 있다.

$$PCI_A > PCI_B \Leftrightarrow P(D_A) < P(D_B) \tag{3}$$

본 연구에서는 다양한 PCI들의 진화 과정을 살펴보고, 불량률에 대한 일관성 측면에서 기존의 PCI들을 평가하여 PCI 값이 큰데도 불구하고 불량률이 증가하는 사례를 보임으로써, 기존의 PCI들이 불량률과 반드시 일치하지 않을 수도 있음을 보인다. 다음으로 불량률에 대해 일치하는 새로운 PCI,  $C_{pd}$ 를 소개한다.

본 연구에서는 대상 공정이 통계적 관리상태라는 전제 하에 다음과 같이 가정한다.

- (1) 규격중심과 공정의 목표치는 일치한다. 즉,  $M = T$ .
- (2) 공정의 측정치들은 정규분포를 따른다.

다음절에서는 PCI의 진화 과정을 살펴보고, 불량률과의 일치성을 분석한다. 3절에서는 불량률과 일치하는 PCI,  $C_{pd}$ 를 제안하고, 4절에서는  $C_{pd}$ 의 특성에 대하여 고찰한다.

## 2. 공정능력 지수의 진화

본 절에서는 기존 PCI의 진화 과정을 살펴봄과 동시에 이들이 불량률과 일치하지 않을 수도 있음을 보이고자 한다.

### 2.1 제 1 세대 PCI $C_p$

공정능력 지수의 개념은 Juran[7]에 의해 도입되었는데, 아래와 같이 자연공차 혹은 제품특성치의 변이(variability)에 대한 규격공차(허용차)의 비율로 정의된다.

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{d}{3\sigma} \tag{4}$$

지수  $C_p$ 는 공정의 산포(spread)에만 의존하며 공정평균의 이탈도는 고려하지 않으므로, 공정 잠재력(potential)의 척도로 이용된다. 공정평균  $\mu$ 가 규격의 중앙값과 일치함을 전제로 할 때, 한 제품이 규격 범위 밖의 특성치를 가질 확률(불량률)은 식 (2)로부터 다음과 같이 유도된다.

$$P(D) = 2\Phi\left(-\frac{USL - LSL}{2\sigma}\right) = 2\Phi(-3C_p)$$

일반적으로 공정평균이 규격중심과 일치하지 않는 경우를 고려하면 위의 식에 비하여 불량률이 증가하므로, 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$P(D) \geq 2\Phi(-3C_p) \quad (5)$$

따라서 지수  $C_p$ 는 한 공정이 가질 수 있는 최소의 불량률을 정의하는 지수로 사용될 수 있다.

지수  $C_p$ 는 규격중심으로부터 공정평균의 이탈도를 고려하지 않으므로 공정산포만 동일하다면 변하지 않는 반면, 공정평균이 규격의 중심에서 멀어질수록 불량률은 기하급수적으로 증가하게 되므로 불량률에 일치하지 않는 지수임을 쉽게 알 수 있다.

**[정리 1]**  $C_p$ 는 불량률에 일치하지 않는 PCI이다.

[증명] 식 (3)을 위배하는 예를 보인다.

편의상 규격의 중심을  $M = T = 0$ , 규격을  $[-3, 3]$ 이라 하고, 공정 A의  $(\mu, \sigma) = (3, 3/4)$ , 공정 B의  $(\mu, \sigma) = (0, 3)$ 라 하자.  $C_{p,A} = 4/3$ ,  $C_{p,B} = 1/3$ 로서 공정 A의  $C_p$  값이 더 크지만,  $P(D_A) = 1 - \Phi(0) = 0.5$ ,  $P(D_B) = 2\Phi(-1) = 0.3173$ 으로서 공정 A의 불량률이 더 높다. 따라서 지수  $C_p$ 는 불량률에 일치하지 않는다. ■

## 2.2 제 2 세대 PCI $C_{pk}$

앞에서 살펴본 지수  $C_p$ 의 단점에 착안하여, Kane[8]은 공정평균의 이탈도를 반영하기 위한 지수  $C_{pk}$ 를 다음과 같이 제안하였다. 그는 지수  $C_p$ 가 공정의 잠재적 성능만을 평가한다는 점에서 제한적이라고 보고, 지수  $C_{pk}$ 를 통하여 공정의 성능을 평가해야 한다고 주장하였다.

$$C_{pk} = \min(C_{PU}, C_{PL}), \quad (6)$$

$$\text{여기서 } C_{PU} = \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \quad C_{PL} = \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \quad (7)$$

$C_{pk}$ 와  $C_p$ 의 관계는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{pk} = (1 - k)C_p \quad (8)$$

즉, 지수  $C_{pk}$ 는 공정평균의 이탈도에 따라 선형적으로 감소한다. 표준편차  $\sigma$ 가 일정

하다면 지수  $C_{pk}$ 는  $\mu = M$ 일 때 최대값을 가지며, 이때  $C_{pk} = C_p$ 이다. 공정평균  $\mu$ 가 규격한계에 가까워질수록  $C_{pk}$  값은 감소하며, 규격한계를 벗어나면 음수가 되므로 0으로 정의하는 경우도 있다.

실제로  $C_{pk}$ 는 불량률을 결정하지 못하고 불량률의 상한만을 결정한다[10]. 즉, 어떤 공정에서도 불량률  $P(D)$ 는  $2\Phi(-3C_{pk})$ 를 초과하지 못함을 아래의 식을 통하여 쉽게 알 수 있다.

$$P(D) = 1 - \Phi(3C_{PU}) + \Phi(-3C_{PL}) \leq 2\Phi(-3C_{pk}) \tag{9}$$

다음으로 지수  $C_{pk}$ 가 불량률과 일치하는 특성을 갖는지 살펴보자.

[정리 2]  $C_{pk}$ 는 불량률에 일치하지 않는 PCI이다.

[증명] 식 (3)을 위배하는 예를 보인다.

편의상 규격의 중심을  $M = T = 0$ , 규격을  $[-3, 3]$ 이라 하고, 공정 A의  $(\mu, \sigma) = (0, 3)$ , 공정 B의  $(\mu, \sigma) = (2.5, 1)$ 이라 하자. 두 공정에서의 확률밀도함수는 그림 1과 같다.  $C_{pk,A} = 1/3$ ,  $C_{pk,B} = 1/6$ 로서 공정 A의  $C_{pk}$  값이 더 크지만,  $P(D_A) = 2\Phi(-1) \approx 0.3173$ ,  $P(D_B) = 1 - \Phi(0.5) + \Phi(-5.5) \approx 0.3085$ 로서 공정 A의 불량률이 더 높다. ■

<그림 1>을 살펴보면 지수  $C_{pk}$ 는 불량률은 높지만 치우침이 없는 공정 A를 불량률은 낮지만 치우침이 큰 공정 B보다 높게 평가하고 있다. 지수  $C_{pk}$ 의 도입 목적은 공정평균의 이탈도를 고려하여 공정 불량률을 반영하고자 한 것이지만, 앞의 예에서 살펴본 바와 같이 공정의 이탈도를 과도하게 반영하여 불량률과 일치하지 않는 특성을 보임으로 말미암아 처음의 의도를 정확하게 반영했다고 볼 수 없다.

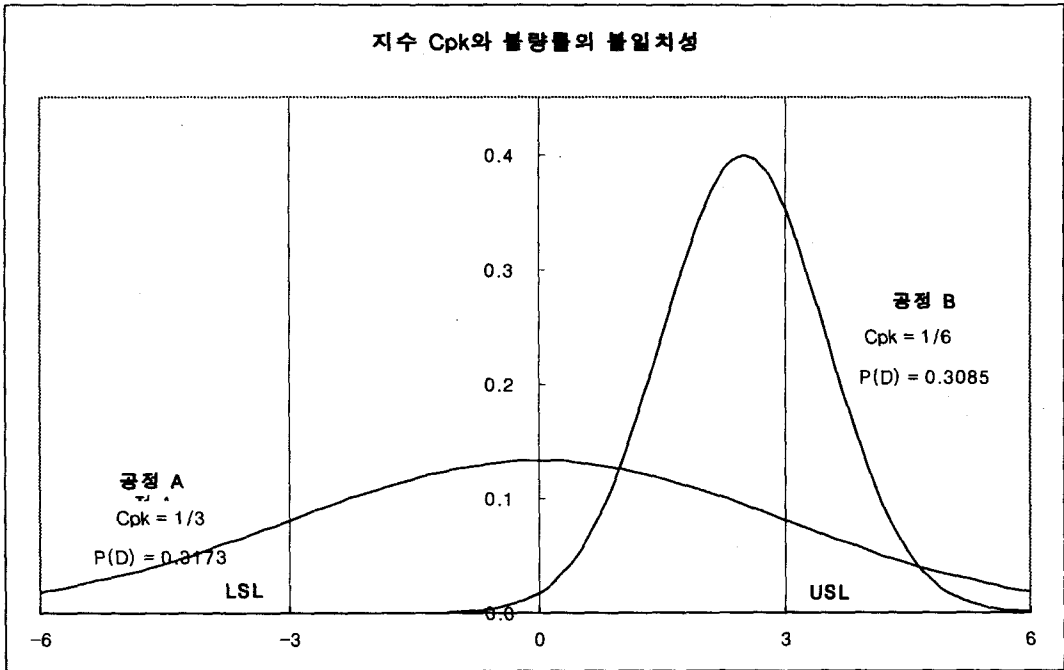
### 2.3 제 2 세대 PCI $C_{pm}$

지수  $C_{pk}$ 와 더불어 고려할만한 제 2 세대 PCI로는  $C_{pm}$ 이 있다. 지수  $C_{pm}$ 은 공정평균의 이동을 직접 반영하지 않고, 표준편차 대신 평균제곱오차를 사용함으로써 간접적으로 반영한다. Hsiang and Taguchi[5], Chan, Cheng, and Spiring[3]은 각각 다음과 같은 지수를 제안하였다.

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[(X - M)^2]}} = \frac{USL - LSL}{\sqrt{\sigma^2 + (\mu - M)^2}} = C_p / \sqrt{1 + (\mu - M)^2 / \sigma^2} = d / 3\sigma^*, \tag{10}$$

여기서  $\sigma^{*2} = \sigma^2 + (\mu - M)^2$ . (11)

따라서 지수  $C_{pm}$ 은 공정불량률보다는 손실함수(loss function)와 연관성이 깊다. 제 1세대 지수  $C_p$ 와의 관계를 살펴보면,  $\sigma^*/\sigma = \sqrt{1 + (\mu - M)^2/\sigma^2} \geq 1.0$ 이므로,  $C_{pm} \leq C_p$ 이다. 지수  $C_{pk}$ 는 구간  $(LSL, USL)$ 에 포함되는 임의의  $\mu$ 에 대하여  $\sigma$ 가 0으로 접근할수록 무한히 증가하지만, 지수  $C_{pm}$ 은  $\mu \neq M$ 인 한 유한한 값을 갖는다[2]. 즉,  $C_{pm} \leq (USL - LSL)/(6|\mu - M|)$ . 이러한 특성으로 인하여 지수  $C_{pm}$ 은 공정평균의 이탈도를 좀 더 명시적으로 표현할 수 있는 장점이 있다. 그러나 지수  $C_{pm}$  단독으로는 공정평균의 이탈도를 정확히 나타낼 수 없고, 지수  $C_p$ 와 같이 사용하는 것이 바람직하다.



< 그림 1 > 지수  $C_{pk}$ 와 불량률과의 불일치를 나타내는 예

[정리 3]  $C_{pm}$ 은 불량률에 일치하지 않는 PCI이다.

[증명] 식 (3)을 위배하는 예를 보인다.

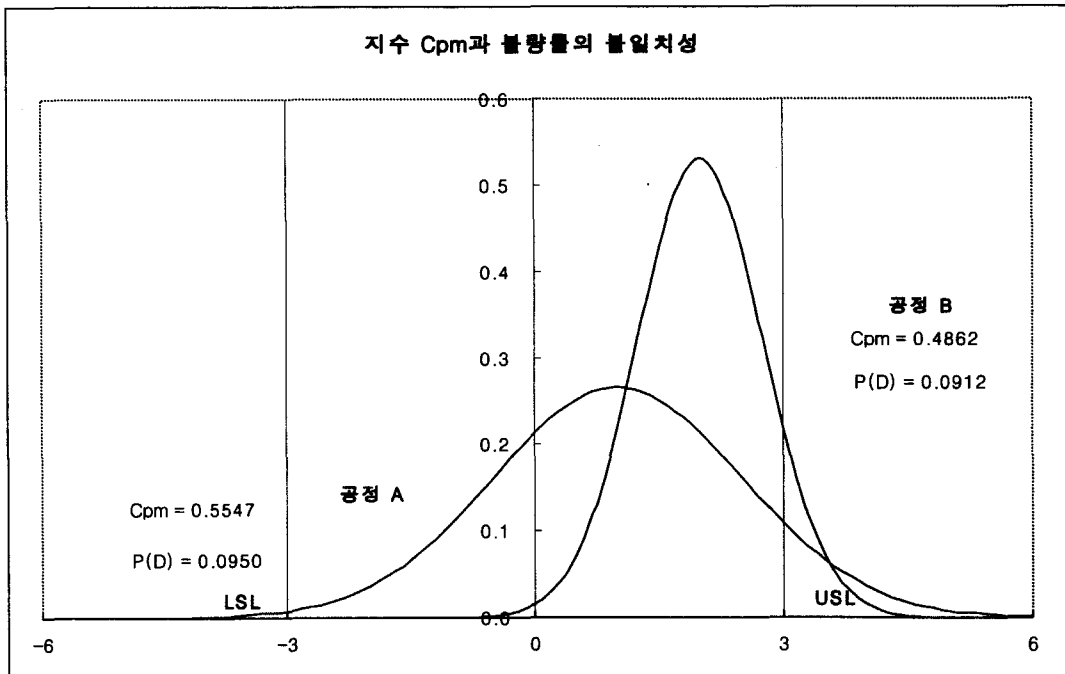
편의상 규격의 중심을  $M = T = 0$ , 규격을  $[-3, 3]$ 이라 하고, 공정 A의  $(\mu, \sigma) = (1, 3/2)$ , 공정 B의  $(\mu, \sigma) = (2, 3/4)$ 라 하자. 두 공정에서의 확률밀도함수는 <그림 2>와 같다.  $\sigma_A^* \approx 1.8028$ ,  $\sigma_B^* \approx 2.1360$ 이므로  $C_{pm,A} \approx 0.5547$ ,  $C_{pm,B} \approx 0.4682$ 로서 공정 A의  $C_{pm}$  값이 더 크지만,  $P(D_A) = 1 - \Phi(4/3) + \Phi(-8/3) \approx 0.0950$ ,  $P(D_B) = 1 - \Phi(4/3) + \Phi(-20/3) = 0.0912$ 로서 공정 A의 불량률이 더 높다. ■

<그림 2>를 살펴보면 지수  $C_{pm}$ 은 산포가 커서 불량률은 높지만 치우침이 작은 공정 A를 불량률은 낮지만 치우침이 큰 공정 B보다 높게 평가하고 있다. 즉, 지수  $C_{pm}$ 의 단점을 완전히 해소하지 못하였다.

한편 Chan, Cheng, and Spiring[3]은 목표치  $T$ 가 규격 중심  $M$ 과 일치하지 않는 경우를 고려하여 다음과 같이  $C_{pm}$ 을 변환하였다.

$$C_{pm}^* = \frac{\min(USL - T, T - LSL)}{3\sigma^*} \tag{12}$$

그러나 이러한 변환도 불량률과의 일치성을 보장하지 못함을 다음 정리를 통해 알 수 있다.



< 그림 2 > 지수  $C_{pm}$ 과 불량률과의 불일치를 나타내는 예

[정리 4]  $C_{pm}^*$ 는 불량률에 일치하지 않는 PCI이다.

[증명] 식 (3)을 위배하는 예를 보인다. 만약 규격중심  $M$ 이 목표치  $T$ 와 같다면,  $C_{pm} = C_{pm}^*$ 이므로, 정리 3의 예로써 충분하다.  $m \neq T$ 인 경우의 예를 들어보자. 규격을  $[-3, 3]$ 이라 하고, 목표치  $T = 1$ 이라 하자. 또한 공정 A의  $(\mu, \sigma) = (1, 3/4)$ , 공정 B의  $(\mu, \sigma) = (0, 1)$ 이라 하자.  $\sigma_A^* = 0.750$ ,  $\sigma_B^* = 1.4142$ 이므로

$C_{pm,A}^* \approx 0.8889$ ,  $C_{pm,B}^* \approx 0.4714$ 로서 공정 A의  $C_{pm}^*$  값이 더 크지만,  $P(D_A) \approx 1 - \Phi(8/3) + \Phi(-16/3) \approx 0.0038$ ,  $P(D_B) = 1 - 2\Phi(3) \approx 0.0027$ 로서 공정 A의 불량률이 더 높다. ■

## 2.4 제 3 세대 PCI $C_{pmk}$

지금까지 살펴본 공정능력 지수는 소위 제 2 세대라 칭해진다. 다음의 공정능력 지수  $C_{pmk}$  [10]는 제 3 세대 공정능력 지수이다.

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL - \mu, \mu - LSL)}{3\sigma^*} \quad (13)$$

이 공정능력 지수는 기존의  $C_{pk}$  지수에 목표치에 대한 민감성을 확보하여 공정평균의 이동을 보다 민감하게 감시할 수 있도록 고안되었다. 식 (10)과 식 (13)을 비교해 보면,  $C_{pmk} \leq C_{pm}$  임을 쉽게 알 수 있다. 또한 식 (6)과 비교해 보면,  $\sigma^* \geq \sigma$  이므로  $C_{pmk} \leq C_{pk}$  임을 쉽게 알 수 있다. 이 지수는 불량률과 로스(loss)를 모두 고려하도록 개발된 것이지만 역시 불량률과 일치하지 않는다.

[정리 5]  $C_{pmk}$  는 불량률에 일치하지 않는 PCI이다.

[증명] 식 (3)을 위배하는 예를 보인다.

규격을  $[-3, 3]$ 이라 하고, 공정 A의  $(\mu, \sigma) = (0.5, 3/2)$ , 공정 B의  $(\mu, \sigma) = (1.5, 3/4)$ 라 하자.  $\sigma_A^* = 1.5811$ ,  $\sigma_B^* = 1.6771$ 이므로  $C_{pmk,A}^* \approx 0.5270$ ,  $C_{pmk,B}^* \approx 0.2981$ 로서 공정 A의  $C_{pmk}$  값이 더 크지만,  $P(D_A) \approx 1 - \Phi(-5/3) + \Phi(-7/3) \approx 0.0576$ ,  $P(D_B) \approx 1 - \Phi(2) \approx 0.0228$ 로서 공정 A의 불량률이 더 높다. ■

## 2.5 통합된(unified) 공정능력 지수

지금까지 살펴본 다양한 공정능력 지수 상호간의 관계를 이용하여 가중함수를 갖는 하나의 공정능력 지수로 통합할 수 있다[12]. 이런 통합 방법은 이미 연구된 바 있으나, 선행 연구에서 다루지 않고 있는 제 3 세대 PCI  $C_{pmk}$ 에 대한 통합 표현을 제시하고자 한다.

하나로 통합된 공정능력 지수의 형태는 다음과 같이 정의할 수 있다[12].

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + w(\mu - T)^2}} \quad (14)$$

여기서  $w$ 는 가중함수를 표현한다. 이 가중함수는 여러 가지의 값을 가질 수 있으



며 이 함수 값에 따라 통합된 공정능력 지수가 각각의 공정능력 지수로 변환될 수 있다. 즉,  $w=0$ 이면 손실함수를 고려하지 않는 것으로서  $C_{pw}$ 는  $C_p$ 의 값을 나타내고,  $w=1$ 이면  $C_{pw}$ 는  $C_{pm}$ 의 값을 갖는다. 그 외의 공정능력 지수로의 변환은 간단하지 않지만, 이탈도  $p$ 와  $k$ 를 이용하여 다음과 같은 가중함수를 정의하면  $C_{pw}$ 는  $C_{pk}$ 를 표현하게 된다[12].

$$w = \begin{cases} [k(2-k)]/[(1-k)^2 p^2], & 0 < k < 1; \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (15)$$

위의 가중함수를  $p$ 와  $C_p$ 와의 관계를 이용하여 다시 쓸 수 있다[12].

$$w = \begin{cases} [6C_p - p]/[(3C_p - p)^2 p], & 0 < p/3 < C_p; \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

또한 통합지수  $C_{pw}$ 는 다음과 같이 제 3 세대 지수  $C_{pmk}$ 를 표현할 수 있다.  $a = \mu - M$ 으로 정의하면,

$$w = \begin{cases} (2d|b| - b^2 + d^2 p^2)/[(d - |b|)^2 p^2], & 0 < p; \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (16)$$

### 3. 불량률과 일치하는 공정능력 지수 $C_{pd}$

기존의 공정능력 지수는 공정 불량률에 대해 불일치하는 특성을 보인다. 따라서 불량률에 일관된 값을 갖는 새로운 공정능력 지수  $C_{pd}$ 를 제안하고자 한다. 착안점은 제 1 세대 지수  $C_p$ 가  $\mu = M$ 인 경우에는 불량률과 일치하는 특성을 갖는 점이다.

먼저 제품 특성치가  $\mu$ ,  $\sigma$ 를 모수로 갖는 정규분포를 따를 때, 공정의 중심이  $M$ 이면서 불량률이 현 공정과 같아지는  $\sigma_p$ 를 결정할 수 있다. 여기서 평균이  $\mu$ 이고 표준편차가  $\sigma$ 인 공정과 평균이  $\mu' = M$ 이고 표준편차가  $\sigma_p$ 인 공정을 같은 능력을 갖는 공정이라 평가한다면, 이는 불량률을 그 기준으로 하는 공정능력 척도를 마련하는 것이며, 이를 가장 기본적인 공정능력 지수  $C_p$ 에 적용시킨다. 즉,

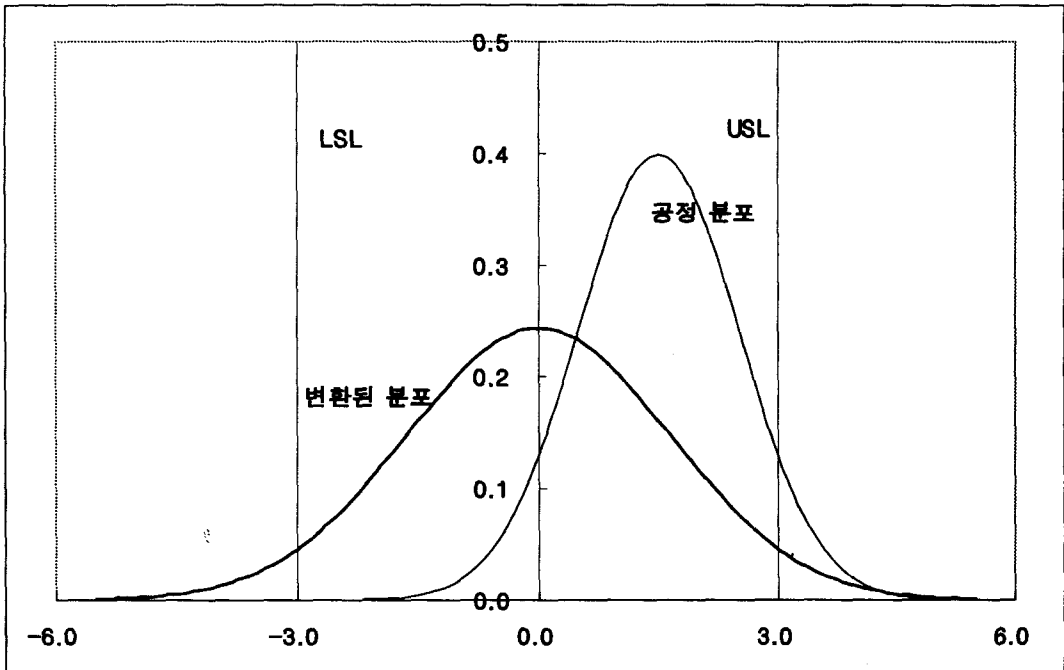
$$P(D) = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + \left[1 - \Phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{LSL - M}{\sigma_p}\right) \quad (17)$$

를 만족하는  $\sigma_p$ 는

$$\sigma_p = \frac{LSL - M}{\phi^{-1}\left[\left\{\phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + 1 - \phi\left(\frac{USL - \mu}{\sigma}\right)\right\}/2\right]} = \frac{LSL - M}{\phi^{-1}[P(D)/2]} \quad (18)$$

이제  $M$ 을 중심으로 불량률이 같도록 분포를 변환하였으므로 지수  $C_{pd}$ 를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$C_{pd} = \frac{USL - LSL}{6\sigma_p} = \frac{-\phi^{-1}[P(D)/2]}{3} \quad (19)$$



< 그림 3 > 동일한 불량률을 갖는  $\sigma_p$ 의 계산

<그림 3>에서  $N(M, \sigma_p^2)$ 를 따르는 공정의 불량률과  $N(\mu, \sigma^2)$ 를 따르는 공정의 불량률은 같다. 규격이  $[-3, 3]$ 인 공정의 분포가 <그림 3>의 오른쪽 확률밀도함수와 같이  $N(1.5, 1^2)$ 라고 할 때, 공정불량률은  $\phi(-4.5) + 1 - \phi(1.5) \approx 0.0668$ 이므로, 이와 동일한 불량률을 갖으면서 공정평균이 규격중심  $M=0$ 과 일치하는 분포를 식 (18)로부터 구하면, 그림 3의 왼쪽 확률밀도함수와 같이  $N(0, 1.6367^2)$ 를 얻는다. 따라서  $C_p = [3 - (-3)] / (6 * 1) = 1.0$ 이지만, 불량률과 일치하는 지수  $C_{pd} \approx [3 - (-3)] /$

$(6 \cdot 1.6367) \approx 0.6110$ 에 불과하다.

즉, 규격중심  $M$ 으로부터 공정평균의 이탈도와 공정 표준편차의 크기를 불량률을 기준으로 조합하여 공정능력을 평가할 수 있게 된다.

**[정리 6]** 지수  $C_{pd}$ 는 공정불량률과 일치한다.

**[증명]** 두 공정 A, B에 대해 식 (3)이 만족됨을 보인다.

공정 A, B의 교정된 표준편차를 각각  $\sigma_{p,A}$ 와  $\sigma_{p,B}$ 라 하면, 식 (19)로부터

$$C_{pd,A} > C_{pd,B} \Rightarrow \sigma_{p,A} < \sigma_{p,B}.$$

따라서  $(LSL - M) / \sigma_{p,A} < (LSL - M) / \sigma_{p,B}$ 이므로 식 (17)로부터  $P(D_A) < P(D_B)$ 를 만족한다. 반대 방향의 경우도 동일하게 성립하므로 지수  $C_{pd}$ 는 불량률과 일치한다. ■

새로운 공정능력 지수  $C_{pd}$ 도 역시 먼저 살펴본 다양한 공정능력 지수의 통합된 형태  $C_{pw}$ 로 표현이 가능하다.

$$C_{pd} = \frac{USL - LSL}{6\sigma_p} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + \frac{(\sigma_p^2 - \sigma^2)}{(\mu - M)^2}(\mu - M)^2}} \quad (20)$$

따라서 가중치는 다음 식과 같다.

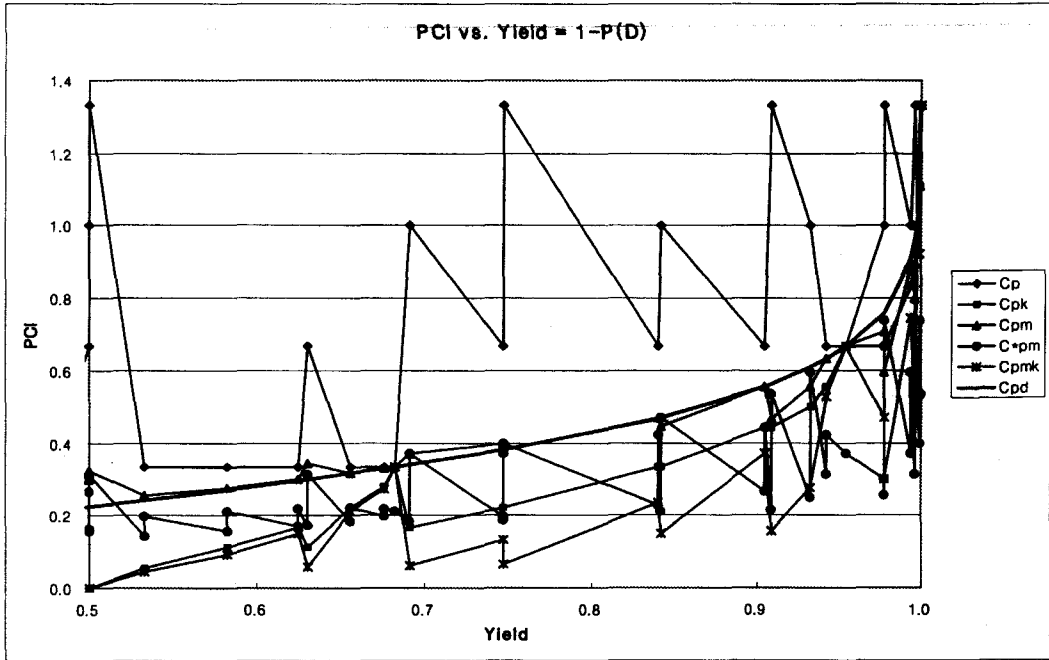
$$w = \frac{(\sigma_p^2 - \sigma^2)}{(\mu - M)^2} \quad (21)$$

식 (20)으로부터 지수  $C_{pd}$ 의 바람직한 특성을 발견할 수 있는데,  $\sigma_p \geq \sigma$ 이므로,  $C_{pd} \leq C_p$ 이다. 따라서 다른 PCI와 마찬가지로 지수  $C_{pd}$ 는 공정의 잠재력을 나타내는 지수  $C_p$ 를 넘지 않으므로, 기존의 PCI에 익숙한 이들이 사용하기에 불편하지 않을 것으로 예상된다.

이상 살펴본 바와 같이 여러 PCI 중에서 오직  $C_{pd}$ 만이 불량률과 일치함을 한 눈에 알아보기 위하여 규격  $[-3, 3]$ 에 대하여 공정평균  $\mu$ 를  $-3$ 에서  $3$ 까지  $0.5$  단위로 변화시키고 표준편차  $\sigma$ 를  $3/4, 1, 3/2, 3$ 으로 바꾸어 가며 공정불량률과 각각의 PCI 값을 계산한 결과를 <그림 4>에 나타내었다. 그림에서 편의상  $1 - P(D)$ 를 수율(yield)로 표시하여 각 지수가 수율에 대하여 증가함수가 되는지 살펴보았다.

<그림 4>에서 나타난 바와 같이 오직  $C_{pd}$ 만이 수율에 따른 단조증가 형태를 가짐을 쉽게 알 수 있다. 다른 PCI들은 단조증가 형태가 아닌 툽니 형태를 보이고 있다.

즉, 여러 경우에 있어서 수율이 증가함에도 불구하고 감소하는 불일치를 보이고 있다.



< 그림 4 > 수율에 따른 PCI들의 변화

### 4. 지수 $C_{pd}$ 의 특성

#### 4.1 기존 PCI와 지수 $C_{pd}$ 의 비교

불량률과 일치하는 지수  $C_{pd}$ 가 기존의 PCI와 비교하여 어떠한 특성을 가지며, 특별한 단점은 없는지 분석한다. 먼저 지수  $C_{pd}$ 의 점근적(limiting) 특성을 살펴보면 다른 지수들과 큰 차이가 없음을 알 수 있다. 즉,

①  $\sigma \rightarrow \infty \Rightarrow C_{pd} \rightarrow 0.$

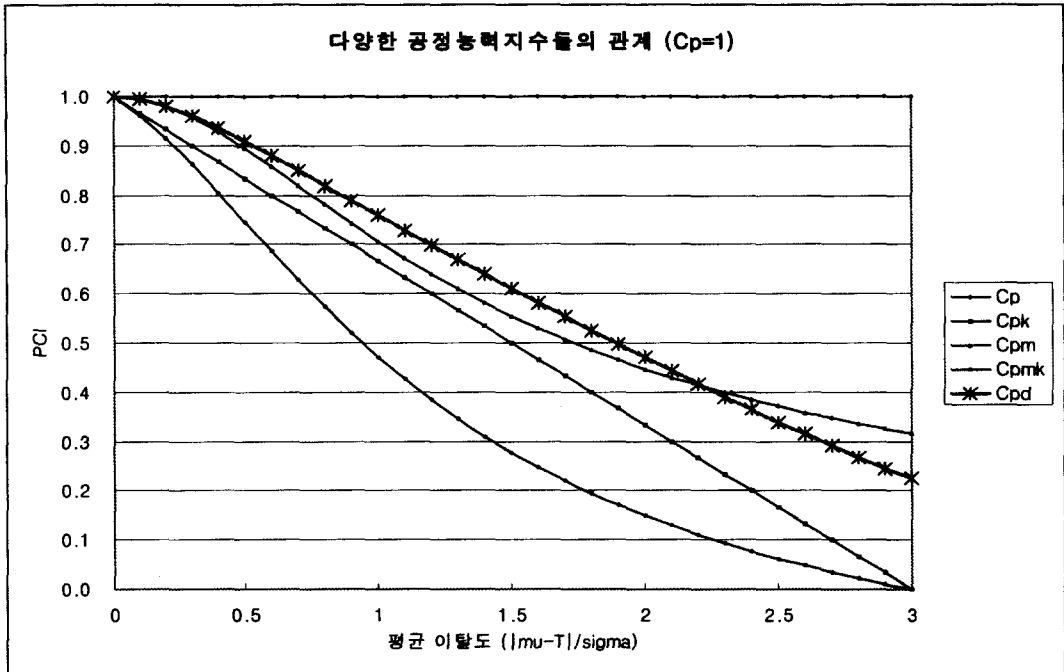
②  $\sigma \rightarrow 0 \Rightarrow C_{pd} \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{if } \mu \in (LSL, USL); \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

③  $|\mu - T| \rightarrow \infty \Rightarrow C_{pd} \rightarrow 0.$

특성 ①은 모든 PCI에 공통적으로 적용되는 특성으로서, 공정의 산포가 커질수록 PCI 값이 감소한다. 특성 ②에서 일반적으로 공정평균  $\mu$ 가 규격한계 내에 위치한다

고 볼 때, 공정의 산포가 0에 가까워질수록 지수  $C_{pd}$ 는 무한히 증가하는 특성을 갖는다. 이러한 특성은 지수  $C_p$ 와  $C_{pk}$ 에서도 나타난다. 특성 ③은 공정평균의 이탈 정도가 심할수록 지수 값이 0으로 감소하는 경향으로서, 지수  $C_p$ 를 제외한 모든 PCI에서 나타난다. 이러한 특성을 종합해볼 때, 지수  $C_{pd}$ 는 다른 PCI에 비해 이상한 성향을 보인다고 볼 수 없다.

다음의 정리는 지수  $C_{pd}$ 의 값이 기존 PCI 값과 크게 차이나지 않으며, 일정한 한계를 갖는다는 사실을 입증한다.



< 그림 5 > 공정평균의 이탈도에 따른 PCI들의 변화 ( $C_p=1$ )

[정리 7] 지수  $C_{pd}$ 의 값은  $C_p$  이하이며,  $C_{pk}$  이상이다.

[증명] 식 (5)로부터  $P(D) \geq 2\Phi(-3C_p)$ , 또한 식 (9)로부터  $P(D) \leq 2\Phi(-3C_{pk})$ . 따라서 식 (19)로부터  $C_{pk} \leq C_{pd} \leq C_p$ 이다. ■

지수  $C_{pd}$ 는  $C_{pm}$ 보다는 클 수도 있고 작을 수도 있으나,  $C_{pmk} \leq C_{pk}$ 이므로  $C_{pmk}$  이상의 값을 갖는다. <그림 5>는  $C_p=1$ 일 때 공정평균의 이탈 정도에 따른 각종 PCI 값의 변화를 나타낸 것이다. 공정평균의 이탈도가 0일 때 모든 PCI의 값은 같으며, 이탈도가 커질수록 지수  $C_p$ 를 제외한 다른 PCI들의 값은 0으로 감소한다. 공정평균이 규격한계에 다다르면 지수  $C_{pk}$ 와  $C_{pmk}$  값은 0이 되지만,  $C_{pm}$ 과  $C_{pd}$ 는 0보다 큰 값

을 갖는다. 식 (10)으로부터

$$\mu \rightarrow SL \Rightarrow C_{pm} \rightarrow \frac{C_p}{\sqrt{1+(SL-M)^2/\sigma^2}} = \frac{C_p}{\sqrt{1+9C_p}}$$

지수  $C_{pd}$ 의 한계값은 식 (19)로부터  $\mu \rightarrow SL \Rightarrow C_{pd} \rightarrow -\Phi^{-1}(0.25)/3$ 으로서  $C_p$ 와 관계없이 일정하다.

#### 4.2 모의실험을 통한 추정량의 통계적 특성

$C_{pd}$ 의 추정량으로서  $\hat{\mu} = \bar{X}$ ,  $\hat{\sigma} = S$ 를 이용한  $\hat{C}_{pd}$ 을 생각할 수 있다.

$$\hat{C}_{pd} = \frac{USL - LSL}{6\hat{\sigma}_p} \quad (22)$$

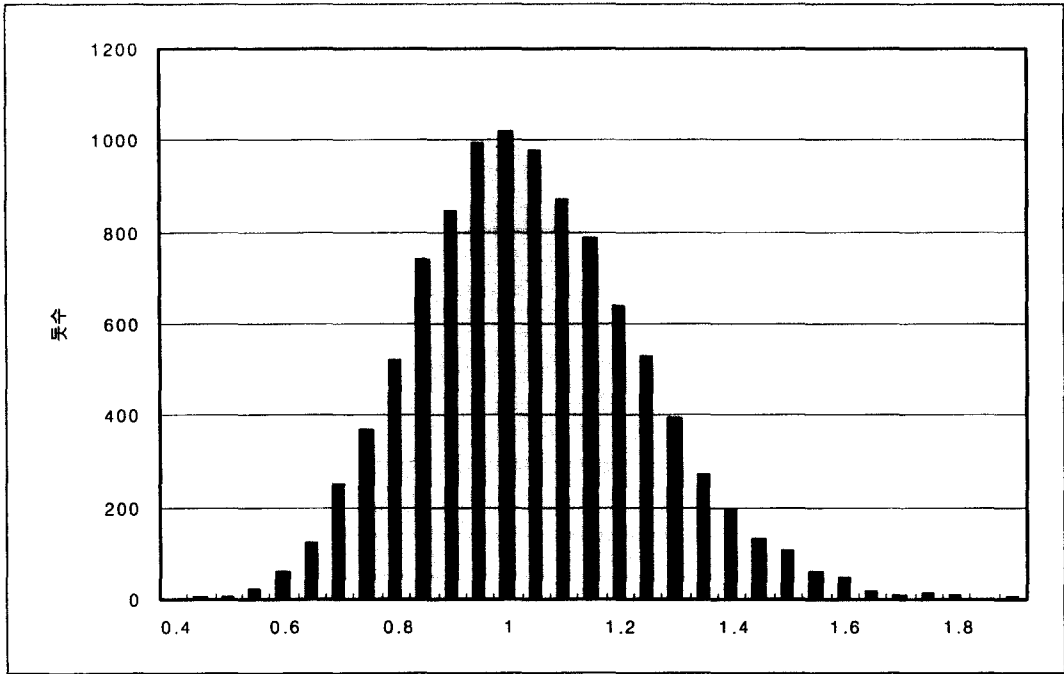
여기서

$$\hat{\sigma}_p = \frac{LSL - M}{\Phi^{-1}[\hat{P}(D)/2]}, \quad (23)$$

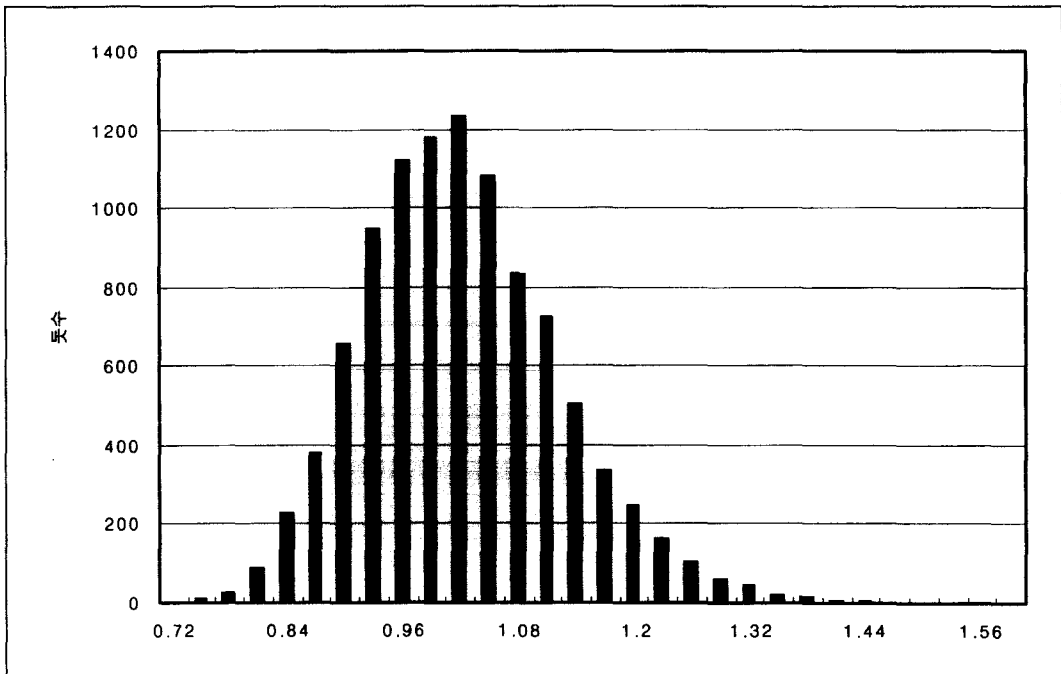
$$\hat{P}(D) = \Phi\left(\frac{LSL - \bar{X}}{S}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{USL - \bar{X}}{S}\right).$$

표본크기 50개에 대하여 10,000회의 모의실험을 통해 얻은  $\hat{C}_{pd}$ 와  $\hat{\sigma}_p$ 의 분포 형태를 도수분포표를 이용하여 나타내면 <그림 6>, <그림 7>과 같다. 그림에서 보는 바와 같이  $\hat{C}_{pd}$ 와  $\hat{\sigma}_p$ 의 분포는 오른쪽 꼬리가 긴 치우친 형태를 갖는다. 따라서 신뢰구간도 비대칭 형태가 될 것이다.

$C_{pd}$ 는 불량률을 기준으로 산출되고 있으므로 다음의 두 인자가 같다면 같은 값을 갖게 된다. 하나는 공정평균과 규격중심의 차이에 대한 표준편차의 비율  $d/\sigma$ 이며 다른 하나는 규격의 폭과 표준편차의 비율  $|\mu - M|/\sigma$ 이다. <표 1>은 모의실험을 통해  $E[\hat{C}_{pd}]$ 와  $C_{pd}$ 에 대한 95% 신뢰구간을 나타낸 것이다. 표에서  $E[\hat{C}_{pd}]$  옆에는 상대 편이를 %단위로 나타내었다. 표에서 보는 바와 같이  $\hat{C}_{pd}$ 은 지수  $C_{pd}$ 에 대해 과대 평가하는 편이(biased) 추정량이다. 이러한 편이(bias)는 표 1에 나타난 바와 같이 표본크기와 증가함에 따라 감소한다. 또한  $|\mu - M|/\sigma$ 가 일정할 때,  $d/\sigma$ 가 커질수록 상대 편이가 증가함을 알 수 있다.



< 그림 6 >  $\hat{\sigma}_p$ 의 분포( $USL=3, LSL=-3, X \sim N(0, 1)$ , 표본수=50, 실험횟수=10,000)



< 그림 7 >  $\hat{C}_{pd}$ 의 분포( $USL=3, LSL=-3, X \sim N(0, 1)$ , 표본수=50, 실험횟수=10,000)

< 표 1 >  $\widehat{C}_{pd}$ 과  $E[\widehat{C}_{pd}]$ ,  $C_{pd}$ 의 95% 신뢰구간 ( $USL = 3, LSL = -3$ , 실험회수=10,000)

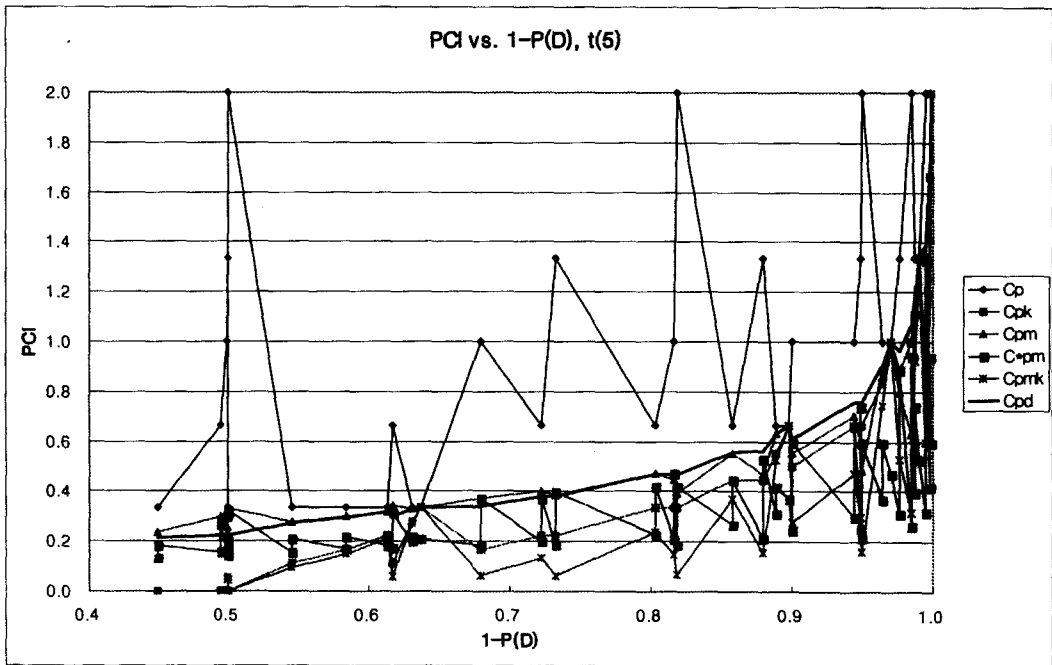
$ \mu - M /\sigma$	$d/\sigma$	1	2	3	4	5	
0	$C_{pd}$	0.333	0.667	1.000	-	-	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	0.334(0.397%)	0.670(0.487%)	1.009(0.870%)	-	-
		(n=100)	0.334(0.330%)	0.669(0.315%)	1.004(0.410%)	-	-
	CL	0.025	0.2728	0.5532	0.8271	-	-
		0.975	0.4228	0.8186	1.2357	-	-
0.5	$C_{pd}$	0.295	0.598	0.908	1.226	-	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	0.296(0.480%)	0.603(0.823%)	0.919(1.239%)	1.242(1.299%)	-
		(n=100)	0.296(0.203%)	0.600(0.351%)	0.915(0.749%)	1.234(0.669%)	-
	CL	0.025	0.2431	0.4960	0.7606	1.0247	-
		0.975	0.3641	0.7377	1.1239	1.5164	-
1	$C_{pd}$	-	0.468	0.759	1.068	-	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	0.474(1.180%)	0.768(1.196%)	1.083(1.424%)	-
		(n=100)	-	0.471(0.512%)	0.763(0.540%)	1.077(0.805%)	-
	CL	0.025	-	0.3858	0.6349	0.8976	-
		0.975	-	0.5837	0.9322	1.3249	-
1.5	$C_{pd}$	-	0.339	0.611	0.912	1.227	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	0.343(1.065%)	0.619(1.258%)	0.924(1.347%)	1.248(1.677%)
		(n=100)	-	0.341(0.413%)	0.615(0.589%)	0.919(0.712%)	1.236(0.774%)
	CL	0.025	-	0.2729	0.5095	0.7665	1.0316
		0.975	-	0.4232	0.7529	1.1262	1.5214
2	$C_{pd}$	-	-	0.470	0.759	1.068	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	-	0.476(1.174%)	0.769(1.261%)	1.085(1.575%)
		(n=100)	-	-	0.472(0.489%)	0.764(0.566%)	1.075(0.646%)
	CL	0.025	-	-	0.3900	0.6360	0.8971
		0.975	-	-	0.5829	0.9370	1.3284
2.5	$C_{pd}$	-	-	0.339	0.611	0.912	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	-	0.342(0.829%)	0.618(1.189%)	0.925(1.474%)
		(n=100)	-	-	0.340(0.295%)	0.614(0.491%)	0.918(0.625%)
	CL	0.025	-	-	0.2726	0.5100	0.7668
		0.975	-	-	0.4228	0.7522	1.1357
3	$C_{pd}$	-	-	-	0.470	0.759	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	-	-	0.474(0.778%)	0.769(1.300%)
		(n=100)	-	-	-	0.472(0.489%)	0.763(0.540%)
	CL	0.025	-	-	-	0.3869	0.6364
		0.975	-	-	-	0.5765	0.9346
3.5	$C_{pd}$	-	-	-	0.339	0.611	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	-	-	0.342(0.922%)	0.619(1.359%)
		(n=100)	-	-	-	0.341(0.442%)	0.614(0.540%)
	CL	0.025	-	-	-	0.2728	0.5101
		0.975	-	-	-	0.4225	0.7542
4	$C_{pd}$	-	-	-	-	0.470	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	-	-	-	0.475(0.985%)
		(n=100)	-	-	-	-	0.472(0.489%)
	CL	0.025	-	-	-	-	0.3874
		0.975	-	-	-	-	0.5797
4.5	$C_{pd}$	-	-	-	-	0.339	
	$E[\widehat{C}_{pd}]$	(n=50)	-	-	-	-	0.342(0.958%)
		(n=100)	-	-	-	-	0.341(0.442%)
	CL	0.025	-	-	-	-	0.2728
		0.975	-	-	-	-	0.4228



### 4.3 비정규성에 따른 민감도 분석

실제 완벽한 정규분포를 따르는 공정은 존재하지 않을 것이므로, 정규성 가정에 근거하여 개발된 지수  $C_{pd}$ 의 비정규성에 대한 민감도를 분석할 필요가 있다. 치우침(skewness)이나 두꺼운 꼬리로 인한 심각한 비정규성은 히스토그램이나 정규성 검정을 통하여 발견될 것이므로 논외로 하고, 정규분포와 육안으로 식별하기 어려운 스튜던트(Student)- $t$  분포에 대한 민감도를 분석해 보기로 한다.

각각 자유도 5와 10을 갖는 두 가지의  $t$  분포에 대한 지수  $C_{pd}$ 의 타당성을 검토해 본다. 즉, 지수  $C_{pd}$ 는 식 (19)와 같이 정규분포의 가정 하에서 계산하였으나, 실제 공정의 분포는 각각 자유도 5와 10을 갖는  $t$  분포를 따르는 경우에 대하여 공정불량률과 일치하는지 조사해 본다. 앞서서와 같이 규격  $[-3, 3]$ 에 대하여 공정평균  $\mu$ 를 -3에서 3까지 0.5 단위로 변화시키고 표준편차  $\sigma$ 를 3/5, 3/4, 1, 3/2, 3으로 바꾸어 가며 공정불량률과 각각의 PCI 값을 계산한 결과를 자유도 5인 경우 그림 7에, 자유도 10인 경우 <그림 8>에 각각 나타내었다. 그림에서 편의상  $1-P(D)$ 를 수율(yield)로 표시하여 각 지수가 수율에 대하여 증가함수가 되는지 살펴보았다.

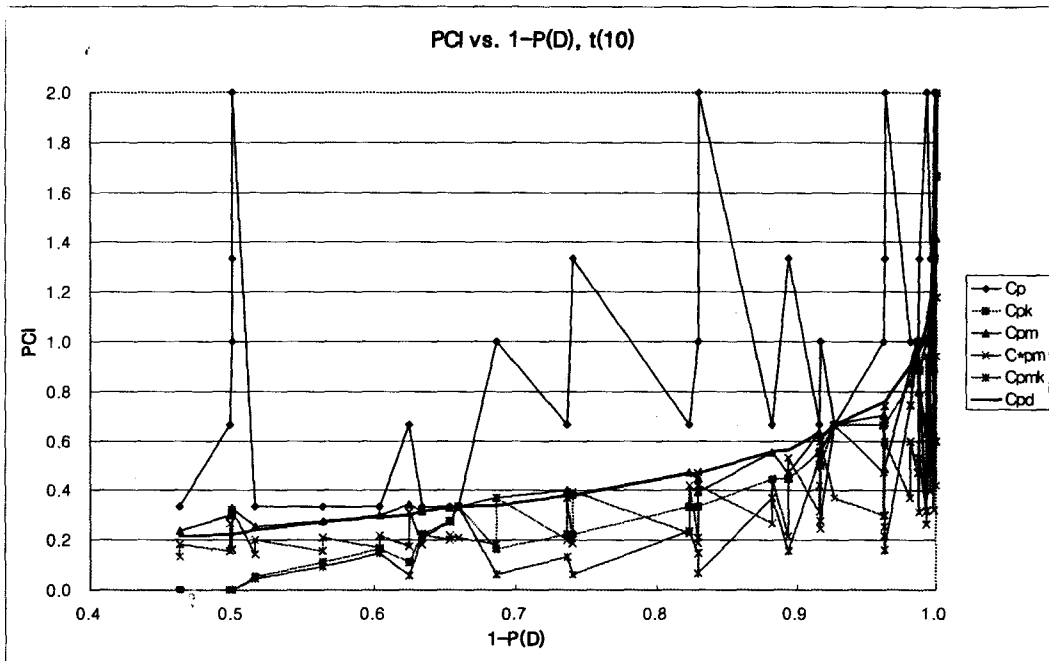


< 그림 8 > 수율에 따른 PCI들의 변화,  $t(5)$

<그림 8>에서 나타난 바와 같이 공정이 자유도 5인  $t$  분포를 따를 때 지수  $C_{pd}$ 가 불량률에 일치하지 않는 경우가 발생하였다. 그러나 지수 값이나 불량률의 차이는 미

미하며, 전반적으로 단조증가 형태를 유지하고 있음을 알 수 있다. 오히려 다른 PCI들이 더 큰 영향을 받아 불일치성이 크게 증가함을 알 수 있다. 즉, 이 경우에 있어서 지수  $C_{pd}$ 는 비정규성에 대하여 상대적으로 둔감한(robust) 것으로 판단된다.

<그림 9>에서는 공정이 자유도 10인  $t$  분포를 따를 때 각 PCI의 불량률에 대한 불일치성을 살펴볼 수 있다.  $t$  분포의 자유도가 증가하여 이전보다 정규분포에 가까워졌기 때문에 지수  $C_{pd}$ 가 불량률에 대하여 불일치하는 경우가 거의 없어진 것을 알 수 있다. 이에 비하여 다른 지수들은 비정규성의 영향을 크게 받고 있는 것으로 나타났다. 결론적으로 지수  $C_{pd}$ 는 심각하지 않은 비정규성에 대하여 상대적으로 둔감한 것으로 판단된다.



< 그림 9 > 수율에 따른 PCI들의 변화,  $t(10)$

### 5. 결론 및 향후 연구 방향

본 연구에서는 기존의 공정능력 지수들이 불량률과 일치하지 않음을 보이고, 불량률과 일치하는 능력지수  $C_{pd}$ 를 제안하였다. 또한 지수  $C_{pd}$ 가 특정한 가중함수를 이용하여 통합된 공정능력 지수 형태로 표현됨을 살펴보았으며, 모의실험을 통해 표본 크기 50과 100일 때 추정량  $\hat{C}_{pd}$ 의 기대값과 95% 신뢰구간을 구하였다. 비정규성에

대한 지수  $C_{pd}$ 의 민감도를 알아보기 위하여 공정의 분포가 각각 자유도 5와 10을 갖는  $t$  분포인 경우에 대하여 불량률과의 일치성을 살펴본 결과, 다른 지수에 비하여 비정규성에 둔감한 것을 알 수 있었다.

그러나 지수  $C_{pd}$ 만을 단독으로 사용한다면 순수한 잠재적 공정능력이나 공정평균의 이탈도를 동시에 반영할 수 없으므로 다른 PCI들과 더불어 사용하는 것이 바람직할 것이다. 예를 들어 다수의 일본 기업에서는 5가지 이상의 PCI들을 동시에 사용하는 것으로 알려져 있다[8]. 다만, 불량률 평가의 관점에 있어서는 다른 지수보다  $C_{pd}$ 가 더 적합하다.

모의실험을 통한 기대값의 계산에서 <표 1>에서 보는 바와 같이 현재 추정하고 있는  $\widehat{C}_{pd}$ 가 편이 추정량임을 알 수 있는데, 앞으로 편이를 최소화하는 추정량에 대한 연구가 요구된다. 또 통합 공정능력 지수는 현재 가중 함수  $w$ 가 통계량이 아닐 경우에 대해 분포가 알려져 있어[12], 해석적으로 신뢰구간을 계산하고 있는데, 이를 이용하여  $C_{pd}$ 와 동일한  $C_{pu}$ 에 대한 신뢰구간을 계산할 수 있다면 보다 편리하게  $C_{pd}$ 를 이용할 수 있을 것이다.

지금까지 논의한 공정능력 지수는 제품 특성치 하나에 대한 평가 척도로 쓰이는 것인데, 하나의 공정이 다수의 특성치를 갖는 경우도 빈번하다. 따라서 다수의 특성치를 갖는 공정에 대하여 통합된 공정능력 지수의 개발이나, 불량률에 기초한 공정능력 지수의 개발이 향후 연구 대상이 될 수 있다.

## 참고문헌

- [1] Abramowitz, M.; Stegun, I.A.(1965), *Handbook of Mathematical Functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, New York. Dover
- [2] Boyles, R.A.(1991), "The Taguchi Capability Index," *Journal of Quality Technology*, 23, pp. 17-26.
- [3] Chan, L.K.; Cheng, S.W.; and SPRING, F.A.(1988), "A New Measure of Process Capability," *Journal of Quality Technology*, 20, pp. 162-175.
- [4] Chou, Y.; Owen, D.B.; and Borrego, S.A.(1990), "Lower Confidence Limits on Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 22, pp. 223-229.
- [5] Hsiang, T.C. And Taguchi, G.(1985), "A Tutorial on Quality Control and Assurance-The Taguchi Methods," *ASA Annual Meeting, Las Vegas, NV*.
- [6] Johnson, N.L. And Kotz, S.(1970), *Continuous Univariate Distributions*, Volume 2. John Wiley & Sons, New York, NY.
- [7] Juran, J.M., Ed.(1974), *Quality Control Handbook*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, NY.

- [ 8 ] Kane, V.E.(1986), "Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 18, pp. 41-52.
- [ 9 ] Louis, B.(1992), *C Mathematical Function Handbook*, McGraw-Hill, New York
- [10] Pearn, W.L.; Kotz, S.; and Johnson, N.L.(1992) "Distributional and Inferential Properties of Process Capabilities," *Journal of Quality Technology*, 24, pp. 216-231.
- [11] Press, S.J.(1966). "Linear Combinations of Non-Central Chi-Square Variates," *Annals of Mathematical Statistics*, 37, pp. 480-487.
- [12] Spiring, F.A.(1997), "A Unifying Approach to Process Capability Indices," *Journal of Quality Technology*, 29, pp. 49-58.