論文2000-37SC-1-4

다 입력 이산 비선형 시스템의 선형화
(Linearization of the Multi-input Discrete-time Nonlinear Systems)

金 載 顯*, 盧 東 輝*, 朴 純 亨*, 金 容 敏*, 李 鴻 奇*
(Jae-Hyun Kim, Dong-Hwi Roh, Soon-Hyoung Park, Yong-Min Kim, and Hong-Gi Lee)

요 약

비선형 시스템의 선형화 문제는 좌표변환만에 의한 것과 좌표변환과 상태 궤환에 의한 것 등 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 본 논문에서는 다 입력 이산 비선형 시스템에 대하여 이 두 가지 문제에 대한 필요충분조건을 얻는다. 또한, 선형화 하는 좌표변환과 궤환을 구하는 방법을 증명과정에서 제시한다.

Abstract

In order to linearize the nonlinear systems, two different methods(i.e. state coordinate change and feedback) are usually used. In this paper, we consider the multi-input discrete-time nonlinear systems and obtain the necessary and sufficient conditions for both the linearization problem by state-coordinate change and the feedback linearization problem. The way of finding state coordinate change and state feedback which linearize the given system is also given in the proof.

I. 서 론

비선형 시스템의 비선형 성을 보상하는 문제는 과거 20여 년 동안 많은 관심의 대상이 되어왔다. 선형 시스템에 대한 이론은 많은 사람들의 연구의 결과로 이미 훌륭한 성과를 이루었기 때문에, 비선형 시스템의 연구 관심은 비선형 시스템을 선형 시스템으로 변환하는 쪽으로 활발하게 이루어져 왔다.

비선형 시스템을 선형 시스템으로 변환하는 방법 중 좌표변환과 비선형 궤환에 의한 접근은 미분기하학을 도입하여 수학적으로 명확하고, 비교적 광범위한 범위에서 선형화가 가능하다는 장점이 있다.

*正會員, 中央大學校 電子電氣工學部
(School of Electrical and Electronics Engineering, Chung-Ang University)
接受日字 : 1999年 7月 30日, 수정완료일 : 2000年 1月 5日

비선형 시스템의 선형화 문제는 좌표변환만에 의한 것과 좌표변환과 궤환을 이용한 것 등 크게 두 가지로 나눌 수 있다.

연속 비선형 시스템의 경우 Jakubczyk과 Respondek[1], Su[2], Hunt등[3]에 의해 연구가 이루어졌다. 이산 비선형 시스템의 경우는 단 입력의 경우에는 Lee[4]에 의해 두 문제가 모두 해결되었고, 다 입력의 경우는 궤환 선형화의 경우에만 Grizzle[5], Lee[6], Jakubczyk[7] 등에 의해 연구되었다. 그러나, 이들의 조건들은 검증하기 힘든 조건이고 본 논문의 조건들과 다르다.

본 논문은 단 입력의 경우의 Lee[4]의 방법을 다 입력의 경우로 확장할 수 있다는 것을 보임으로써 다 입력의 경우 두 가지 선형화 문제에 대한 필요충분조건을 찾는다. 물론, 본 논문에서 다루는 모든 내용은 원점 근처에서의 국부적(local) 문제이다.

다음과 같은 형태의 이산 비선형 시스템에 대하여 고려하자.

$$\Sigma: \ x(t+1) = f(x(t), u(t)) \qquad (1.1)$$

여기서 $x \in \mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}^m$, 그리고, $f(x,u): \mathbb{R}^{N+m} \rightarrow \mathbb{R}^N$는 평활한 함수(smooth function)라고 가정한다. 또한, 이산 선형 시스템은 다음과 같이 표현된다.

$$\Sigma_L: \quad z(t+1) = Az + Bv \qquad (1.2)$$

정의 1.1: (좌표변환만에 의한 선형화)

시스템 (1.1)에 대하여, 위와 같은 도달가능(reachable)한 선형 시스템 (1.2)식으로 변환하는 상태 좌표변환(state coordinate change) $z = T(x)$ 가 존재하면, 시스템 (1.1)은 좌표변환에 의하여 선형화가 가능하다고 정의한다.

정의 1.2 : (좌표변환과 궤환에 의한 선형화)

시스템 (1.1)에 대하여, 폐루프 시스템이 위와 같은 도달 가능한 선형 시스템 (1.2)식을 만족하는 상태 궤환(state feedback) $u = \gamma(x, v)$와 상태 좌표변환 $z = T(x)$가 존재하면, 시스템 (1.1)은 궤환 선형화가 가능하다고 정의한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 앞으로 전개될 각 정리의 기본이 될 벡터 필드와 distribution 의 미분사상(differential map)이 잘-정의된 벡터필드와 distribution 이 되는 개념과 조건에 대하여 서술한다. 또한, 본 논문의 주된 내용인 다 입력 다 출력 이산 비선형 시스템의 궤환 선형화에 앞서 단 입력 단 출력의 경우의 문제를 간단히 설명한다. 3절에서는 다 입력 다 출력 이산 비선형 시스템의 궤환 선형화 가능하기 위한 필요충분조건을 제시한다. 4절에서는 서로 다른 범주에 속하는 세 가지 시스템들을 고려하여 3절에서 증명한 정리들의 조건들을 비교 설명한다.

본 논문에서 불충분하게 설명된 미분 기하학의 정의나 기본적인 관계는 참고문헌[8,9,10]에서 쉽게 발견할 수 있다.

II. 기본정의 및 정리

M, Q 는 평활 다양체(smooth manifold)이고, 평활한 사상 $h: M \rightarrow Q$ 에 대해 $h_*: T_pM \rightarrow T_{h(p)}Q$ 가 전사 사상(surjective) 라고 하자.

정의 2.1 (잘-정의된 평활한 벡터 필드)

M 상의 평활한 벡터 필드 X 에 대해, 만일 $h(p) = h(q)$ 일 때 $h_*(X_p) = h_*(X_q)$ 이면, $h_*(X)$는 Q 상에서 잘-정의된 평활한 벡터 필드라고 정의한다.

보조정리 2.1 (잘-정의된 벡터 필드)[4]

X 는 평활 다양체 M 상에서 평활한 벡터 필드라고 하자. 그러면, $Y_{h(p)} = h_*(X_p)$에 의해 각 점에서(pointwise) 정의된 Y가 $h(p)$의 근방(open neighborhood)에서 잘-정의된 벡터 필드가 될 필요충분조건은 p의 어떤 근방에서 $[X, \ker h_*] \subset \ker h_*$ 일 때이다.

보조정리 2.2 (잘-정의된 대합적인 distribution)[5]

D는 $D \cap \ker h_*$ 가 상수 차원을 가지는 M 상의 대합적인(involutive) distribution라고 하면, $h_* D$ 가 Q 상에서 잘-정의된 D와 같은 차원의 대합적인 distribution이 될 필요충분조건은 $D + \ker h_*$ 가 대합적일 때이다.

시스템 (1.1)에 대하여 다음과 같은 합성함수를 정의하자.

$$\mathcal{F}_0(u^1, u^2, \cdots, u^{N+1}) \triangleq f(\cdots f(f(0, u^{N+1}), u^N), \cdots, u^1) \qquad (2.1a)$$

$$u^i = [\, u_1^i \ \cdots \ u_m^i \,]^T \qquad (2.1b)$$

$$\tilde{f}^1(x,u) = f(x,u) \qquad (2.1c)$$

$$\tilde{f}^i(x,u) = f(\tilde{f}^{i-1}(x,u), 0) \ , \quad i \geq 2 \qquad (2.1d)$$

또, κ_j는 각각의 입력 u_j, $1 \leq j \leq m$에 대한 Kronecker 지수라고 할 때,

$$U^i \triangleq \{u_j^i \mid i \leq \kappa_j\} \ , \quad i \geq 1 \qquad (2.2a)$$

$$\overline{U}^i \triangleq \{u_j^i \mid i \leq \kappa_j + 1\} \ , \quad i \geq 1 \qquad (2.2b)$$

라고 정의하고

$$\Psi_0(U^1, U^2, \cdots, U^N) \triangleq \mathcal{F}_0(u^1, u^2, \cdots, u^{N+1}) \Big|_{u_j^i = 0, \ i \geq \kappa_j + 1}$$
$$\triangleq \mathcal{F}_0(u^1, u^2, \cdots, u^{N+1}) \Big|_{\#} \qquad (2.3a)$$

$$\overline{\mathcal{F}}_0(\overline{U}^1, \overline{U}^2, \cdots, \overline{U}^{N+1}) \triangleq \mathcal{F}_0(u^1, u^2, \cdots, u^{N+1}) \Big|_{u_j^i = 0, \ i \geq \kappa_j + 2}$$
$$\triangleq \mathcal{F}_0(u^1, u^2, \cdots, u^{N+1}) \Big|_{\overline{\#}} \qquad (2.3b)$$

라고 정의하자. 그러면,

$$\Psi_0: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \tag{2.4}$$

가 된다.

정리 2.3[4]: $m=1$ 일 때, 식 (1.1)의 시스템이 좌표변환에 의해서 선형화 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) $(\Psi_0)_*|_{u=0}$ 가 동형사상(isomorphism)이다

(ii) $(\mathcal{F}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u^i})$가 $1 \le i \le N+1$에 대하여 잘-정의된 벡터 필드이다. 또한, $T=(\Psi_0)^{-1}$는 선형화 하는 좌표 변환이다

증명: 생략

정리 2.3의 조건 (ii)는 다음의 조건 (ii)'에 의해 검증될 수 있다.

$$\text{(ii)}' \ [\frac{\partial}{\partial u^i}, \ker(\mathcal{F}_0)_*] \subset \ker(\mathcal{F}_0)_*, \ 1 \le i \le N+1 \tag{2.5}$$

정리 2.4[4,6]: $m=1$ 일 때, 식 (1.1)의 시스템이 궤환 선형화 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) $(\Psi_0)_*|_{u=0}$ 가 동형사상이다

(ii) $(\mathcal{F}_0)_*(sp\{\frac{\partial}{\partial u^1} \cdots \frac{\partial}{\partial u^i}\})$, $1 \le i \le N-1$는 잘-정의된 $N-1$ 차원의 대합적인 distribution들이다

증명 : 생략

정리 2.4의 조건 (ii)는 다음의 조건 (ii)'에 의해 검증될 수 있다.

$$\text{(ii)}' \ [\frac{\partial}{\partial u^i}, \ker(\mathcal{F}_0)_*] \subset \ker(\mathcal{F}_0)_* + span\{\frac{\partial}{\partial u^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u^i}\} \quad 1 \le i \le N-1 \tag{2.6}$$

Ⅲ. 다 입력 이산 비선형 시스템의 선형화

이 절에서는 2절 후반부의 단 입력 이산 비선형 시스템의 선형화에 관한 결과를 다 입력의 경우로 확장한다. 일반성을 잃지 않고, $\varkappa_1 \ge \varkappa_2 \ge \cdots \ge \varkappa_m$ 을 가정한다.

정리 3.1 : 식 (1.1)의 시스템이 좌표변환에 의해서 선형화 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) $(\Psi_0)_*|_0$ 가 동형사상이다

(ii) $(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i})$가 $1 \le j \le m$와 $1 \le i \le \varkappa_j+1$에 대하여 잘-정의된 벡터 필드이다

여기서, $T=(\Psi_0)^{-1}$는 선형화 하는 좌표 변환이다.

증명 : (필요조건) ; V가 0주위에서 $\mathbb{R}^N$의 근방이고 $T: V \to \mathbb{R}^N$가 선형화 하는 좌표변환이라고 가정하면,

$$\tilde{f}(\xi, u) = T(f(T^{-1}(\xi), u)) \tag{3.1}$$

는 도달 가능한 쌍 (A, B)를 가지는 $\tilde{f}(\xi, u) = A\xi + \sum_{j=1}^{m} b_j u_j$ 형태의 선형 사상이다. 그러므로 $f(x, u) = T^{-1}(\tilde{f}(T(x), u))$, $x \in V$이고, $T(0)=0$이기 때문에,

$$\begin{aligned}\Psi_0(U^1, \ldots, U^N) &= T^{-1}(A^{N-1}bu^N + \ldots + bu^1)\Big|_{u_j^i=0,\ i \ge \varkappa_j+1} \\ &= T^{-1}(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\varkappa_j} A^{\ell-1} b_j u_j^\ell)\end{aligned} \tag{3.2}$$

를 얻는다. 쌍 (A, B)가 도달가능하기 때문에 조건 (i)을 만족한다. 한편,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}}_0(\overline{U}^1, \ldots, \overline{U}^{N+1}) &= T^{-1}(A^N bu^{N+1} + \ldots + bu^1)\Big|_{u_j^i=0,\ i \ge \varkappa_j+2} \\ &= T^{-1}(\sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=1}^{\varkappa_j+1} A^{\ell-1} b_j u_j^\ell)\end{aligned} \tag{3.3}$$

이다. 그러므로 $(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i}) = (T^{-1})_* A^{i-1} b_j$, $1 \le j \le m$, $1 \le i \le \varkappa_j+1$ 는 잘-정의된 벡터 필드이므로 조건 (ii)를 만족한다.

증명 : (충분조건) ; 조건(ii)에 의해, $(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i})$, $1 \le j \le m$, $1 \le i \le \varkappa_j+1$는 M 상에서 잘-정의된 벡터 필드이다. 그러면, 조건 (i)에 의해, $\{(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i}),\ 1 \le j \le m,\ 1 \le i \le \varkappa_j\}$는 N 개의 선형 독립 벡터 필드이다. 식 (2.3)의 정의에 의하여,

$$(\Psi_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i}) = (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i}),\ 1 \le j \le m,\ 1 \le i \le \varkappa_j \tag{3.4}$$

가 됨을 쉽게 보일 수 있다. $\xi = \{\xi_j^i,\ 1 \le j \le m,$

$1\le i\le \chi_j\}$ 라고 정의하면 조건 (i)에 의해, $\xi=\Psi_0^{-1}(x)$가 좌표변환이 되는 데, 시스템 (1.1)이 ξ-좌표 계에서 선형 시스템이 된다는 것을 보인다.

$\xi(t+1)=\tilde{f}(\xi,u)$라면, $\tilde{f}(\xi,u)=\Psi_0^{-1}(f(\Psi_0(\xi),u))$인 관계를 만족한다. 이것은 조건 (i)에 의해 $\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$에서 원점의 근방에서 잘-정의된 사상이다.

$$Y_j^i=(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^i}),\ 1\le j\le m\ ,\ 1\le i\le \chi_j+1 \tag{3.5}$$

라고 두면,

$$[Y_{j_1}^{i_1},\ Y_{j_2}^{i_2}]=(\overline{\mathcal{F}}_0)_*[\frac{\partial}{\partial u_{j_1}^{i_1}},\ \frac{\partial}{\partial u_{j_2}^{i_2}}]=0$$
$$\text{for}\quad 1\le \ell\le 2\ ,\ 1\le j_\ell\le m\ ,\ 1\le i_\ell\le \chi_{j_\ell}+1 \tag{3.6}$$

이 된다. 그래서, $\{Y_j^i\,|\,1\le j\le m\ ,\ 1\le i\le \chi_j+1\}$ 은 $0\in M$의 근방에서 정의된 $N+m$ 개의 교환 가능한 (commutative) 벡터 필드의 집합이다. 또, $\{Y_j^i\,|\,1\le j\le m\ ,\ 1\le i\le \chi_j\}$ 가 선형 독립이기 때문에, $Y_j^{\chi_j+1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{\chi_i}a_{j,i}^{\ell}Y_i^{\ell}$, $1\le j\le m$ 인 관계를 만족하는 상수 $a_{j,i}^{\ell}\in\mathbb{R}$ 가 존재한다. $f(\Psi_0(\xi),u)=\overline{\mathcal{F}}_0(u,\xi)$, $\xi\in\mathbb{R}^N$이 되므로

$$\tilde{f}(\xi,u)_*(\frac{\partial}{\partial u_i})=(\Psi_0^{-1}\circ\overline{\mathcal{F}}_0(u,\xi))_*(\frac{\partial}{\partial u_i})$$
$$=(\Psi_0^{-1})_*Y_i^1=\frac{\partial}{\partial\xi_i^1}\ ,\ 1\le i\le m \tag{3.7a}$$

이 만족된다. 유사하게,

$$\tilde{f}(\xi,u)_*(\frac{\partial}{\partial\xi_i^j})=(\Psi_0^{-1}\circ\overline{\mathcal{F}}_0(u,\xi))_*(\frac{\partial}{\partial\xi_i^j})$$
$$=(\Psi_0^{-1})_*Y_i^{j+1}=\frac{\partial}{\partial\xi_i^{j+1}},\ 1\le i\le m,\quad 1\le j\le\chi_i-1 \tag{3.7b}$$

이고

$$\tilde{f}(\xi,u)_*(\frac{\partial}{\partial\xi_i^{\chi_i}})=(\Psi_0^{-1}\circ\overline{\mathcal{F}}_0(u,\xi))_*(\frac{\partial}{\partial\xi_i^{\chi_i}})=(\Psi_0^{-1})_*Y_i^{\chi_i+1}$$
$$=(\Psi_0^{-1})_*(\sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{\chi_j}a_{i,j}^{\ell}Y_j^{\ell})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{\chi_j}a_{i,j}^{\ell}\frac{\partial}{\partial\xi_j^{\ell}} \tag{3.7c}$$

이 된다. 그러므로, 어떤 행렬 A와 B에 대한 $\tilde{f}(\xi,u)=A\xi+Bu$을 얻는다.

정리 3.1의 조건 (ii)는 다음의 조건 (ii)′에 의해 검증될 수 있다.

(ii)′ $1\le i\le m$에 대하여

$$[\frac{\partial}{\partial u_j^i},\ \ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*]\subset\ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*\ ,1\le j\le m,$$
$$1\le i\le\chi_j+1 \tag{3.8}$$

정리 3.1에서 이산 비선형 시스템을 좌표변환에 의하여 선형 시스템으로 변환시킬 수 있는 필요충분조건을 다루었다. 다음은 좌표변환만에 의하여 선형화가 불가능할 경우 비선형 상태 궤환을 허용하여 선형화 시키는 궤환 선형화를 고려한다. 우선 연속의 경우와 마찬가지로 다음의 보조정리를 쉽게 증명할 수 있다.

보조정리 3.2 : 식 (1.1)의 시스템이 (0, 0)에서 국부적으로 선형화 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

다음의 관계를 만족하는 평활한 함수 $h_1(x),h_2(x),\cdots,h_m(x):W(\subset\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$가 존재한다.

(i) W 는 $0\in\mathbb{R}^N$ 의 근방이다

(ii) $1\le j\le m$ 와 $1\le i\le\chi_j-1$ 에 대하여

$$\frac{\partial}{\partial u}(h_j\circ\tilde{f}^i)\equiv 0$$

(iii) $$det\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)_{x=0}\\ \left(\frac{\partial h_1\circ f}{\partial x}\right)_{(0,0)}\\ \vdots\\ \left(\frac{\partial h_1\circ\tilde{f}^{\chi_1-1}}{\partial x}\right)_{(0,0)}\\ \vdots\\ \left(\frac{\partial h_m}{\partial x}\right)_{(0,0)}\\ \vdots\\ \left(\frac{\partial h_1\circ\tilde{f}^{\chi_m-1}}{\partial x}\right)_{(0,0)}\end{bmatrix}\ne 0$$

(iv) $$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial(h_1\circ\tilde{f}^{\chi_1})}{\partial u}\right)_{(0,0)}\\ \vdots\\ \left(\frac{\partial(h_m\circ\tilde{f}^{\chi_m})}{\partial u}\right)_{(0,0)}\end{bmatrix}$$

는 비특이(nonsigular) 행렬

(v) $1\le j\le m$ 에 대하여 $h_j(0)=0$

증명 : 생략

식 (1.1)의 시스템에 대하여 (3.9a)와 같은 distribution 들을 정의한다.

$$\Delta_i span \frac{\partial}{\partial u_j^{\ell}}\, 1\le j\le m,\ 1\le \ell \le \min(\chi_i-1, \chi_j),\ 1\le i\le m \tag{3.9a}$$

$$d_i \triangleq \dim(\Delta_i), \tag{3.9b}$$

정리 3.3: 식 (1.1)의 시스템이 궤환 선형화 가능하기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

(i) $(\Psi_0)_*|_0$ 가 동형사상이다

(ii) $(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\Delta_i)$, $1\le i\le m$ 는 잘-정의된 d_i 차원의 대합적인 distribution들이다

증명: (필요조건); 식 (1.1)의 시스템이 궤환 선형화 가능하다고 가정하자. 그러면, 보조정리 3.2에 의해,

$$z^j = [z_1^j \cdots z_{\chi_j}^j]^T,\ 1\le j\le m \tag{3.10a}$$

$$z_i^j = h_j \circ \tilde{f}^{i-1}(x,0),\ 1\le j\le m,\ 1\le i\le \chi_j \tag{3.10b}$$

인 관계를 만족하는 좌표변환 $z=T(x)=[z^{1T} \cdots z^{mT}]^T$ 가 존재한다. 따라서,

$$z(t+1) = \bar{f}(z(t), u(t)) = T(f(T^{-1}(z(t)), u(t))) \tag{3.11}$$

가 된다. 여기서

$$\bar{f}(z,u) = [\bar{f}^1(z,u)^T\ \bar{f}^2(z,u)^T \cdots \bar{f}^m(z,u)^T]^T \tag{3.12a}$$

$$\bar{f}^j(z,u) = [z_2^j\ z_3^j \cdots z_{\chi_j}^j\ \bar{h}_j(z,u)]^T,\ 1\le j\le m \tag{3.12b}$$

$$\bar{h}_j(z,u) = h_j \circ \tilde{f}^{\chi_j}(T^{-1}(z), u),\ 1\le j\le m \tag{3.12c}$$

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial u}\bar{h}(z,u)\Big|_{(0,0)}\right)\neq 0, \tag{3.13}$$

$\bar{h}(z,u) = [\bar{h}_1(z,u) \cdots \bar{h}_m(z,u)]^T$ 인 관계를 만족한다. $f(x,u)=T^{-1}(\bar{f}(T(x),u))$이고 $T(0)=0$ 이기 때문에, 따름정리 A.2 에 의해,

$$T\circ \overline{\mathcal{F}}_0(\bar{U}^1,\cdots,\bar{U}^{N+1}) = \begin{bmatrix} \bar{h}_1(\beta^{\chi_1+1}, u^{\chi_1}) \\ \vdots \\ \bar{h}_1(\beta^2, u^1) \\ \vdots \\ \bar{h}_m(\beta^{\chi_m+1}, u^{\chi_m}) \\ \vdots \\ \bar{h}_m(\beta^2, u^1) \end{bmatrix}_{\#} \tag{3.14}$$

인 관계를 가진다는 것을 쉽게 보일 수 있다. $\chi_i=1$ 인 경우, $\Delta_i=\emptyset$ 이므로 $(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\Delta_i)$ 가 잘-정의된 대합적인 distribution 이다. $\chi_i\ge 2$ 인 경우, 식 (3.14)에 의해서, $1\le i\le m$ 에 대하여

$$\langle dz_p^q, (T\circ \overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^{\ell}})\rangle = 0,$$
$$1\le j\le m,\ 1\le \ell\le \min(\chi_i-1, \chi_j),$$
$$1\le q\le m,\ \chi_q\ge \chi_i,\ ,1\le p\le \chi_q-\chi_i+1 \tag{3.15}$$

라는 것을 쉽게 보일 수 있다. 이것은

$$\dim\{(T\circ \overline{\mathcal{F}}_0)_*(\Delta_i)\}\le d_i \tag{3.16}$$

을 만족한다. 또한, $(T\circ \overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^{\ell}})$, for $1\le j\le m$, $1\le \ell\le \min(\chi_i-1,\chi_j)$는 선형 독립 벡터이기 때문에,

$$\dim\{(T\circ \overline{\mathcal{F}}_0)_*(\Delta_i)\}\ge d_i \tag{3.17}$$

을 만족한다. (3.16)와 (3.17)에 의해, $(T\circ \overline{\mathcal{F}}_0)_*(\Delta_i)$는 잘-정의된 d_i 차원의 대합적인 distribution 이다. 이것은 T 가 미분가능동형사상(diffeomorphism)이라는 사실과 함께 조건 (ii)를 만족한다.

증명(충분조건); 조건 (ii)에 의해, $\Delta=(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\Delta_i)$, $1\le i\le m$ 는 M 상에서 잘-정의된 대합적인 d_i 차원의 distribution 이다. 따라서, Frobenius 정리와 조건 (i)에 의해서, $h_j(0)=0$ 이고,

$$\det\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u^{\chi_1}} h_1\circ \overline{\mathcal{F}}_0(u^1,\ldots,u^{\chi_1+1})\Big|_{(0,0)} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^{\chi_m}} h_m\circ \overline{\mathcal{F}}_0(u^1,\ldots,u^{\chi_1+1})\Big|_{(0,0)} \end{bmatrix}\neq 0, \tag{3.18}$$

$$L_X(h_j(x))=0,\ \text{for all}\ X\in\Delta \tag{3.19}$$

인 관계를 만족하는 스칼라 평활한 함수 $h_j(x)$, $1\le j\le m$ 가 존재한다. (자세한 내용은 참고문헌[11]에서 찾을 수 있다.) 이것은

$$\frac{\partial}{\partial u^i} h_j\circ \overline{\mathcal{F}}_0(u^1,\ldots,u^{\chi_1+1})=0,\ 1\le j\le m,\ 1\le i\le \chi_j-1 \tag{3.20a}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} h_j\circ \tilde{f}^i(x,u)=0,\ 1\le j\le m,\ 1\le i\le \chi_j-1, \tag{3.20b}$$

$$det\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial(h_1 \circ f^{\chi_1})}{\partial u}\right)_{(0,0)} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial(h_m \circ f^{\chi_m})}{\partial u}\right)_{(0,0)} \end{bmatrix} \neq 0 \qquad (3.21)$$

인 관계를 만족한다.

따라서, 보조정리 3.2의 조건 (i),(ii),(iv),(v)를 만족한다. 보조정리 3.2의 조건 (iii)은 정리 3.3의 조건 (i)과 식 (3.18), (3.20)에 의해 만족된다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

그러므로, 보조정리 3.2에 의해, 시스템 (1.1) 은 국부적으로 궤환 선형화 가능하다.

정리 3.3의 조건 (ii)는 다음의 조건 (ii)′에 의해 검증될 수 있다.

(ii)′ $1 \le i \le m$에 대하여

$$[X, \ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*] \subset \ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_* + \Delta_i, \text{ for } X \in \Delta_i \qquad (3.22)$$

정리 3.1의 조건을 만족하면 정리 3.3의 조건을 만족하지만 역은 성립하지 않는다.(4절의 예제 2 참조). 따라서, 좌표변환만으로 선형화가 불가능하면 궤환 선형화를 고려할 수 있다.

Ⅳ. 예 제

여기에서는 앞의 정리를 설명하는 다양한 예제를 소개한다.

예제 1: (좌표변환만에 의한 선형화)

다음과 같은 비선형 시스템에 대하여 고려하자.

$$\Sigma: \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u_1(t) \\ x_2(t)u_1(t)+x_4(t) \\ u_2(t) \\ (x_2(t))^2+u_3(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t))$$

여기서, $x_1=2$, $x_2=2$, $x_3=1$ 가 됨을 쉽게 알 수 있다. 이제, 선형화가 가능한지 알아보기 위하여 Ψ_0 를 구해보자.

$$\Psi_0(U^1, \dots, U^5) = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_1^1 \\ u_1^2u_1^1+u_2^2 \\ u_2^1 \\ (u_1^2)^2+u_3^1 \end{bmatrix}, \quad (\Psi_0)_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1^2 & 0 & 0 & u_1^1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2u_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

이 된다. $(\Psi_0)_*|_0$ 가 비특이 행렬이므로 정리 3.1과 정리 3.3의 조건 (i)을 만족한다. 그러면, $\overline{\mathcal{F}}_0$ 를 구해보자.

$$\overline{\mathcal{F}}_0 = \begin{bmatrix} u_1^2 \\ u_1^1 \\ u_1^2u_1^1+u_2^2 \\ u_2^1 \\ (u_1^2)^2+u_3^1 \end{bmatrix}, \ (\overline{\mathcal{F}}_0)_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1^2 & 0 & 0 & u_1^1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2u_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이고, $\ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_* = span\{\frac{\partial}{\partial u_3^2}, \frac{\partial}{\partial u_1^3}, \frac{\partial}{\partial u_2^3}\}$ 이므로, 정리 3.1의 조건 (ii)를 만족한다. 그러므로, 이 시스템은 정리 3.1에 의하여 좌표변환만에 의해 선형화 가능하다. 또한, 다음의 식을 풀면 원하는 좌표변환을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \Psi_0(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5) = \begin{bmatrix} \eta_4 \\ \eta_1 \\ \eta_4\eta_1+\eta_5 \\ \eta_2 \\ (\eta_4)^2+\eta_3 \end{bmatrix}$$

위의 식을 풀면, $\eta_1 = x_2$, $\eta_2 = x_4$, $\eta_3 = x_5-(x_1)^2$, $\eta_4 = x_1$, $\eta_5 = x_3 - x_1x_2$를 얻게 된다. 따라서, 좌표변환은

$$z = T(x) = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5-(x_1)^2 \\ x_1 \\ x_3-x_1x_2 \end{bmatrix}$$

이 되고, 변환된 시스템은

$$z_1(t+1) = x_2(t+1) = u_1(t)$$

$$z_2(t+1) = x_4(t+1) = u_2(t)$$

$$z_3(t+1) = x_5(t+1) - (x_1(t+1))^2 = (x_2(t))^2 + u_3(t) - (x_2(t))^2 = u_3(t)$$

$$z_4(t+1) = x_1(t+1) = x_2(t) = z_1(t)$$

$$z_5(t+1) = x_3(t+1) - x_1(t+1)x_2(t+1) =$$

$x_2(t)u_1(t) + x_4(t) - x_2(t)u_1(t) = z_2(t)$ 이므로,

$$z(t+1) = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{bmatrix} u_2(t) + \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix} u_3(t)$$

형태의 선형시스템이 된다.

예제 2 : (좌표변환과 궤환에 의한 선형화)

다음과 같은 비선형 시스템에 대하여 고려하자.

$$\Sigma : \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ u_2(t) \\ x_2(t)u_2(t)+x_4(t) \\ u_1(t)+(x_1(t))^2 \\ (x_2(t))^2+u_3(t) \end{bmatrix} = f(x(t), u(t))$$

여기서, $\kappa_1=2$, $\kappa_2=2$, $\kappa_3=1$ 가 됨을 쉽게 알 수 있다. 이제, 선형화가 가능한지 알아보기 위하여 Ψ_0 를 구해보자.

$$\Psi_0(U^1, \ldots, U^5) = \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_2^1 \\ u_2^2u_2^1+u_1^2 \\ u_1^1 \\ (u_2^2)^2+u_3^1 \end{bmatrix}, \quad (\Psi_0)_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^2 & 0 & 1 & u_2^1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2u_2^2 \end{bmatrix}$$

이 된다. $(\Psi_0)_*|_0$ 가 비특이 행렬이므로 정리 3.1과 정리 3.3의 조건 (i)을 만족한다. 그러면, $\overline{\mathcal{F}}_0$ 를 구해보자.

$$\overline{\mathcal{F}}_0 = \begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_2^1 \\ u_2^2u_2^1+u_1^2 \\ u_1^1+(u_2^3)^2 \\ (u_2^2)^2+u_3^1 \end{bmatrix}, (\overline{\mathcal{F}}_0)_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^2 & 0 & 1 & u_2^1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2u_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2u_2^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이고, $\ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_* = span\{\frac{\partial}{\partial u_3^2},\ \frac{\partial}{\partial u_1^3},\ 2u_2^3\frac{\partial}{\partial u_1^1}-\frac{\partial}{\partial u_2^3}\}$

$\Delta_1 = span\{\frac{\partial}{\partial}u_1^1, \frac{\partial}{\partial}u_2^1, \frac{\partial}{\partial}u_3^1, \Delta_2 = span\frac{\partial}{\partial}u_1^1,\ \frac{\partial}{\partial}u_2^1,\ \frac{\partial}{\partial}u_3^1\}, \Delta_3 = \varnothing$

이므로, $[\frac{\partial}{\partial u_2^3}\ ,\ 2u_2^3\frac{\partial}{\partial u_1^1}-\frac{\partial}{\partial u_2^3}] = \frac{\partial}{\partial u_1^1} \not\in \ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*$ 가 되므로, 정리 3.1의 조건 (ii)는 만족하지 못한다. 그러므로, 이 시스템은 좌표변환만에 의해 선형화가 불가능하다. 하지만,

$[X\ ,\ \ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*] \in \ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_* + \Delta_i\ ,\quad X \in \Delta_i\ ,\ $ for $i=1,2$

$\Delta_3 = \varnothing$

이므로, 정리 3.3의 조건 (ii)는 만족하기 때문에, 정리 3.3에 의하여 좌표변환과 궤환에 의해 선형화 가능하다. 이제, 선형화 시스템을 직접 구해보자.

$$G_0 = span\{(\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_1^1}),\ (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_2^1}),\ (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_3^1})\}$$

$$= span\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\}\ \dim(G_0)=3 \text{ 이고,}$$

$$G_1 = span\{\ (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_1^1}), (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_2^1}), (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_3^1}), (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_1^2}), (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_2^2}), (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_3^2})\}$$

$$= span\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ u_2^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ u_2^1 \\ 0 \\ 2u_2^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

$\dim(G_1)=5=N$ 이므로 더 이상 진행하지 않는다.

$\kappa_{\max}=2$ 인 경우이므로, $span\{dh_1,\ dh_2\} = G_0^{\perp}$ 인 h_1, h_2 가 존재한다. 그러므로,

$$\langle dh_i\ ,\ (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^1}) \rangle = 0\ ,1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3$$

$$\langle dh_i\ ,\ (\overline{\mathcal{F}}_0)_*(\frac{\partial}{\partial u_j^2}) \rangle \neq 0\ ,1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 2$$

의 관계를 만족한다. 즉,

$$\langle dh_i\ ,\ sp\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\} \rangle = 0\ ,\ 1 \le i \le 2$$

$$\begin{bmatrix} \langle dh_1\ , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle & \langle dh_1\ , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \rangle \\ \langle dh_2\ , \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle & \langle dh_2\ , \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 2x_1 \end{bmatrix} \rangle \end{bmatrix}$$

가 비특이 행렬인 관계를 만족하고, 서로 독립인 exact one form dh_1과 dh_2 는

$$\{dh_1\ ,\ dh_2\} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -x_2 \\ -x_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T\}$$

쉽게 찾을 수 있다. 따라서, $h_1=x_1$, $h_2=x_3-x_1x_2$ 가 된다. 다음으로 $m_1=2<m=3$ 이므로, 다음 단계로 넘어가야 하는데 G_{-1} 이 존재하지 않으므로,

$$m_2 = N-(\kappa m_1) = 5-4 = 1$$

$$dh_i\ ,\cdots,h_i \circ \tilde{f}^{\kappa-1}\ ,\ 1 \le i \le m_1 = 2$$

$$dh_i\ ,\cdots,h_i \circ \tilde{f}^{\kappa-2}\ ,\ m_1+1 = 3 \le i \le m_1+m_2 = 3$$

이 된다. 여기서 dh_1 , dh_2 , $dh_1 \circ f$, $dh_2 \circ f$, dh_3

가 독립이고, $\frac{\partial h_3}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}\neq 0$ 인 관계를 만족하므로, $dh_3=[0\ 0\ 0\ 0\ 1]$이 되고, $h_3=x_5$ 가 됨을 쉽게 보일 수 있다. 따라서, 선형화 하는 궤환은

$$h_1\circ \tilde{f}^2=u_2=v_1$$
$$h_2\circ \tilde{f}^2=u_1+(x_1)^2=v_2$$
$$h_3\circ f=(x_2)^2+u_3=v_3$$

이 되고, 궤환을 적용한 후의 시스템은

$$f(x,v)=\begin{bmatrix} x_2 \\ v_1 \\ x_2v_1+x_4 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

가 된다. 이제, 선형화 하는 좌표변환 $T(x)$ 를 구하면,

$$z=T(x)=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_1\circ \tilde{f} \\ h_2 \\ h_2\circ \tilde{f} \\ h_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3-x_1x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

이 되고, 변환된 시스템은

$$z_1(t+1)=x_1(t+1)=z_2(t)$$
$$z_2(t+1)=x_2(t+1)=u_1(t)$$
$$z_3(t+1)=x_3(t+1)-x_1(t+1)x_2(t+1)=z_4(t)$$
$$z_4(t+1)=x_4(t+1)=u_2(t)$$

$z_5(t+1)=x_5(t+1)=u_3(t)$ 이므로,

$$z(t+1)=\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{bmatrix}z(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}u_1(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u_2(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_3(t)$$

형태의 선형시스템이 된다.

예제 3 : (좌표변환과 궤환에 의해 선형화 불가능)

다음과 같은 비선형 시스템에 대하여 고려하자.

$$\Sigma:\begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ x_3(t+1) \\ x_4(t+1) \\ x_5(t+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2(t)+x_3(t) \\ u_2(t) \\ x_2(t)u_2(t)+x_4(t) \\ u_1(t)+(x_1(t))^2 \\ (x_2(t))^2+u_3(t) \end{bmatrix}=f(x(t),u(t))$$

여기서, $x_1=2,\ x_2=2,\ x_3=1$ 가 됨을 쉽게 알 수 있다. 이제, 선형화가 가능한지 알아보기 위하여 Ψ_0 를 구해보자.

$$\Psi_0(U^1,\ldots,U^5)=\begin{bmatrix} u_2^2 \\ u_2^1 \\ u_2^2u_2^1+u_1^2 \\ u_1^1 \\ (u_2^2)^2+u_3^1 \end{bmatrix},\ (\Psi_0)_*=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&u_2^2&0&1&u_2^1 \\ 1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&2u_2^2 \end{bmatrix}$$

이 된다. $(\Psi_0)_*|_0$ 가 비특이 행렬이므로 정리 3.1과 정리 3.3의 조건 (i)을 만족한다. 그러면, $\overline{\mathcal{F}}_0$ 를 구해보자.

$$\overline{\mathcal{F}}_0=\begin{bmatrix} u_2^2+u_2^3u_2^2+u_1^3 \\ u_2^1 \\ u_2^2u_2^1+u_1^2 \\ u_1^1+(u_2^3)^2 \\ (u_2^2)^2+u_3^1 \end{bmatrix},\quad (\overline{\mathcal{F}}_0)_*=\begin{bmatrix} 0&0&0&0&1+u_2^3&0&1&u_2^2 \\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \\ 0&u_2^2&0&1&u_2^1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0&2u_2^3 \\ 0&0&1&0&2u_2^2&0&0&0 \end{bmatrix}$$

이고,

$$\ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*=span\{\frac{\partial}{\partial u_3^2},\ 2u_2^3\frac{\partial}{\partial u_1^1}-u_2^2\frac{\partial}{\partial u_1^3}+\frac{\partial}{\partial u_2^3},\ -2u_2^2\frac{\partial}{\partial u_3^1}-u_1^1\frac{\partial}{\partial u_1^2}+\frac{\partial}{\partial u_2^2}-(1+u_2^3)\frac{\partial}{\partial u_1^3}\}$$

$\Delta_1=span\{\frac{\partial}{\partial u_1^1},\ \frac{\partial}{\partial u_2^1},\ \frac{\partial}{\partial u_3^1}\}$ 이므로,

$[\frac{\partial}{\partial u_1^1},\ -2u_2^2\frac{\partial}{\partial u_3^1}-u_1^1\frac{\partial}{\partial u_1^2}+\frac{\partial}{\partial u_2^2}-(1+u_2^3)\frac{\partial}{\partial u_1^3}]=-\frac{\partial}{\partial u_1^2}\notin\ker(\overline{\mathcal{F}}_0)_*+\Delta_1$ 이므로, 정리 3.3의 조건 (ii)를 만족하지 못하기 때문에, 정리 3.3에 의하여 좌표변환과 궤환에 의해서 선형화가 불가능하다.

V. 결 론

본 논문에서는 단 입력 이산 비선형 시스템의 선형화 문제를 다 입력 이산 비선형 시스템의 선형화 문제로 확장하여, 좌표변환만에 의한 선형화 문제와 좌표변환과 궤환에 의한 선형화 문제의 필요충분조건을 구하였다. 또한, 각각의 문제에 대한 예제를 제시하여, 본 논문에서 제시된 정리에 의하여 선형화 가능한 시스템인지를 판별하고, 선형시스템으로 변환되는 것을 보였다. 선형화 하는 좌표변환과 궤환을 구하는 방법은 증명과정에서 제시하였다. 향후 연구 과제로서는 [12,13]의 이산 버전 또는 [4]의 다 변수 버전인 출력을 포함한 다 입력 다 출력 이산 비선형 시스템의 선형화 문제를 생각해 볼 수 있다.

부 록

보조정리 A.1:

z 와 $\bar{f}$ 와 $\bar{h}$ 를 (3.10)-(3.13) 식과 같이 정의

할 때 다음과 같은 관계를 만족한다. $0 \le k \le x_1$ 에 대하여,

$$f(\cdots f(f(0, u^{N+1}), u^{N}), \cdots, u^{x_1+1-k}) \Big|_{\bar{\#}} =$$

$$T^{-1}\{\beta^{x_1+1-k}(u^{x_1+1-k}, u^{x_1+2-k}, \cdots, u^{x_1+1})\} \Big|_{\bar{\#}}$$

$$\beta^{x_1+1-k}(u^{x_1+1-k}, u^{x_1+2-k}, \cdots, u^{x_1+1}) \triangleq$$

$$\left[(\beta_1^{x_1+1-k})^T \ (\beta_2^{x_1+1-k})^T \ \cdots \ (\beta_m^{x_1+1-k})^T \right]^T$$

$$\beta_j^{x_1+1-k}(u^{x_1+1-k}, u^{x_1+2-k}, \cdots, u^{x_1+1}) =$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{j,1}^{x_1+1-k}(u^{x_1-k+x_j}, \cdots, u^{x_1+1}) \\ \vdots \\ \beta_{j,x_j}^{x_1+1-k}(u^{x_1+1-k} \cdots, u^{x_1+1}) \end{bmatrix} \tag{A.5a}$$

$$\beta_{j,i}^{x_1+1-k}(u^{x_1+1-k}, u^{x_1+2-k}, \cdots, u^{x_1+1}) =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{if } 1 \le i \le x_j - 1 - k \\ \beta_{j,i+1}^{x_1+2-k}, & \text{if } x_j - k \le i \le x_j - 1 \\ \bar{h}_j[\beta^{x_1+2-k}, u^{x_1+1-k}], & \text{if } i = x_j \end{cases} \tag{A.5b}$$

증명 : $k=0$ 일 때, 다음과 같은 관계를 만족한다는 것을 쉽게 보일 수 있다.

$$\begin{aligned} f(\cdots f(f(0, u^{N+1}), u^{N}), \cdots, u^{x_1+1}) \Big|_{\bar{\#}} &= T-1(\bar{f}(0, u^{x_1+1}) \Big|_{\bar{\#}} \\ &= T-1(\beta^{x_1+1}(u^{x_1+1})) \Big|_{\bar{\#}} \end{aligned}$$

$$\beta^{x_1+1}(u^{x_1+1}) \triangleq$$

$$\left[\beta_1^{x_1+1}(u^{x_1+1})^T \ \beta_2^{x_1+1}(u^{x_1+1})^T \ \cdots \ \beta_m^{x_1+1}(u^{x_1+1})^T \right]^T$$

$$\beta_j^{x_1+1}(u^{x_1+1}) = \left[0 \ \cdots \ 0 \ \beta_{j,x_j}^{x_1+1}(u^{x_1+1}) \right]^T$$

$$\beta_{j,x_j}^{x_1+1}(u^{x_1+1}) = \bar{h}_j(0, u^{x_1+1})$$

$$\bar{h}_j(z, u) = h_j \circ \tilde{f}^{x_j}(T^{-1}(z), u)$$

$k \le \ell$ 일 때, 식 (A.5)가 만족된다고 가정하자. 이것은

$$\beta_{j,i}^{x_1+1-\ell}(u^{x_1+1-\ell}, \cdots, u^{x_1+1}) =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{if } 1 \le i \le x_j - 1 - \ell \\ \beta_{j,i+1}^{x_1+2-\ell}, & \text{if } x_j - \ell \le i \le x_j - 1 \\ \bar{h}_j[\beta^{x_1+2-\ell}, u^{x_1+1-\ell}], & \text{if } i = x_j \end{cases}$$

인 관계를 만족한다. 그러면,

$$f(\cdots f(f(0, u^{N+1}), u^{N}), \cdots, u^{x_1-\ell}) \Big|_{\bar{\#}}$$

$$= T^{-1}\{\bar{f}[\beta^{x_1-\ell+1}(u^{x_1-\ell+1}, \cdots, u^{x_1+1}), u^{x_1-\ell}]\} \Big|_{\bar{\#}}$$

$$= T^{-1}\{\beta^{x_1-\ell}(u^{x_1-\ell}, \cdots, u^{x_1+1})\} \Big|_{\bar{\#}}$$

인 관계를 만족한다. 따라서,

$$\beta_{j,i}^{x_1-\ell}(u^{x_1-\ell}, \cdots, u^{x_1+1}) =$$

$$\begin{cases} 0, & \text{if } 1 \le i \le x_j - 2 - \ell \\ \beta_{j,i+1}^{x_1+1-\ell}(u^{x_1+1-\ell}, \cdots, u^{x_1+1}), & \text{if } x_j - 1 - \ell \le i \le x_j - 1 \\ \bar{h}_j(\beta^{x_1+1-\ell}, u^{x_1-\ell}), & \text{if } i = x_j \end{cases}$$

인 관계를 만족한다. 이것은 $k = \ell + 1$ 일 때, 식 (A.5)가 만족된다는 것을 보인다.

따름정리 A.2:

보조정리 A.1 와 같은 가정 하에서,

$$\bar{\mathcal{F}}_0(\bar{U}^1, \cdots, \bar{U}^{N+1}) = T^{-1}\{\beta^1(u^1, u^2, \cdots, u^{x_1+1})\} \Big|_{\bar{\#}}$$

$$\beta^1(u^1, \cdots, u^{x_1+1}) \triangleq \left[(\beta_1^1)^T \ (\beta_2^1)^T \ \cdots \ (\beta_m^1)^T \right]^T$$

$$\beta_j^1(u^1, \cdots, u^{x_1+1}) = \begin{bmatrix} \beta_{j,1}^1(u^{x_j}, \cdots, u^{x_1+1}) \\ \vdots \\ \beta_{j,x_j}^1(u^1, \cdots, u^{x_1+1}) \end{bmatrix}$$

$$\beta_{j,i}^1 = \beta_{j,i+1}^{1+1} = \cdots = \beta_{j,x_j}^{x_j-i+1} = \bar{h}_j(\beta^{x_j-i+2}, u^{x_j-i+1}),$$

$$1 \le j \le m \ , \ 1 \le i \le x_j$$

참 고 문 헌

[1] B. Jakubczyk and W. Respondek "On Linearization of Control systems," *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Serie des Sciences Math.,* vol. 28, pp. 517-522, 1980.

[2] R. Su. "On the linear equivalents of nonlinear systems," *System & Control Letters,* vol. 21, no. 1, pp. 20-24, July 1982.

[3] L. R. Hunt, R. Su, and G. Meyer, "Design for multi-input nonlinear system," in *Differential Geometric Control Theory,* edited by R. W. Brockett, et al., Brikhuser, Boston. pp. 268-293, 1983.

[4] H. G. Lee, A. Arapostathis, and S. I. Marcus, "Linearization of discrete-time systems," *Int. J. Contr.*, vol. 45, no. 5, pp. 1803-1822, 1987.

[5] J. W. Grizzle, "Feedback linearization of discrete-time systems," *Lecture Notes in Control and Imformation* Science, vol. 83 Springer-Verlag New York Inc., p. 273, 1985.

[6] H. G. Lee and S. I. Marcus, "Approximate

and local linearizability of non-linear discrete-time systems," *Int. J. Contr.*, vol. 44, no. 4, pp. 1103-1124, 1986.

[7] B. Jakubczyk, "Feedback Linearization of discrete-time systems," *Systems & Control Letters,* vol. 9, pp. 411-416, 1987.

[8] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems,* 2nd ed., Springer-Verlag, 1989.

[9] H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems,* Springer-Verlag New York Inc., 1990.

[10] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds an Riemannian Geometry,* Academic Press, 1975.

[11] 김재현, "다 입력 이산 비선형 시스템의 선형화에 관한 연구", 중앙대학교 제어계측공학과 석사 학위논문, 1999

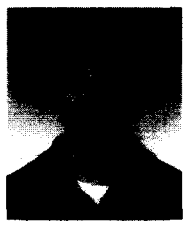
[12] L. R. Hunt, M. Luksic and R. Su, "Exact linearization of input-output systems," *Int. J. Contr.*, vol. 43, no. 1, pp. 247-255, 1986.

[13] D. Cheng, A. Isidori, W. Respondek, and T. J. Tarn, "Exact linearization of nonlinear systems with outputs," *Math. Syst. Theory,* vol. 21, pp. 63-83, 1988.

저 자 소 개

金 載 顯(正會員) 第 36卷 S編 第 9號 參照
현재 삼성전자 연구원

盧 東 輝(正會員)
1975年 10月 18日生. 1998年 2月 중앙대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1998年 3月~현재 중앙대학교 대학원 제어계측학과 석사과정. 주관심 분야는 비선형 제어 시스템 이론, 견실 제어, 뉴럴 네트웍 등임.



朴 純 亨(正會員)
1975年 8月 10日生. 1998年 2月 중앙대학교 제어계측공학과 졸업(공학사). 1998年 3月~현재 중앙대학교 대학원 제어계측학과 석사과정. 주관심 분야는 비선형 제어 시스템 이론, 지능 제어, 뉴럴 네트웍 등임.

金 容 敏(正會員) 第 32卷 第 10號 參照
현재 충청대학교 전자통신과 교수

李 鴻 奇(正會員) 第 31卷 第 6號 參照
현재 중앙대학교 전자전기공학부 교수