

평판형 주름판넬에 대한 등가 연속체 모델링기법

Equivalent Continuum Modeling Methods for Flat Corrugated Panels

이상윤¹, 이우식²

Sang-yoon Lee, U-sik Lee

Key words : Corrugated panel (주름판넬), Equivalent continuum plate model (등가 연속체평판 모델), Static analysis method (정하중 해석법), Plate-model based modal analysis method (평판-모델에 근거한 모드해석법)

Abstract

The corrugated panels are the prime candidate structure for the floor, roof and wall of Korean high speed train. The equivalent continuum modeling approach panels can be used for the efficient design and evaluation of their structural characteristics. The equivalent continuum models, derived from the true complex corrugated panels, should have the same structural behavior as the original structures have. This paper briefly reviews three representative continuum modeling methods: the static analysis method and two plate-models based on modal analysis methods (MAM). These methods are evaluated through some numerical examples by comparing the natural frequencies and static deflections. It is observed that the plate-model based on Rayleigh-Ritz method seems to provide the best results when used in conjunction with the cantilever-type boundary conditions. The equivalent elastic constants of various corrugated panels, depending on the changes in their configurations, are tabulated for efficient use in structural design.

1. 서론

차세대 한국형 고속전철은 차량의 경량화를 위해 기존의 강재를 사용한 차체구조 설계개념을 바꾸어 알루미늄 주름판넬구조를 사용하는 차체구조 설계개념을 채택하고 있다. 따라서, 기존의 TGV-K의 차체구조와는 다른 새로운 차체 설계도면이 작성되어야 한다. Fig. 1은 한국형 고속전철의 차체구조에 사용될 압출성형으로 제작되는 주름판넬이다. 주름판넬과 같은 샌드위치 구조는 구조적 특성상 구조해석이 복잡하고 많

은 설계변수를 결정해야하는 어려움이 따르게 된다. 이러한 구조에 대한 초기설계를 보다 능률적으로 수행하기 위하여 샌드위치 구조를 동일한 구조적 특성을 갖는 직교이방성 (orthotropic) 등가 연속체평판 (equivalent continuum plate) 구조로 모델링하기 위한 기법들이 그동안 문헌에 소개되어 왔다.

등가 연속체평판 모델링기법은 정하중 시험법에 근거를 두고 있는 모델링기법과 모드해석법에 근거를 두고 있는 모델링기법으로 크게 구분한다.

정하중 해석법에 의한 등가 연속체평판 모델링기법을 살펴보면 다음과 같다.

¹ 인하대학교 기계공학과 대학원

² 인하대학교 기계공학과 교수

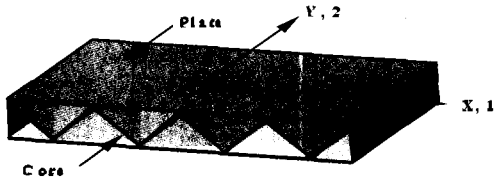


Fig. 1 Geometry of the corrugated panel considered for Korean High Speed Train

Bergstrasser [1]는 순수 굽힘모우멘트와 순수 비틀림모우멘트를 가하는 실험으로부터 판의 강성계수를 도출하는 방법을 처음으로 제시하였다. Tsai [2]는 직교이방성 평판에 대해 기존의 비틀림시험법에서 하중과 경계조건으로 인하여 발생했던 시편의 불안정성을 Fig. 1에 나타난 탄성 대칭축 (elastic symmetric axes) (1, 2)를 기준좌표계 (x, y)에 대해 45° 또는 -45° 회전시켜 시험하는 방법을 제안하여 개선하였다. Luo와 Shuling [3]은 Tsai의 정하중 해석법을 이용하여 골판지의 등가물성치 산출을 실험적으로 행하였고, Hoppmann등 [4]은 정하중 해석법에 의해 구한 등가물성치를 이용하여 보강평판의 고유진동수를 이론 및 실험으로 구하였다.

모드해석에 근거한 등가 연속체평판 모델링기법을 살펴보면 다음과 같다. 김천욱 등 [5]은 외팔보 형태의 보강평판에 대해 각각의 등가물성치가 가장 지배적인 모드형상과 그에 따르는 고유진동수를 선택한 후 Ritz방법으로 유도된 직교이방성 평판에 이를 대입하여 등가 연속체평판을 구하여 보강평판의 진동 및 처짐 해석에 이용하였고, 한병기 등 [6]은 주름판에 대해 유도된 이론강성식을 이용하여 등가 연속체평판을 유도하였고 이를 주름판의 처짐 및 고유진동수 측정에 사용하였다.

모드해석에 근거한 등가 연속체평판 모델링기법은 최근 복합재료의 구조적 등가물성치를 추출하는데 많이 응용되고있다. Deobald [7]는 모드해석법으로 다양한 경계조건인 알루미늄 평판 및 graphite/epoxy평판에 대해 임의의 4개 고유진동수를 구한 후 이를 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 유도된 직교이방성 등가평판에 대입하여

등가 연속체평판을 유도하였다.

본 논문에서는 정하중 해석법, 평판-모델에 근거한 모드해석법을 소개한 후 이를 바탕으로 향상된 등가 연속체평판 모델링기법을 개발하고 이 기법의 정확도를 수치예제를 통하여 비교하였으며 차체 바닥구조와 주름판넬구조 응용구조의 설계를 보다 간편하게 수행하는데 실무적으로 사용될 수 있는 주름판넬 구조변수의 변화에 따른 등가 구조물성치를 도표화하였다.

2. 주름판넬의 등가 연속체평판 모델링기법

Fig. 1과 같이 거시적으로 직교이방성 특성을 갖는 주름판넬의 변위는 다음과 같이 균일한 등가 연속체 직교이방성 평판식으로 표현할 수 있다 [8].

$$D_{11} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_{22} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = p(x, y) \quad (1)$$

여기서 W 는 평판의 처짐, h 는 평판의 두께, $p(x,y)$ 는 평판에 작용하는 하중, 그리고 D_{ij} 는 직교이방성 평판의 굽힘강성이다. 굽힘강성 D_{ij} 는 재료의 컴플라이언스 S_{ij} 와 포아송비 ν_{ij} 의 함수로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{h^3}{12S_{11}} \right) \\ D_{22} &= \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{h^3}{12S_{22}} \right) \\ D_{12} &= \frac{-\nu_{12}\nu_{21}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \left(\frac{h^3}{12S_{12}} \right) \\ D_{66} &= \frac{h^3}{12S_{66}} \end{aligned} \quad (2)$$

등가 연속체평판 모델링이란 원래의 주름판넬 구조의 구조적 및 구조동역학적 특성과 동일한 특성을 갖도록 식(1)로 표현된 등가 연속체평판 등가 구조강성 D_{ij} 를 결정하는 과정을 말한다.

여기에서는 등가 구조강성 D_{ij} 를 유도하는데

사용할 수 있는 세 가지 대표적인 방법을 소개하고 이들의 정확성을 상호비교 검토하고자 한다.

2.1 정하중 해석법

정하중 해석법으로 등가물성치를 구하기 위해 사용되는 4가지 종류의 주름판넬 시편에 대한 굽힘시험과 비틀림시험 [9]에 대한 자세한 설명은 다음과 같으며 그 결과는 Table 1에 요약하였다.

Table 1 Experiment methods for the measurement of equivalent material properties

시험종류	측정되는 등가물성치
굽힘시험	$E_{11} = \frac{3dPD^2}{4bh^3w_0}$
	$E_{22} = \frac{3dPD^2}{4bh^3w_0}$
비틀림시험 ($\alpha = 0^\circ$)	$G_{12} = \frac{4h^3w_0}{3Pa^2}$
비틀림시험 ($\alpha = 45^\circ$)	$\nu = -1 + E_{11} \frac{2h^3w_0}{3Pa^2}$
	$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \nu_{12}$

2.1.1 E_{11} 및 E_{22} 의 측정 - 굽힘시험

굽힘강성(E_{11} , E_{22})을 구하기 위해서 보의 길이 방향에 대한 재료의 컴플라이언스 S_{11} , S_{22} 를 구하는데, 이것은 Fig. 1과 같이 x , y 두 방향에 대해 각각 보 형태의 주름판넬 시편을 만들어서 Fig. 2와 같은 굽힘시험에 의해서 구한다. 각각의 경우에 대한 관계식은 보에 적용되는 이론을 이용하여 구하며 다음과 같다 [3].

$$S_{11} = \frac{4bh^3}{3dPD^2} w_0, \quad S_{22} = \frac{4bh^3}{3dPD^2} w_0 \quad (3)$$

여기서, $P/2$ 는 양쪽 끝에 가해지는 힘이고, D 는 지지점 사이의 거리, w_0 는 중앙의 처짐, d 는 지지점과 힘이 가해지고 있는 점 사이의 거리이고, b 는 평판 시편의 폭이다. 다음과 같은 컴플

라이언스 S_{11} , S_{22} 와 길이방향 탄성계수 E_{11} , E_{22} 와의 관계를 이용하여 E_{11} , E_{22} 를 구할 수 있다.

$$E_{11} = \frac{1}{S_{11}}, \quad E_{22} = \frac{1}{S_{22}} \quad (4)$$

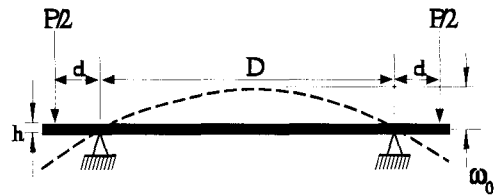


Fig. 2 Schematic diagram of bending test for the x- and y-directional specimens

2.1.2 G_{12} 의 측정 - 비틀림시험

비틀림강성의 측정은 Fig. 3에 나타난 것과 같이 세 점을 단순지지하고, 나머지 한쪽에 수직력을 가하여 실험한다. α 가 Fig. 3에 나타난 바와 같이 기준 좌표축 (x , y)와 주름판넬 코어의 방향을 나타내는 축 (1-2)가 이루는 사잇각일 때 G_{12} 를 구하기 위해 수직력-중앙에서의 처짐량 관계식에서 α 를 0° 로 설정하면 다음의 관계식이 유도되고 이를 이용하여 전단강성계수 G_{12} 를 구할 수 있다.

$$G_{12} = \frac{4h^3}{3Pa^2} w_0 \quad (5)$$

여기서 P 는 끝단에 가해진 힘이고 a 는 정사각형 평판의 한변의 길이이며 w_0 는 중앙에서의 처짐량이다.

2.1.3 포아송비의 측정 - 비틀림시험

포아송비를 구하기 위해서는 우선 컴플라이언스 S_{12} 를 구해야 하는데 이는 Fig. 3에서 α 를 45° 로 설정하면 다음과 같은 식이 유도된다.

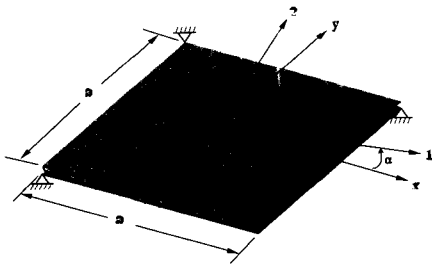


Fig. 3 Schematic diagram of torsional test

$$S_{12} = S_{11} - \frac{2h^3}{3Pa^2} w_0 \quad (6)$$

위에서 구한 S_{12} 와 굽힘시험에서 구한 S_{11} , S_{22} 를 다음의 관계식에 대입하여 포아송비를 구할 수 있다.

$$\nu_{12} = -\frac{S_{12}}{S_{11}}, \quad \nu_{21} = -\frac{S_{12}}{S_{22}} \quad (7)$$

2.2 평판-모델을 이용한 모드해석법

2.2.1 Rayleigh Method

이 방법은 해석적 또는 실험적으로 구한 주름판넬의 모드형상에 따른 고유진동수를 이론적인 평판의 고유진동수와 강성과의 관계식에 대입하여 주름판넬의 등가강성을 구하는 방법이다. 이 방법에서 사용하기 위해 사용된 등가 연속체 평판 모델은 다음과 같이 유도된다 [10]

직교이방성 평판이 갖는 최대 변형에너지와 운동에너지는 다음과 같이 주어진다.

$$V_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b [D_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2] dy dx \quad (8)$$

$$T_{\max} = \frac{\rho h \omega^2}{2} \int_0^a \int_0^b W^2 dy dx \quad (9)$$

$\theta(x)$, $\phi(y)$ 가 x 와 y -방향에 대한 보의 특성함수 [11]를 이용하여 평판의 처짐을 $W(x, y) = \theta(x)\phi(y)$ 와 같이 가정하고 Rayleigh법 [10]을

사용하면 평판의 고유진동수 f_{mn} (Hz)는 다음과 같이 유도된다.

$$f_{mn}^2 = \frac{\pi^2}{4\rho h} \left[\frac{G_m^4 D_{11}}{a^4} + \frac{G_n^4 D_{22}}{b^4} + \frac{2H_m H_n D_{12}}{a^2 b^2} + \frac{4J_m J_n}{a^2 b^2} D_{66} \right] \quad (10)$$

여기서,

$$G_m^4 = \frac{a^4}{q_{mn} \pi^4} \int_0^a \int_0^b (\theta_m'' \phi_n')^2 dy dx$$

$$G_n^4 = \frac{b^4}{q_{mn} \pi^4} \int_0^a \int_0^b (\theta_m \phi_n'')^2 dy dx$$

$$H_m H_n = \frac{a^2 b^2}{q_{mn} \pi^4} \int_0^a \int_0^b (\theta_m \theta_m'' \phi_n \phi_n'') dy dx$$

$$J_m J_n = \frac{a^2 b^2}{q_{mn} \pi^4} \int_0^a \int_0^b (\theta_m' \phi_n')^2 dy dx \quad (11)$$

$$q_{mn} = \int_0^a \int_0^b (\theta_m \phi_n)^2 dx dy$$

주름판넬의 등가강성치는 주름판넬의 임의로 선택한 모드의 형상에 따른 4개의 고유진동수 및 모드정보 (m, n)을 이방성평판의 모드형상에 따른 고유진동수와 강성과의 관계식(10)에 대입한 후 이 4개의 식들을 연립하여 풀면 등가물성치를 구할 수 있다. 정하중 해석법과는 달리 평판-모델에 근거한 모드해석법은 한 개의 시편으로 모든 등가물성치를 구할 수 있는 장점이 있으나 등가물성치가 서로 연성되어 있으므로 고유한 등가물성치를 구하기 위해서는 적절한 모드의 선택이 중요하다. 4개의 고유진동수 및 모드의 형상을 선택할 때는 주름판넬의 크기에 따른 등가물성치의 변화가 가장 적은 모드의 조합을 선택한다.

2.2.2 Rayleigh-Ritz method

이 방법에서는 진동응답을 보의 특성함수들의 중첩으로 다음과 같이 가정한다.

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \theta_m(x) \phi_n(y) \sin \omega t \quad (12)$$

식(8)과 식(9)에서 주어지는 평판의 운동에너지

와 변형에너지를 이용하면 Rayleigh's quotient R 를 구한 후 A_{mn} 에 대하여 편미분하여 그 결과를 고유치 문제의 형태로 변환하면 다음과 같다.

$$\sum_{m=1}^4 \sum_{n=1}^4 [C_{im, nk} - \lambda \delta_{im} \delta_{nk}] A_{mn} = 0 \quad (13)$$

여기서,

$$C_{ik, mn} = D_{11} Q_{1ik, mn} + D_{22} Q_{2ik, mn} + D_{12} Q_{3ik, mn} + D_{66} Q_{4ik, mn}$$

$$Q_{1ik, mn} = (\epsilon_m^x)^4 (b^2/a^2) \delta_{ik} \delta_{mn}$$

$$Q_{2ik, mn} = (\epsilon_m^y)^4 (a^2/b^2) \delta_{ik} \delta_{mn} \quad (14)$$

$$Q_{3, ik, mn} = F_{m2}^x F_{nk}^y + F_{im}^x F_{nk}^y \quad Q_{4, ik, mn} = 4 H_m^x H_{nk}^y$$

$$F_{mi}^x = a \int_0^a \theta_m \theta_i' dx, \quad F_{nk}^y = b \int_0^b \phi_n \phi_k' dy$$

$$H_m^x = a \int_0^a \theta_m' \theta_i' dx, \quad H_{nk}^y = b \int_0^b \phi_n' \phi_k' dy$$

$$\lambda = \omega_s^2 \rho h a^2 b^2$$

윗 식에서 δ_{ij} 는 Kronecker delta이다.

등가물성치를 구하는 방법은 임의의 등가물성치를 식(13)에 초기치로 대입하여 각각의 모드에 따르는 고유벡터 및 고유진동수를 구하고 이것을 FEM으로 구한 주름판넬의 고유진동수와 비교하는 반복과정을 통해서 수렴된 등가물성치를 구할 수 있다 [7].

3. 주름판넬의 등가물성치 산출 및 평가

3.1 등가물성치 산출

Fig. 4와 같은 형태의 고속전철 바닥부위 주름판넬의 등가물성치를 앞에서 소개한 세 가지 모델링기법으로 구했다. 등가물성치를 구하는데 있어서 실제의 시편으로 실험을 하는 방법과 유한요소해석을 사용하는 방법이 있는데, 본 연구에서는 후자의 방법으로 ANSYS를 사용한 해석 실험을 수행하였다. 정하중 해석법의 경우 모델링 시편의 전체적인 강성의 균일성을 유지하기 위해서 전체 높이와 길이 및 폭의 비가 10배

이상이 되도록 하며 코어의 개수가 적으면 해석 시 국부변형에 의해서 강성이 실제 보다 높게 평가될 수 있으므로 코어의 개수를 충분히 고려하여 구하였으며 이를 Table 2에 정리하였다. 평판이론에 근거한 모드해석법의 경우 주름판넬의 한변의 길이가 6.6 m인 경우에 수렴된 등가물성치를 구할 수 있었으며 다양한 경계조건에 대한 등가물성치를 산출하여 정리하였다.

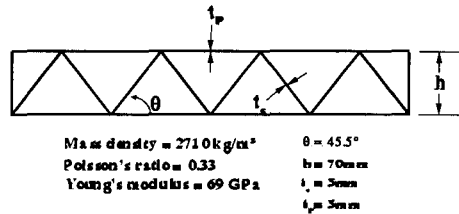


Fig. 4 Geometry and material properties of a corrugated panel

3.2 모델링기법의 상대평가

Table 2에 제시된 해석법 및 경계조건에 따른 등가물성치 결과를 이용하여 주름판넬을 등가 연속체평판으로 모델링하여 각각의 해석법 및 경계조건에 따른 등가 연속체평판의 정확도를 고유진동수를 기준으로 비교하여 Fig. 5-7 및 Table 3에 표시하였다. Rayleigh법의 경우 평균 2.3%의 오차를 보였는데, 변위에 대한 가정을 살펴보면 Rayleigh-Ritz법의 경우와는 달리 보다 많은 다른 모드간의 연성효과를 고려할 수 없는 단점이 있다. 정하중 해석법의 경우 평균 2.1%의 오차를 보였는데, 시편을 4개로 나눔으로써 각각의 등가물성치를 비연성화 하여 도출할 수 있는 비교적 간단한 방법임에도 불구하고 Rayleigh법에 비하여 비교적 오차가 적은 등가 연속체평판을 유도할 수 있었다. Rayleigh-Ritz법의 경우 평균 1%의 오차를 보였는데, 식(12)와 같이 x, y -방향으로 각각 6개의 보에 대한 진동모드를 고려하고 모드간의 영향까지 고려함으로써 상대적으로 우수한 등가평판을 유도할 수 있었다. Fig. 5-7의 결과에서 살펴볼 때 평판시편이 외팔보형(C-F-F-F)

Table 2 Equivalent plate modeling method and boundary conditions dependence of the material properties of the equivalent plate

등가물성치	정하중 해석법	평판-모델을 이용한 모드해석법					
		Rayleigh Method			Rayleigh-Ritz Method		
		F-F-F-F	C-F-F-F	C-F-C-F	F-F-F-F	C-F-F-F	C-F-C-F
E_{11} (GPa)	18.17	16.84	11.28	27.55	17.36	17.38	11.35
E_{22} (GPa)	22.06	21.91	14.41	23.56	22.30	22.13	16.16
G_{12} (GPa)	6.46	5.98	5.28	5.95	6.59	6.55	4.88
ν_{12}	0.32	0.14	0.56	0.16	0.18	0.28	0.50

Table 3 Equivalent plate modeling method and boundary conditions dependence of % errors in the natural frequencies of the equivalent plate

경 계 조 건	등가평판 모델링기법		
	정하중 해석법	평판-모델을 이용한 모드해석법	
		Rayleigh Method	Rayleigh-Ritz Method
F-F-F-F	1.83	2.45	1.26
C-F-F-F	1.76	1.10	0.54
C-F-C-F	2.70	3.19	1.15

Table 4 Structural parameters dependence of the material properties of equivalent plate model

등가물성치	Core Angle (θ)		30°	45.5°	60°	
	h (mm)		70			
	t_p (mm)	t_c (mm)				
E_{11} (GPa)	3.0	t_c	2.5	17.23	17.19	17.24
			3.0	17.35	17.32	17.42
			3.5	17.43	17.44	17.63
E_{22} (GPa)	3.0	t_c	2.5	20.34	21.23	22.98
			3.0	20.87	22.09	24.23
			3.5	21.67	22.95	25.46
G_{12} (GPa)	3.0	t_c	2.5	6.57	6.54	6.47
			3.0	6.58	6.55	6.49
			3.5	6.59	6.57	6.51
ν_{12}	3.0	t_c	2.5	0.30	0.29	0.28
			3.0	0.29	0.28	0.26
			3.5	0.28	0.27	0.25

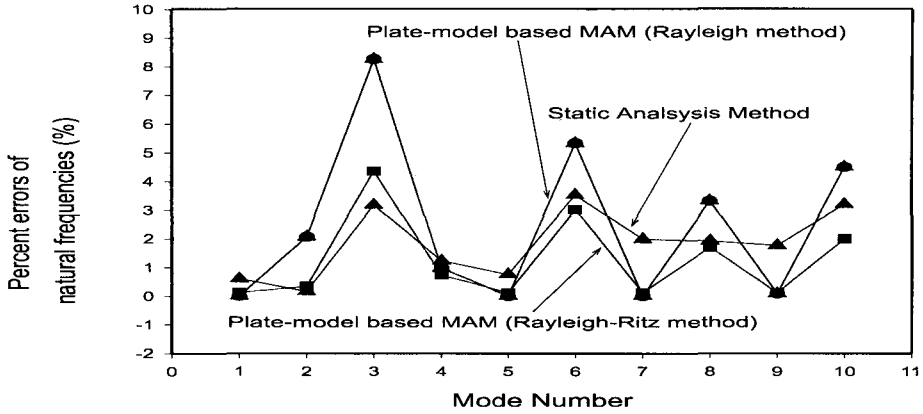


Fig. 5 Accuracy of equivalent plate modeling methods for the corrugated panel with F-F-F boundary conditions

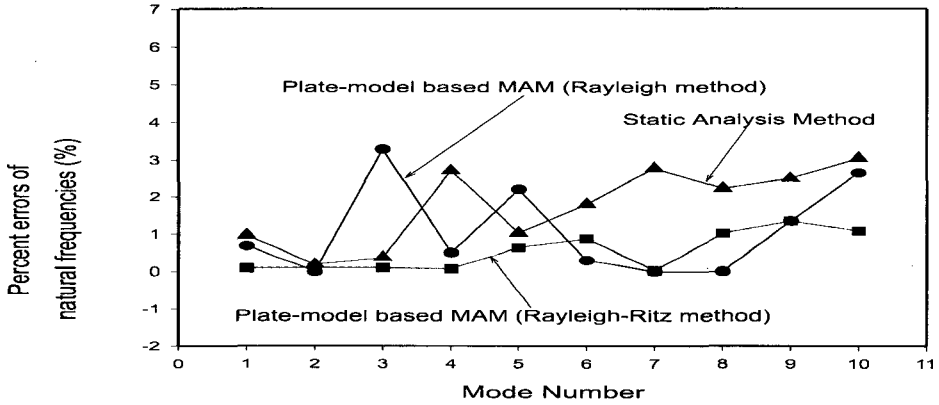


Fig. 6 Accuracy of equivalent plate modeling methods for the corrugated panel with C-F-F boundary conditions

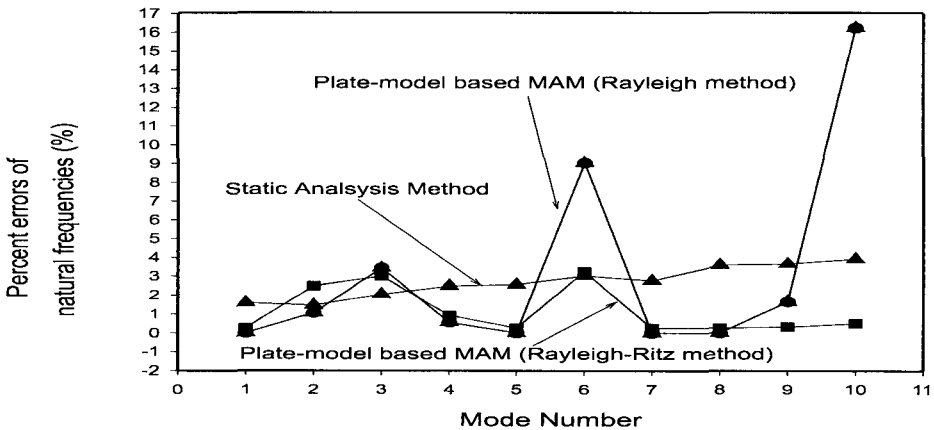


Fig. 7 Accuracy of equivalent plate modeling methods for the corrugated panel with C-F-C-F boundary conditions

경계조건을 갖을 때 가장 우수한 등가물성치가 도출됨을 알 수 있다. 이는 외팔보형 경계조건이 F-F-F-F 또는 C-F-C-F 경계조건에 비하여 상대적으로 구조적 대칭성이 적은 관계로 동일한 갯수의 모드 데이터를 사용할 경우 보다 우수한 결과를 주는 것으로 판단된다.

3.3 구조변수 변화에 따른 등가물성치의 변화

주름판넬의 다양한 구조변수를 파라미터로 한 등가물성치의 데이터 베이스를 Table 4에 구축하였다. E_{11} 의 경우 구조변수 파라미터에 대해 큰 변화를 보이지 않았으며, 코어의 각도가 증가함에 따라 E_{22} 는 비선형적으로 증가하는 양상을 보이며 G_{12} 와 ν_{12} 는 감소하는 경향을 나타낸다.

4. 결론

본 논문에서는 몇몇 대표적인 등가 연속체평판 모델링 기법을 소개하고 이들의 정확도를 고유진동수를 비교함으로써 상호 평가하였다.

Rayleigh-Ritz법에 근거한 모델링 기법이 경계조건에 상관없이 일반적으로 우수한 등가평판을 제공함을 고찰하였고 우수한 등가 연속체평판을 제공하기 위한 경계조건은 C-F-F-F인 것으로 파악되었다. 본 연구에서 검토된 Rayleigh-Ritz법을 한국형 고속전철의 주름판넬형 차체구조의 설계에 응용함으로써 보다 효율적이고 신뢰성 있는 설계를 수행할 수 있을 것으로 사료된다.

후 기

본 연구는 1998년도 과학기술처/건설교통부/통상산업부가 지원하는 “고속전철기술 개발사업”의 일환으로 수행된 위탁연구결과의 일부이다.

참고문헌

1. Bergstrasser, M., "Bestimmung der Beiden Elastischen Konstanten von Plattenförmigen Körpern," Zeitschrift für Technische Physik, Vol. 8, pp. 355-357, 1927.
2. Tsai, S. W., "Experimental Determination of the Elastic Behavior of Orthotropic Plates," Journal of Engineering for Industry, pp. 315-318, Aug., 1965.
3. Luo, S. and Suhling, J. C., "Bending and Twisting Tests for Measurement of the Stiffness of Corrugated Board," Mechanics of Cellulosic Materials, AMD-Vol. 209, pp. 91-109, 1995.
4. Hoppmann, W. H., Huffington, N. J. and Magness, L. S., "A Study of Orthogonally Stiffened Plates," Journal of Applied Mechanics, pp. 343-350, Sept., 1956.
5. 김천욱, 남준우, 원종진, 한승봉, "진동법에 의한 보강평판의 강성 측정 연구," 대한기계학회논문집, 제9권, 제2호, pp. 174-180, 1985.
6. 한병기, 정강, 유서열, "주름판의 강성해석 및 진동해석," 대한기계학회논문집, 제15권, 제1호, pp. 11-18, 1991.
7. Deobald, L. R. and Gibson, R. F., "Determination of Elastic Constants of Orthotropic Plates by A Modal Analysis/Rayleigh-Ritz Techniques," Journal of Sound and Vibration, Vol. 124, No. 2, pp. 269- 283, 1988.
8. Huber, M. T., "Die Grundlagen Einer Rationellen Berechnung der Kreuzweise Bewehrten Eisen-betonplatten," Zeitschrift des Osterr., Ingenieur und Architekten Vereines, No. 30, pp. 557-564, 1914.
9. 진동소음해석 및 저감기술개발, 고속전철기술개발사업 연구보고서, 인하대학교, pp. 177-205, 1998.
10. Dickinson, S. M., "The Buckling and Frequency of Flexural Vibration of Rectangular Isotropic and Orthotropic Plates Using Rayleigh's Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 61, No. 1, pp. 1-8, 1978.
11. Blevins, R. D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Van Nostrand Reinhold Co., New York, pp. 108-109, 1979.