韓國數學敎育學會誌 시리즈 C
<初等數學敎育>
2000. 3. 제 4권, 제 1호, 63-73.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. C:
Education of Primary School Mathematics
Mar. 2000, Vol. 4, No. 1, 63-73.

초등학교에서의 증명지도

조 완 영 (청주남성중학교)

Ⅰ. 서 론

수학적 추론과 증명은 문제해결과 더불어 학교수학의 핵심이다. 그러나 일반적으로 특히, 초등수학교육에서 문제해결은 강조되고 있지만 추론과 증명 지도는 소홀히 다루어지고 있다. 이러한 원인을 여러 가지로 논의할 수 있지만 무엇보다도 연역적이고 형식적인 증명을 강조하는 전통적인 증명관에서 찾을 수 있다. 전통적인 증명관에서 보면 증명은 너무 어려워 초등수학 수준에서 다룰 수 없다. 현재 학교수학에서는 중학교 2학년 「도형의 성질」 단원에서 처음으로 증명이 도입되고 있는 것도 이러한 증명관이 반영된 것이다.

연역적이고 형식적인 증명은 절대주의 수리철학의 영향이다. 수학적 진리의 절대적 확실성을 보증하는 수단으로서의 연역적이고 형식적인 증명을 선호하는 절대주의 수리철학은 수학을 준경험과학으로 보는 Lakatos(1976)로부터 비판을 받아 왔다. 최근, Lakatos의 증명관을 토대로 어떤 수학적 사실이 참인지를 확인하고 왜 참인지 그 이유를 설명하는 '정당화'라는 관점에서 증명이 재해석되고 있다. 예컨대, Tall(1995)은 '증명과 표상에 관한 인지발달'에 관한 연구에서 '증명'을 활동적(enactive) 증명, 시각적(visual) 증명, 기호적(symbolic) 증명, 형식적(formal) 증명으로 구분하면서, 학교수학에서의 '증명'지도가 학생들의 증명 수준을 토대로 이루어져야 한다고 주장하고 있다. 또한 Sowder와 Harel(1998), Balacheff(1987) 등은 학생들의 정당화 수준이 다양함을 주장하면서 특히 경험적 정당화와 연역적 정당화 사이의 상호작용을 강조하고 있다.

연역적이고 형식적인 증명이라는 증명의 개념에서 정당화라는 포괄적인 증명 개념으로의 변화는 초등수학에서 추론과 증명이 다루어질 수 있음을 시사하고 있다. NCTM의 Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft(1998)에서도 추론과 증명 규준을 K-12 전과정에서 강조하고 있는 것도 같은 맥락에서 해석할 수 있다. 본 연구에서는 정당화라는 보다 포괄적인 관점에서 '증명'을 해석하고, 이를 토대로 초등수학에서의 추론과 증명 지도의 필요성을 제기한다.

Ⅱ. 증명에서 정당화로

'학교수학에서 '증명'이란 무엇인가'라는 문제는 아주 복잡한 성격을 띠고 있다. 증명의 개념은 수학 또는 수학적 지식의 성격과 밀접한 관련이 있다. 절대주의 수리철학자들은 수학적 지식은 보편 타당한 지식이며, 이러한 수학적 지식의 타당성을 보장할 수 있는 방법은 연역적이고 엄밀한 증명뿐이라고 생각한다. 반면 Lakatos의 준-경험주의 수리철학에서는 수학적 지식의 절대성을 부정하고 수학적 지식은 논증과 반박을 통해 발전하는 인간이 만든 산물이라고 규정짓는다. Lakatos의 입장에서 보면 증명이란 수학적 지식의 발달 과정에서 수학적 지식을 발견하고 개선하는 수단 곧 사고실험일 뿐이다. 사회적 구성주의에서는 수학적 지식을 사회적인 합의 절차를 통해 구성된 결과로 보고 있으며 증명 또한 사회적인 합의 과정에서 자신의 확신, 타인의 설득을 얻는 데 필요한 수단으로 작용한다.

Lakatos의 준-경험주의 수리철학은 수학에서도 과학적인 방법을 이용할 수 있다는 생각을 갖게 해 주었으며, 사회적 구성주의의 관점은 사회적 합의가 이루어지면 여러 가지 유형의 정당화 방법이 가능할 것이라는 점을 시사해 주고 있다. 이러한 관점에서 증명은 수학적 명제가 잠정적으로 참임을 보장하는 수단이자, 수학적 명제의 의미와 이해를 위한 과정으로 이해될 수 있으며, 연역적이고 형식적인 증명 외의 다른 증명 방법이 가능할 수 있다는 의미를 내포하고 있다.

그러나, 이러한 증명관은 현재 수학계에서 인정하고 있는 일반적인 증명관과 다르다. 수학적 지식은 경험

과 관계없이 절대적으로 참이며 수학적 명제가 참이라는 것을 입증하는 유일한 수단은 연역적인 증명이어야 한다는 것이 일반적인 수학계의 합의 사항이다. Balacheff (1987)의 다음 주장은 이러한 딜레마를 잘 나타내고 있다.

> 화자에 의해 획득된 명제 또는 결과가 참임을 이해시키려고 시도하는 담론 유형이 설명이며, 설명이 이루어지는 그 시대, 그 사회에서 수용한 설명이 증명이다. … 수학계 내에서 어떤 특별한 형식을 취한 설명들만 증명으로 수용될 수 있으며, 이러한 설명들은 결정된 규칙에 따라 조직된 일련의 정리들을 이용하여 이루어진다. 정리는 이미 참임이 밝혀졌거나 일련의 잘 정의된 규칙들로부터 연역의 규칙을 이용해서 앞에서의 설명들에서 연역된 것들이다. 이러한 종류의 증명들을 수학적 증명이라고 한다.

Balacheff는 '설명이 이루어지는 그 시대, 그 사회에서 수용한 설명이 증명이다'라고 언급함으로써 증명 방법이 다양할 수 있음을 말하면서도 한편으로는 수학적 증명은 연역적이어야 한다고 주장한다. 이러한 주장은 수학은 과학이나 다른 학문과는 다른 증명방법이 있으며 그 형식은 연역적이어야 한다는 전통적인 증명관을 수용하면서 다양한 증명 방법의 존재가능성을 제기하는 다소 혼란스러운 주장이다. 그러나, Balacheff (1987)가 다른 논문에서 정당화에 대한 학생들의 이해수준을 소박한 경험주의, 결정적 실험, 포괄적인 예, 사고실험으로 구분하고 있는 것으로 볼 때, Balachef도 연역적 증명 외에 경험적인 정당화도 '증명'으로 보는 것으로 해석할 수 있다. 따라서, 학교수학에서의 증명은 수학교육계의 합의에 의해 정당화라는 포괄적인 개념으로 재정의할 수 있다.

그러나 실제로 학생들이 이해하고 있는 정당화는 학생들의 수준에 따라 다르며, 수학자들의 증명관과도 다르다. 이러한 관점에서 보면 일반적으로 수학계에서 합의되고 있는 증명에 대한 개념이 학교수학에서 재해석될 필요가 있다. 학교수학에서의 증명은 수학계에서 합의한 증명과 관련이 있고 학생들의 증명에 대한 이해 수준, 수학의 성격에 대한 재해석 등 다양한 측면을 반영하여야 할 것이다. 따라서 학교수학에서의 증명이 무엇인가를 규정하기 위해서는 앞 절에서 논의한 다양한 증명의 성격과 역할은 물론 경험과학과 수학에서의 증명 사이의 관계, 인지적인 측면에서의 학생들의 증명에 대한 이해 등 다양한 관점에서 '증명' 개념을 논의해 볼 필요가 있다.

먼저, 자연과학에서의 정당화에 대한 철학적 논의를 학교수학에서의 증명 특히 유클리드 기하에서의 증명 개념과 관련지어 고찰한다. 다음에는 심리학적인 측면에서 정당화 방법이 학생들의 지적 발달과 더불어 발달한다는 Tall(1995)의 주장을 분석한다. 이러한 논의는 학교수학에서의 증명이 전통적인 의미에서의 연역적이고 형식적인 증명 개념에서 정당화라는 포괄적인 개념으로 확장될 필요가 있음을 보여준다.

1. 학교수학에서의 증명과 경험과학

과학적 방법에 대한 과학자들의 관심은 과학적 탐구를 보다 효율적으로 수행하고자 하는 데 있으며 이런 점에서 실천적인 성격이 강하다. 반면 수학자들은 과학적 탐구 결과를 논리적, 수학적으로 설명하고자 하는 데 관심이 있다는 점에서 이론적이라 할 수 있다. 증명은 수학에서 수학적 진리가 참임을 보장해주는 수단이며, 전통적으로 수학에서의 진리는 절대 진리의 개념으로 인정되어 왔으며 과학에서의 진리개념과 다르다. 따라서, 수학에서의 확인(verification)의 성격과 과학에서의 확인의 성격은 질적으로 차이가 있다. 경험과학에서 진리의 입증방법은 주로 실험과 측정에 의해 이루어지지만 수학에서는 이러한 활동을 증명으로 보지 않는다. 이러한 관점에서 보면 수학에서의 증명과 경험과학과는 아무런 관련이 없는 것으로 생각할 수 있으며 전통적인 학교수학에서 증명을 보는 시각은 이러한 수학관과 관련이 있다. 그러나 이러한 관점으로 학교수학을 제시하는 것이 학생들이 수학을 이해하는 과정에서 어려움을 야기하는 원인이 되고 있고, 같은 맥락에서 실제 현상과 기하와의 관련성을 소홀히 하고 엄밀하고 형식적인 전개양식에 지나치게 치중해 온 증명방식 또한 증명지도를 어렵게 만드는 요인이 되고 있다면 학교수학과 실제 현상 또는 경험과학과의 관계를 보다 적극적으로 해석할 필요가 있다. 학교수학 특히 논증기하와 경험과학 또는 실제 현상과의 관계를 다음과 같이 생각해 볼 수 있다.

첫째, 수학 특히 기하의 발생은 실용적인 토대 위에서 이루어졌으며, 이러한 것은 수학에 경험적인 차원

이 존재함을 의미한다. 바빌로니아와 이집트의 초기 기하학은 실제 측량과 관계된 것이다. 이러한 경험적인 초기의 기하학이 그리스 시대의 탈레스 이후 논증 기하로 발전하였다. 바빌로니아와 이집트의 경험적인 수학은 '어떻게'에 초점을 맞추었지만 그리스 시대의 수학은 당시의 합리적인 사회적 분위기와 더불어 '어떻게' 뿐만 아니라 '왜'라는 의문을 가지면서 수학 특히 기하에서의 논증방법과 연역적 특징이 두드러지게 되었다(Eves, 1953, 이우영과 신항균(역), 1995). 유클리드 기하는 그리스 시대의 이러한 수학을 집대성한 것으로 현재의 학교수학에 깊은 영향을 끼치고 있다. 공리와 공준으로부터 정리를 만들어가는 유클리드 기하의 공리적 성격은 현대수학의 학문적인 전형으로 인정을 받고 있다. 유클리드 기하에서는 순수하게 형식적인 접근 방법을 이용하였으며, 정리를 어떻게 해석하고 적용할 수 있는가보다는 공리체계가 논리적으로 일관성이 있는지 정리가 그 논리 체계로부터 어떻게 도출될 수 있는지에 초점을 두어왔다. 따라서 유클리드 기하는 엄밀성을 토대로 논리적이고 연역적인 진리 입증방법만을 증명으로 받아들였다. 결국 수학이 생태적으로 갖고 있던 경험 과학적 측면은 유클리드 기하의 연역적 전개방식으로 무시되어 왔으며, 실제와 격리되어 이론적이고 논리적인 담론을 중심으로 하는 수학만이 강조되어 왔다. 그러나, 수학 특히 기하가 실제 생활에서의 필요성에서 비롯된 것이라는 점에서 보면 수학에서도 특히 학교수학에서는 관찰과 실험 등 경험적 자료가 중요한 역할을 할 수 있을 것이다.

둘째, 실제현상과 수학과의 관련성이 학교수학에서 중요한 역할을 하며, 실제로 기하학적 정리의 의미를 설명할 때, 실제 현상 또는 경험과학과 관련지어 수학을 설명하는 경우가 흔히 있다. 중학교 논증기하에서 다루는 기하의 경우는 경험적인 성격이 더욱 강하다(Hanna & Jahnke, 1996). 중학교 논증기하를 지도할 때, 학생들이 그리는 도형은 기하의 정리에서 다루는 도형과 다르다. 실제로 그린 도형들과 달리 정리의 내용에 나오는 도형들은 이상적인 것들이다. 학생들이 그린 도형들은 실제로 정확한 것이 아니지만 기하의 정리를 증명하고 이해하는 과정에서 많은 역할을 한다. 증명하고자 하는 정리가 참인지 그리고 왜 참인지를 볼(see) 수 있게 해 준다(Carnap, 1966, 윤용택(역), 1993). '두 직선은 하나 이상의 공유점을 가질 수 없다'라는 명제가 참인지를 확인할 때, 그 상황을 마음속으로 그려서 확인을 한다. 이러한 것은 학교수학의 논증기하에서 기하의 정리가 참인지 그리고 왜 참인지를 설명할 때, 기하의 공리 체계에만 의존하는 것이 아니라 정리를 실제에 적용시켜 보는 활동도 이루어지고 있음을 의미한다. 따라서 학교수학에서 다루는 기하는 경험적인 차원을 토대로 이루어지고 있음을 부인하기 어렵다. 학교수학의 논증기하에서 경험과학적 방법을 의도적으로 회피할 필요는 없을 것으로 보인다. 궁극적인 목표가 연역적인 증명에 있다고 하더라도 학생들의 자연스러운 사고 방법인 경험적인 확인도 중요한 정당화 방법으로 받아들여 이를 토대로 하는 논증기하교육이 필요할 것으로 보인다. 가우스가 세 개의 산꼭대기를 꼭지점으로 하는 삼각형의 내각의 합이 180도인지를 측정을 이용하여 확인하려 했다는 일화는 수학에서도 경험적 탐구와 확인이 필요함을 뒷받침하고 있다.

학교수학의 논증기하에서 경험과학에서의 탐구방법을 도입하는 것이 현재의 증명지도의 문제점을 해결할 수 있는 하나의 대안이 될 것이다. 기하에 경험과학적인 탐구방법의 도입 필요성은 이미 많은 학자들에 의해 제기되어 왔다. 형식주의적인 엄밀한 유클리드 기하 교육 일변도에서 벗어나 수학 본래의 유용성을 추구하는 교육을 주장한 Perry(1902)는 실험과 구체적인 예를 통한 발견을 강조하였다. Dieudonné(OECD, 1961, pp. 31-49)는 한 세미나에서 "유클리드는 사라져야 한다!"는 슬로건 아래 유클리드기하 대신에 벡터공간을 다루는 선형대수적 접근을 제안하였다. 그러나, 그 세미나에서 유클리드기하는 연역적 사고 방법을 훈련시키는 주요한 분야이고 그 바탕이 되는 삼각형은 인간의 지적인 발달의 근원으로 실용적인 학문과 생활에서 매우 중요하며 직관적이고 경험적인 절차를 통한 초기의 기하교육에서 매우 중요하다는 결론을 채택하였다(우정호, 1998, pp. 318-319에서 재인용). 이러한 결과는 유클리드 기하는 중요하며 여전히 학교수학의 주요 주제가 되어야 하지만 방법상에서 연역적이고 형식적인 전개양식보다 실험과 구체적인 예를 통한 발견의 과정을 강조해야 한다는 메시지를 담고 있다.

그러나, 이러한 주장들은 발견의 과정에서 과학적 탐구방법을 도입하자는 것이지 실험과 실측 등 과학적 방법을 정당화의 수단으로 인정하자는 주장은 아니다. 수학에서의 증명과 실험과 실측에 의한 경험과학에서

의 정당화 방법은 다르다는 것이 현재 수학계의 합의라면 그러한 주장을 할 수도 없다. 그러나, 학교수학에서의 논증 기하에서는 상황이 다소 다르다. 예를 들어, 삼각형의 세 각의 합이 180°라는 것은 측정에 의해 또는 비형식적인 활동에 의해 발견되고 정당화될 수 있다. 그러나 이러한 결과가 모든 삼각형의 경우에도 참이라는 것을 보장받기 위해서는 증명이 필요하다는 것이 플라톤이나 유클리드, 절대주의 수학철학의 관점이자 현재 수학계가 일반적으로 합의하고 있는 주장이다. 이러한 관점에서 보면, 실험과 측정 등 과학적 방법을 정당화의 기초로 받아들이는 것은 형식적인 증명의 필요성을 인식하는 데 장애가 된다. 탐구형 기하 소프트웨어를 이용한 증명활동을 회의적으로 보는 주장도 이러한 맥락에서 해석할 수 있다. 그러나, 과학에서는 이론적인 방법으로 증명해야 자연의 법칙이 성립한다고 생각하지 않는다. 모든 그러한 법칙은 실험과 측정만으로도 입증할 수 있다고 생각한다. 실험과 측정 결과를 토대로 삼각형의 세 각의 합이 180°가 된다는 확신을 할 수 있다. 그러나 이러한 정당화의 문제는 과학철학 내에서도 많은 논란이 있다. 즉, 가설로부터의 예측과 경험적 자료 사이의 일치 여부, 다시 말해서 경험적 자료를 이용하여 이론을 정당화하는 문제가 경험과학의 중요한 이슈가 되어 왔다(조인래, 1999).

과학 철학에서의 계속되는 논쟁은 학교수학에서 경험적 활동을 정당화로 포섭할 것이냐의 문제가 간단한 문제가 아님을 보여준다. 또한 수학적인 명제의 타당성을 절대적으로 보증하려는 전통적인 증명방식과 시각적이고 경험적으로 확인하려는 학생들의 실제적인 사고방법이 기본적으로 상충되고 있다는 것(우정호, 1998)은 하나의 딜레마이다. 수학 교사들은 증명이 필요하다고 생각하지만 학생들은 다양한 예에 대한 측정을 통해 확인을 했기 때문에 연역적 증명이 필요하다고 생각하지 않는다. 이러한 딜레마를 해결하기 위한 한가지 방법은 연역적 증명만이 수학적 명제가 참이라는 것을 보장한다는 전통적인 증명관에서 벗어나는 일이다.

Hanna와 Jahnke(1996)는 수학화된 경험적 이론과 증명의 역할 사이의 역동적 관계로 이러한 딜레마를 해결하고자 하였다. 역동적 관계란 수학화된 경험적 이론은 발달 단계가 있으며 인식론적, 심리적, 교육적인 측면에서 단계별로 다양한 증명의 의미가 존재한다는 것으로 설명될 수 있다.

> 이론이 구성되기 시작할 때, 증명은 도출된 결과의 진리를 확립하기보다는 그 결과가 도출되는 가정의 신뢰성, 개연성 그리고 효과를 검증하는 역할이 강하다. 그 이론이 이미 수용된 지식의 일부로 통합될 때(또는 학생들이 그 이론을 편안하게 느낄 때), 증명의 의미는 변화되어 증명은 가정에서 정리로 진리(또는 확실성)를 전달하는 역할을 한다. 이러한 역동적인 관점은 순수하게 수학 내적인 상황에서도 마찬가지로 적용되며 일반적으로 증명에 대한 이해를 심오하게 한다. (Hanna & Jahnke, 1996)

여기서 언급한 역동적인 관점은 학생들에게 증명을 가르칠 때 교사들이 경험하는 여러 가지 현상을 설명하는 데 유용하다. 학생들은 어떤 사실이 왜 증명되어야 하는지를 이해하지 못한다. 왜냐하면, 그들의 관점에서 보면 실제 측정만으로도 그 사실은 분명하고 충분히 정당화된 것이기 때문이다. 학생들에게 증명을 보여 준 다음에도 학생들은 정리의 일반적인 타당성을 확신하지 못하고 어떤 예를 가지고 정리가 참인지를 검사한다(Fischbein, 1982). 경험으로 미루어 볼 때, 학생들은 기하적 논증으로는 충분하지 않다고 생각하면서도, 기호적 추론을 증명으로 받아들이기도 한다. 이 모든 현상은 증명이 상황마다 다른 의미를 갖고 있다는 사실을 반영하는 것이고, 학생들이 연역적 논증과 경험과학 사이의 관계를 깨닫지 못하고 있음을 나타낸다. 이러한 현상이 학생들이 증명의 필요성과 의미를 이해하지 못하는 이유가 될 수 있으며, 교사들과 달리 학생들은 증명에 대해 다양한 의미를 갖고 있음을 알 수 있다(Hanna & Jahnke, 1996).

Hanna와 Jahnke(1996)의 주장은 학교수학의 논증기하에서 연역적이고 형식적인 증명만을 강조할 것이 아니라 증명이 갖고 있는 이러한 다양한 의미를 반영할 필요가 있음을 시사하고 있다. 이는 경험적 확인과 연역적이고 형식적인 증명 어느 한 쪽만을 강조하는 것은 문제가 있으며 이 두 가지를 상호 보완적인 측면에서 고려할 필요가 있음을 의미한다. 증명의 경험적 의미와 연역적이고 형식적인 증명이 상호 작용하는 가운데 효과적인 증명 수업이 이루어질 수 있을 것으로 보인다. Freudenthal(1973)이 학습자에게 익숙한 사실로부터 시작하여 그것을 국소적으로 조직화하는 활동이

재발명 과정에서 가장 중요한 활동이라고 제안하고 있듯이, 증명교육에서도 학생들이 갖고 있는 다양한 정당화 유형에서 출발하여 점차 연역적이고 형식적인 정당화로 발전시켜 가는 것이 온당한 증명지도 방법이라 할 수 있다.

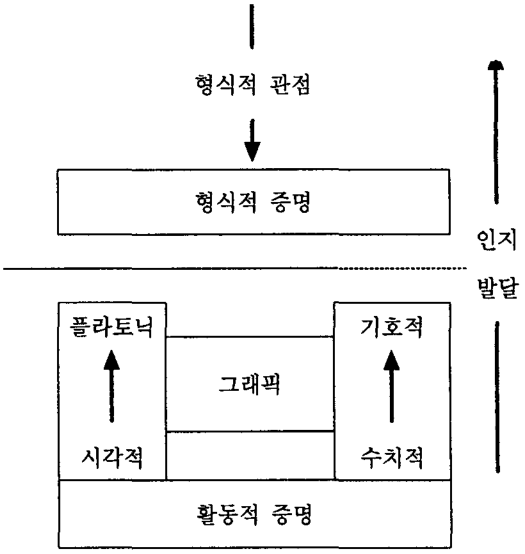
수학에서의 증명이 실험과 실측에 의한 정당화 방법과는 그 성격이 다르다는 것이 현재 수학계의 공통된 시각이기 때문에, 발견의 맥락에서 이루어지는 실험과 실측 등 과학적인 탐구 방법을 도입하자는 주장을 과학적인 정당화 수단 즉, 경험적 정당화를 증명으로 인정하자는 뜻으로 해석하기는 어렵다. 그러나, 인식론적으로 수학은 절대적으로 참이며 수학적 진리의 타당성을 보증해 주는 수단이 바로 연역적인 증명이라는 입장에서 벗어나 수학적 사고 활동은 인간의 경험에 바탕을 둔 역사적 활동이며 수학은 절대적으로 확실한 것이 아니라 오류가 가능한 준-경험과학이라는 입장과 증명학생들이 증명에 대한 이해 수준이 다양하며 학생들의 증명 수준이 발달한다는 심리학적 측면, 수학이 실제 또는 경험 과학과 관련이 있으며 실제 학교수학에서 학생들의 경험적인 측면을 중시할 필요가 있다는 다양한 교수학적 주장을 고려할 때, 학교수학에서는 엄밀함을 바탕으로 하는 연역적이고 논리적인 증명은 물론 경험적 활동 과정에서 나타날 수 있는 여러 가지 정당화 유형들을 타당한 정당화 유형으로 받아들일 필요가 있을 것으로 보인다.

이러한 의미에서 증명을 정당화라는 포괄적인 의미에서 해석하고 학교수학에서 학생들이 갖고 있는 증명에 대한 다양한 이해를 토대로 논증기하의 지도가 이루어질 필요가 있다. 본 연구의 초점은 이러한 과정에서 탐구형 기하 소프트웨어가 학생들의 증명활동에서 어떤 역할을 할 수 있는가를 사례연구를 통해 조사하는 데 있다. 다음절에서는 학생들이 증명에 대한 이해 수준이 발달한다는 Tall(1995)의 증명 발달 수준을 van Hiele의 이론과 관련지어 증명의 다양한 측면을 심리학적인 차원에서 고찰하고, 이어서 학생들이 갖고 있는 다양한 증명에 대한 이해 수준을 주장한 연구들을 교수학적인 측면에서 검토한다. 이러한 논의는 연역적이고 형식적 증명 중심의 전통적인 증명 지도가 단순히 방법적인 차원의 문제가 아니라 근본적으로 학교수학에서 증명을 어떻게 규정지을 것인가와 관련이 있다.

2. 학생들의 증명 발달 수준

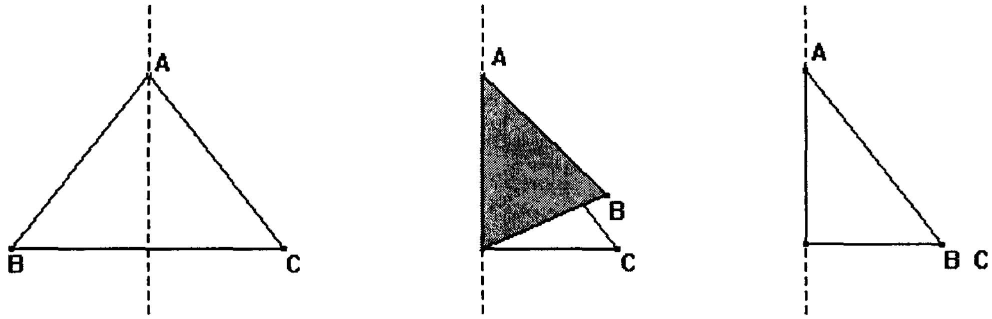
(1) Tall의 증명에 관한 인지 발달 이론

Tall(1995)은 Bruner(1966)가 구분한 사고 발달 수준 즉, 활동적(enactive)수준, 영상적(imaginary) 수준, 기호적(symbolic) 수준을 토대로 증명과 표상에 관한 인지 발달 단계를 설명하고 있다. 활동과 몸짓을 통한 환경과의 상호작용과 의사소통에 근거를 둔 활동적 증명, 시각적 표현과 기호적 표현이 서로 상호작용하는 수준에서의 증명, 형식적 정의와 공리체계를 토대로 이루어지는 전통적인 의미에서의 형식적 증명 등 일련의 발달단계를 기술하고 있다. Tall은 증명과 표상에 관한 인지발달 단계를 <그림 1>과 같이 도식화하고 있다. 가장 초보적인 증명으로는 물리적 환경과의 상호작용을 통해 이루어지는 활동적 증명이 자리하고 있고, 다음 단계에는 언어적 설명과 논의를 통해 의미가 보다 정교해지는 시각적인 증명이 존재한다.



<그림 1> 증명과 표상에 관한 인지발달

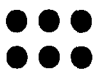
가장 초보적인 활동적 증명수준에서 학생들은 구체적인 활동을 통해 어떤 명제가 참이라는 것을 확인하고 왜 참인지를 설명한다. 활동적 증명이 활동에 초점을 두고 있지만, 여기에는 시각적, 언어적인 요소들도



<그림 2> 활동적 증명의 예1)

포함되어 있다. 예를 들어, '삼각형의 세 내각의 합이 180°다'라는 명제에서 삼각형의 두 내각을 찢어서 다른 한 각에 나란히 붙여 일직선이 됨을 확인하고 삼각형의 내각의 합은 평각 즉, 180°가 된다라고 설명할 때, 학생들의 직접적인 활동이 초점이기 때문에 활동적 증명 수준으로 구분할 수 있다. 학생들은 자신의 활동을 시각적으로 확인하고 그 결과를 언어를 이용하여 설명함으로써 증명활동을 마무리하게 된다. 이등변삼각형의 두 밑각이 같다는 명제를 <그림 2>처럼 입증해 보이는 것도 활동적 증명으로 볼 수 있다. 종이로 만든 전형적인 삼각형을 잘라 내어 대칭축을 따라 접고 두 개의 삼각형이 포개지기 때문에 두 각 B와 C가 같다라고 설명할 수 있다. 여기서 이용된 예는 모든 삼각형을 대표하는 전형적인 예로 생각될 수 있지만 특별한 예에 불과하며, 따라서 일반성을 설명하는 데는 한계가 있다. Semadeni(1984)도 초등학교 수준에서 이루어질 수 있는 '활동적 증명'을 제안한 바 있다. Semadeni의 활동적 증명은 포괄적인 예를 선택하여 구체적이고 신체적인 활동(대상을 조작하는 것, 그림을 그리는 것, 몸을 움직이는 것 등)을 통해 주어진 명제의 타당성을 조사하는 것으로 Tall의 활동적 증명과 그 의미가 크게 다르지 않다.

시각적 증명은 활동적인 요소는 물론, 언어적 요소를 수반한다. <그림 3>에서처럼 그림을 이용하여 2×3과 3×2가 같다는 곱셈의 교환법칙을 설명하는 경우에 활동적인 요소가 들어 있기는 하지만 본질은 배열을 어떻게 보느냐에 있기 때문에 시각적 증명으로 분류할 수 있다. 이 그림도 4×5, 27×13 등 같은 류, 일반적으로 m×n=n×m을 대표하는 포괄적인 예로 볼 수 있다.



<그림 3> 2×3=3×2의 시각적 증명1)

이와 같은 시각적 증명을 특히 그래픽 증명(시각적 증명과 기호적 증명의 연결)이라 하며, 여기에도 부분들을 역동적으로 재배열하는 활동적인 요소를 담고 있다

항등식 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$의 좌변을 전개한 결과가 우변이 된다고 정당화하는 것을 연산 조작적(manipulative) 증명이라고 한다. 산술활동에서는 예컨대, 끝자리가 짝수가 아니기 때문에 24532와 34513을 곱한 결과가 846672915는 아니라는 사실을 확인하는 경우외에는 일반적으로 증명을 고려하지 않았다. 그렇지만, 특수한 명제를 모든 경우의 전형적인 것으로 간주해서 하는 포괄적인 증명은 가능하다. 예를 들면, 제곱해서 2가 되는 유리수가 존재하지 않는다는 사실을 유리수의 분모와 분자를 소인수분해할 수 있다는 사실에 주목해서 다음과 같이 설명할 수도 있다.

$\dfrac{9}{40}=\dfrac{3^2}{2^3\times 5}$ 이고 양변을 제곱하면

$[\dfrac{9}{40}]^2=\dfrac{3^2}{2^3\times 5}\times\dfrac{3^2}{2^3\times 5}=\dfrac{3^4}{2^6\times 5^2}$ 이 된다. 이때,

어떤 유리수를 제곱한 수의 분모와 분자를 소인수분해할 때 나타나는 소인수의 개수는 짝수개가 된다. 그러므로 어떤 유리수의 제곱도 2가 될 수 없다. 왜냐하면

1) 바둑돌 등을 가지고 학생들이 이리 저리 배열하면서 정당화할 경우는 활동적 증명으로 구분된다.

$2=\frac{2}{1}$이 되어 분자에 있는 2의 개수가 홀수이기 때문이다.

Tall(1979)은 대학 1학년 학생들을 대상으로 한 증명방법 선호도 조사에서 학생들이 모순에 의한 증명방법보다 포괄적인 증명을 더 선호하였다고 보고한 바 있다. 인지적인 어려움이 있다고 하더라도 모순에 의한 증명은 형식적 수학에서 중요한 증명방법이다. 대수에서는 산술에 대한 아이디어를 기호로 표현하며, 따라서 증명 방법도 포괄적 증명 방법 이상의 방법이 요구된다. 예를 들면, '연속하는 두 홀수의 합은 4의 배수다'라는 명제는 대수적으로,

$(2n+1)+(2n+3)=4n+4=4(n+1)$로 표현할 수 있고 따라서 연속하는 두 홀수의 합은 4의 배수라고 결론을 내릴 수 있다. 그러한 증명은 적절한 대수적 표현과 대수적 연산(이 경우에 두 식의 합)을 이용하여 실행될 수 있다. 우리 나라의 경우 이러한 '증명' 방법이 가장 일반적인 방법으로 학생들은 이러한 '증명'활동을 경험할 기회가 많다. 그렇지만 이러한 증명은 논리적 연역이라기보다는 대수에서의 의미 있는 연산 기능에 관한 것으로 마찬가지로 증명으로 볼 것이냐의 문제가 발생한다.

이러한 관점에서 보면 유클리드 기하에 나오는 증명들은 포괄적이고 시각적인 증명을 수학적 기호나 언어로 표현한 것으로 볼 수 있다. 증명해야 할 명제를 그림으로 그리고(시각적 표현) 이 그림을 탐구한 후 수학적인 언어를 이용하여 표현함으로써 일반성이 확보된 명제 즉, 정리가 된다. 유클리드 기하에서의 정리는 도형의 성질에 관한 것이며, 정리를 따르도록 그려진 도형은 명제를 만족하는 임의의 도형을 나타내는 포괄적인 도형이다. 언어적 증명은 그려진 그 그림에만 적용되는 것이 아니라 일반적으로 그 정리가 나타내는 모든 도형에 적용된다.

' $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이면 $\angle B=\angle C$ '

라는 명제의 증명은 그 $\triangle ABC$(아주 표준인 삼각형)에만 적용되는 것이 아니라 그 외의 다른 모든 삼각형에도 적용이 되는 것이다. 이런 면에서 유클리드 증명은 주어진 성질을 갖는 기하적 도형 전체에 적용하는 언어적이고 포괄적인 증명이라 할 수 있다. 현재 학교 수학에서의 증명 지도의 난점은 학생들의 증명 개념의 발달 수준을 고려하지 않고 연역적이고 형식적인 증명만을 강조하는 데 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해서는 형식적인 수준에서의 증명활동이 이루어지기 이전에 다양한 경험적인 활동들이 이루어지고 그러한 정당화 방법의 한계를 자연스럽게 인식함으로써 다른 수준의 증명방법을 모색할 수 있는 기회가 제공되어야 할 것이다. Blum과 Kirsh가 '전형식적인 증명'을 교두보로 삼아 형식적 증명에 이르게 하자고 주장한 것도 이러한 맥락에서 해석할 수 있다(서동엽, 1999에서 재인용).

개념의 의미가 변함에 따라, 즉 활동적 개념에서 시각적 또는 기호적 더 나아가 형식적으로 발달하는 과정에서 이용하는 증명들은 각 수준에 따라 다양하다. 그러나 어떤 발달 단계에서 만족스럽던 증명이 다른 발달 단계에서는 만족스럽지 못할 수 있다. 또한 형식적 수준 이전의 증명에서 형식적 수준으로 변화하는 과정은 여전히 쉽지 않다. Tall(1995)은 그 이유를 다음 세 가지로 제시하고 있다. 첫째, 정의와 개념의 역전현상이 일어난다. 개념을 정의하는 과정에서 어떤 개념이 갖고 있는 여러 가지 두드러진 특징들의 의미가 약화된다. 의미가 확실하지 않은 정의를 이용해서 논리-연역적인 방법으로 그 개념을 해석해야 한다. 둘째, 활동적 증명 또는 기호적 증명이 형식적 증명의 구조와 연결되지 않는 경우에 인지적인 어려움이 발생한다. 이 때, 어떤 정리가 참이라는 것은 알지만 그것을 증명하는 방법은 모른다. 시각적으로 '분명한' 성질이 간단히 증명되지 않는 것이다. 셋째, 형식적 수학에서의 정의와 연역에서 나타나는 한정기호(모든, 어떤) 가 복잡한 의미(해석학에서 극한과 연속에 관련된 것과 같은)를 갖고 있는 것도 증명을 어렵게 만드는 요인이 된다.

Tall의 연구는 학교수학에서의 증명지도가 학생들의 인지발달 수준에 따라 다양하게 이루어져야 함을 함축하고 있다. 이러한 관점은 기하 시간에 교사들이 학생들의 기하학적 사고 수준보다 높게 가르치는 것이 기하교육 실패의 원인이 될 수 있다는 van Hiele의 주장과 다르지 않다. 그러나, van Hiele이 연역적 수준(3수준)에서나 가능한 형식적 증명만을 증명으로 언급하고 있는 것과는 달리, Tall은 형식적 증명을 최종 목표로 두고 있지만 각 수준에 따라 다양한 증명 방법이 있음을 인정하고 있다. 수리철학적 관점에서 Tall이 제시한 증명의 유형들을 증명으로 볼 것이냐는 논란의 여지가

있다. 그러나, 심리적, 교수학적인 차원에서는 의미가 있다. Tall이 제시한 다양한 수준의 증명을 현재 합의하고 있는 증명개념에서는 증명으로 보기 어렵다. 그러나 학생들이 나름대로의 개념체계나 지식체계를 소유하고 그것에 상응하는 수준에서 세계를 인식하며, 그렇게 자신들에게 인식된 것을 진리로 본다(엄태동, 1998)는 관점에서 보면, 개선의 여지가 있지만 학생들의 입장에서는 타당한 정당화 방법으로 인식될 수 있을 것이다. 실제로 학생들의 증명이해 능력이 증명에 관한 인지 발달 즉, 인지적 구조와 표상에 달려있다는 점에서 볼 때, 학생들이 이해할 수 없는 방법으로 증명을 제시하는 것은 문제가 있으며, 학생들의 사고 발달 수준을 고려한 다양한 증명 방법을 고려할 필요가 있다.

Ⅲ. 초등수학에서의 증명지도

Ⅱ장에서는 '증명'개념에 대한 재해석을 토대로 초등수학에서도 증명이 가르쳐질 수 있음을 주장해 왔다. 본 장에서는 NCTM의 Principles and Standards for School Mathematics: Discussion Draft(1998)에 나타나는 초등수학에서의 증명지도 사례를 분석하고 현행 6차 교육과정 초등학교 6학년2학기 교과서 내용을 토대로 증명지도 가능성을 논의한다.

1. 초등수학에서의 추론과 증명

1989년에 발표된 Standards에서는 K-12 전 학년 수준에서 수학을 이해하는 과정으로서 추론과 증명을 도입할 것을 강조하고 있다. 모든 학생들은 추론과 증명이 수학의 핵심임을 이해하고, 수학적 추측을 하고 그 타당성을 조사해야 하며, 수학적 논증과 증명을 개발하고 평가할 수 있어야 하며, 적절한 추론 유형과 증명 방법을 선택·이용할 수 있어야 한다는 것이다(NCTM, 1998).

엄밀성의 정도는 다르지만 모든 학년 모든 수준에서 추론과 증명이 지도될 필요가 있다. 예컨대, 초등학교 1학년 수준에서 홀수와 짝수가 교대로 나타난다는 것을 주목할 수 있을 것이며, 3학년 학생들은 '짝수와 짝수의 합은 짝수이다'라는 것을 추측하고 이를 정당화할 수 있을 것이다. 이 때 이용되는 정당화 방법이 대수식을 이용한 형식적인 증명일 필요는 없다.

어떤 수학적인 사실이 왜 참이냐에 대한 탐구를 통해 학생들은 수학을 역동적인 것으로 이해하고, 능동적으로 참여하게 될 것이다. 다음 문제를 보자.

> 자신의 나이를 쓰고, 5를 더하여라.
> 위의 결과에 2를 곱한 후 10을 더하여라.
> 다음에는 5를 곱하고 그 결과를 말하여라.
> 당신의 나이를 알아낼 수 있다.

위의 문제의 답은 마지막 수에서 일의 자리의 0를 제거하고 10을 빼면 된다. 학생들은 나이를 알아내는 활동은 물론 왜 그런 답이 나오는지를 정당화하는 활동을 할 수 있다. 이러한 정당화는 여러 가지 수준으로 이루어질 수 있다. 분배법칙을 이해하고 있다면 Tall(1995)의 연산조작적 증명이 가능하며, 그림을 이용하여 시각적으로 정당화할 수도 있을 것이다. 또한 내용이 너무 복잡하면 '어떤 수에 5를 곱한 결과가 20이 되었다. 어떤 수는 얼마인가?'라는 간단한 문제를 이용할 수도 있다. 답을 구하는 과정에 초점을 맞춘다면 하나의 문제해결로 간주할 수 있지만 자신의 답이 적절한지에 대한 이유를 설명해 보도록 함으로써 정당화활동이 이루어질 수 있다.

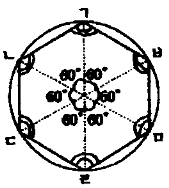
탐구, 추측, 표현, 증명 등은 상호관련된 수학적 사고임이 강조되어 초등수학에서도 강조되어야 한다. 따라서 추론과 증명이 다른 수학적 활동과 분리된 것이 아니라 밀접하게 관련되어 있는 것이다. 따라서, 형식적이고 연역적인 증명이 어렵다고해서 증명에 대한 지도를 중학교 2학년으로 미루는 것은 바람직하지 않다. 추론과 증명이 K-12 전 수준에서 학생들의 중요한 수학적 경험의 일부가 되어야 한다(NCTM, 1998). Usiskin(1997)도 학생들이 증명을 어려워하는 이유 중의 하나가 어느 한 학년에서 다루고 있기 때문이라고 주장하면서 모든 학생들에게 증명을 지도해야 할 필요가 있음을 주장하였다.

2. 초등수학에서의 증명지도 예

초등수학에서 삼각형의 세 각의 합이 180°인지를 탐구하고 왜 그런지 그 이유를 설명하는 과정에서 찢어 붙이기 활동을 하는 바, 이것은 Tall(1995)의 의미에서의 활동적 증명이며, 이 과정을 그림으로 제시하

고 언어로 설명한다면 시각적 증명이 된다. 학생들의 입장에서는 '삼각형의 세 내각의 합은 180°'라는 명제가 참이며 왜 참인지를 정당화한 것으로 해석할 수 있다. 초등수학의 대부분의 내용들은 탐구와 정당화의 과정으로 재구성할 수 있다. 다음 <그림 4>는 정다각형의 개념을 도입하기 위한 것으로 여기서는 정육각형을 예로 설명하고 있다.

정다각형에 대하여 알아보자.



원쪽 그림과 같이 원의 중심각 360°를 60°씩 나눈 반지름이 원과 만난 점을 차례로 선분으로 이어서 다각형을 만들어 보아라.

이 때, 두 반지름과 한 변으로 이루어지는 6개의 삼각형은 모두 합동인 정삼각형이므로, 변 ㄱㄴ, ㄴㄷ, ㄷㄹ, ㄹㅁ, ㅁㅂ, ㅂㄱ의 길이는 모두 같고, 각ㄱㄴㄷ, ㄴㄷㄹ, ㄷㄹㅁ, ㄹㅁㅂ, ㅁㅂㄱ, ㅂㄱㄴ의 크기도 모두 같다.

이와 같이 다각형 중에서 각 변의 길이가 모두 같고, 각의 크기가 모두 같은 도형을 정다각형이라 한다.

위에서 다각형 ㄱㄴㄷㄹㅁㅂ은 정육각형이다.

<그림 4> 정다각형의 도입

위 <그림 4>에서 원의 중심각 360°를 6등분한 반지름이 원과 만난 점을 차례로 이어 다각형을 만들고 그 다각형에 대한 설명을 제시하고 있다. 6개의 삼각형이 합동인 정삼각형이므로 6개의 내각과 6개의 선분의 길이가 같다는 설명으로 정다각형, 여기서는 정육각형이라는 개념을 도입하고 있다. 그러나, 이러한 제시 방법은 교사의 설명과 안내로 학생들을 이해시킬 수는 있겠지만 학생들 스스로의 탐구와 정당화를 기대하기는 어렵다. 처음에 정육각형을 그리도록 요구함으로써 학생들의 탐구활동을 유도하고 있지만, 곧 이어 설명과 함께 정육각형임을 기술하고 있어 학생들의 탐구활동을 기대하기 어렵게 되어 있다. 즉, 교수학적 변환론에서 주장하는 형식적 고착이 일어난다.

이 내용을 다음과 같이 제시하면(<표1>) 학생들은 자신들이 만든 도형을 탐구하여 6개의 삼각형이 정삼각형임을 추측하고 이를 정당화할 수 있다. 그러나 지필환경에서는 이러한 활동을 하기가 쉽지 않으며, 탐구형 기하 소프트웨어를 이용할 필요가 있다. 학생들은 탐구형 기하소프트웨어를 이용하여 문제 상황 (1)의 활동을 한 다음, 탐구형 기하소프트웨어의 측정 기능을 이용하여 (2)의 활동을 하면서 정육각형의 특징을 조사하고 추측한다. 다음에는 '자신의 추측이 참인 이유를 설명하라'는 발문을 통해 학생들의 증명활동을 유도할 수 있다. 논리적이고 형식적인 증명을 요구하는 것이 아니라 학생들 수준에 적절한 방법으로 증명을 할 수 있다.

<표 1> 정육각형의 탐구

문제상황
(1) 한 점과 반지름을 이용하여 원을 작도하고 원의 중심각을 6등분한 반지름과 원의 교점을 구하여라.
(2) 6개의 교점을 연결하여 만든 육각형을 그리고 각 내각과 변의 길이를 측정하여 크기를 비교한 후 그 결과를 써라.
(3) 자신의 추측이 왜 참인지를 설명하여라.

이러한 문제에 대해 학생들은 작도와 탐구, 추측, 자신의 추측에 대한 설명의 순서로 활동을 한다. 작도와 탐구과정에서 육각형의 변의 길이와 각의 크기를 측정하여 그 결과를 탐색하면서 추측을 한다. 다음에는 자신의 추측이 참인 이유를 설명하게 된다. 그러나, 이 과정에서 교사의 도움이 필요하며 몇 가지의 예에서 성립한다고 해서 모든 경우에 성립한다는 것을 보장하기 어렵다는 것을 학생들이 인식할 필요가 있다. 초등학생들로서는 이러한 일반성의 개념을 이해하기 쉽지 않으며 교사의 안내가 필요하다.

Ⅳ. 결 론

본 연구에서는 연역적이고 형식적인 증명 개념을 보다 포괄적인 의미에서의 증명 즉, 정당화 개념으로 재해석하고 초등수학에서의 증명지도 가능성을 제기하였다. 증명지도의 문제점 중의 하나는 증명이 특정 학

년에서 집중적으로 다루어지고 있다는 것이다(Usiskin, 1997). 방정식에 대한 개념이 초등학교에서부터 다루어지면서 점점 발달해 가듯이, 포괄적인 의미에서의 정당화도 초등학교부터 다루어질 필요가 있다. Tall (1995)이 주장하듯, 초등학교 수준에서 활동적 증명 등 다양한 증명활동을 도입하고 학생들의 수준에 따라 점차 형식적인 증명으로 증명의 수준을 높여 가면 '증명'에 대한 학생들의 인식도 달라질 수 있을 것이다. '삼각형의 내각의 합이 180°'라는 명제에 대한 증명은 초등학교와 중학교에서 다르게 나타날 수 있다. 삼각형을 종이 위에 그린 후 세 꼭지점을 오려 내어 한 직선 위에 붙이는 활동 또는 삼각형의 세 내각의 합을 측정하여 그 합을 구하는 활동을 통한 증명이 초등학교에서 가능하다. 같은 명제에 대한 중학교에서의 증명은 이러한 측정 또는 실험으로서의 증명의 한계를 인식하고 새로운 증명 방법을 탐색한다. 그러나, 이러한 과정들이 서로 별개의 과정이 아니라 상호 관련되어 있음을 강조함으로써 학생들은 증명의 필요성과 증명방법을 스스로 구성할 수 있게 된다. 탐구형 기하 소프트웨어를 활용하게 되면 이러한 측정과 실험활동이 용이하게 된다. 초등학교에서의 증명은 형식적이지 않지만 삼각형의 내각의 합이 180°가 됨을 확인하고 왜 180°인지를 설명하고 있다는 점에서 정당화로 해석할 수 있다. 또한 이것은 학생들의 수준이 발달함에 따라 구성되는 새로운 증명방법과 상호작용을 하여 높은 수준의 증명을 용이하게 한다. 본 연구는 이러한 의미에서 초등학교에서의 증명지도의 가능성을 제안하고 있다. 본 연구에서의 주장은 NCTM(1998)의 추론과 증명에 관한 규준에서의 시각과 같은 맥락에서 이해될 수 있다.

참 고 문 헌

류희찬 · 조완영 (1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. 數學敎育學硏究 **9(1)**, 245-261.

서동엽 (1999). 증명의 구성요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색-중학교 수학을 중심으로-. 서울대학교 박사학위논문.

우정호 (1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.

조완영 (2000). 탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 중학교 2학년 학생의 증명활동에 관한 사례연구. 한국교원대학교 박사학위논문.

조인래 (1999). 과학적 방법 : 입증의 개념. 조인래 외 (編), 현대 과학철학의 문제들. 서울 : 아르케.

Balacheff, N. (1987). Processes of proof and situations of validation. *Educational Studies in Mathematics* **18**, 147-176.

Bruner, J. S. (1966). *Towards theory of instruction.* Cambridge, Mass.: Havard University Press.

Carnap, R. (1966). *An introduction to the philosophy of science.* New York: Basic Books, Inc.. 윤용택 (역) (1993). 과학철학 입문. 서울 : 서광사.

Dieudonne, J. (1973). Should we teach 'modern mathematics'?. *American Scientist* **61**, 16-19.

Eve, H. (1953). *Introduction to the history of mathematics.* 이우영과 신항균(역) (1995). 수학사. 서울: 경문사.

Fischbein, E. (1982). Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics* **3**, **2**, 9-18.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as educational task.* Reidel Publishing Company.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop et al. (Eds), *International handbook of mathematics education-part2,* 877-908. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Lakatos, I. M. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery.* Cambridge University Press, Cambridge.

NCTM (1998). *Principles and standards for school mathematics : Discussion draft.* Reston, VA: The Council.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston, VA: The Council.

Perry, J. (1902). The teaching of mathematics. *Educational Review* vol. XXIII.

Semadeni, Z. (1984). Action proof in primary mathematics teaching and if teacher training. *For the Learning of Mathematics* 4.

Sowder, L. & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher* **91(8)**, 670-675.

Tall, D. (1995). *Cognitive developments, representations and proof.* Paper presented at the conference Justifying and Proving in School Mathematics Institute of Education, London, 27-38.

_____ (1979). Cognitive aspects of proof, with special reference to the irrationality of $\sqrt{2}$. *Proceedings of the Third International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* Warick, 203-205.

Usiskin, z. (1997). The implications of "geometry for all". *NSCM Journal of Mathematics Education Leadership* **1(3)**, 5-16.

The Teaching of 'proof' in Elementary Mathematics

Cho, Wanyoung

Namseong Middle School, Bunpyoung, Heungdeok, Cheongju, Chungbuk, 361-201, Korea.

e-mail: matheduhead@yahoo.co.kr

The purpose of this paper is to address the possibility of the teaching of 'proof' in elementary mathematics, on the assumption that proof in school mathematics should be used in the broader, psychological sense of justification rather than in the narrow sense of deductive, formal proof.

'Proof' has not been taught in elementary mathematics, traditionally. Most students have had little exposure to the ideas of proof before the geometry. However, 'Proof' cannot simply be taught in a single unit. Rather, proof must be a consistent part of students' mathematical experience in all grades. Or educators and mathematicians need to rethink the nature of mathematical proof and give appropriate consideration to the different types of proof related to the cognitive development of a notion of proof.