

기하판을 활용한 수업의 효과에 관한 질적 연구

황 우 형 (고려대학교)
이 지연 (하남여자중학교)

I. 서 론

1. 연구목적

아동의 활동과 건전한 교육과의 관련성에 대한 통찰은 매우 오랜 인류의 학습결과로서, 동서고금을 막론하고 받아들여져 왔으며, 이를 바탕으로 한 활동주의이념은 현대 수학교육의 기본적인 특성의 하나이다.¹⁾ 활동주의적 입장에서 수학은 활동으로부터 생긴 활동 그 자체이다. 수학적 활동은 발달의 초기에는 감각·운동적인 것으로 관찰 가능한 것이나 점차 내면화된 활동으로 된다. 따라서 적어도 교육의 초기에는 구체적 활동의 상황이 필요하고 이를 유발시키기 위한 한 방편이 교구이다.²⁾

교구에는 기계적인 훈련을 위한 교구, 어떤 특정한 수학적 개념이나 원리 등을 이해시키기 위한 모형, 수학적 구조의 이해에 유용한 구조적 교구 등이 있다. 새로운 수학관과 수학교육관은 새로운 수학교구를 요구하고 교구의 사용으로 이는 더욱 구체화되고 있다. 아동의 활동을 유도하는 교구의 사용은 이미 완성된 지식체계로써 제시되는 수학이 아닌 조작적인 활동을 통해 재구성하여 스스로 발견해내는 수학학습을 이를 수 있게 한다.

이에 본 연구의 목적은 도형에 대한 학습의 지도를 위해서 창안된 교구 중 하나인 기하판(geoboard)을 중학교 3학년을 대상으로 기하학과 대수학을 연결하는 가장 중요한 정리 중의 하나인 피타고라스 정리의 학습에 이용하여 발견학습이 이루어졌을 때 그 효과를 알아보는데 있다.

2. 이론적 배경

1) 프로이엔탈의 수학 교육 이론

프로이엔탈(Freudenthal, H.)은 본질-결국에는 수학의

개념, 구조, 아이디어 등으로 정체되어 나타나게 되는-이 물리적, 사회적, 정신적 세계의 여러 현상을 조직하는 수단으로 발명되어져 왔듯이 수학의 교수·학습 과정에서도 학생이 현상을 조직하는 본질을 발명³⁾하게 해 주어야 한다는 관점에서 교수현상학을 도입했다.

프로이엔탈은 수학의 교수·학습은 수학이 역사적으로 발달되어온 과정처럼 이루어져야 한다는 것을 강조하고 있다. 따라서 수학의 교수·학습을 위해서는 먼저 수학이 어떻게 발달해 왔는지를 이해하여야만 하는 것이다. 그에 의하면 수학의 역사적 발달은 현상이 본질로 조직화되는 과정으로 설명될 수 있는데, 이러한 현상과 본질은 절대적인 것이 아닌 상대적인 것으로, 현상이 본질로 조직되어지고 그 본질이 다시 현상이 되어 새로운 본질로 조직되어지는 연속적 과정으로 수학의 역사적 발달을 설명하고 있다. 이러한 연속적인 조직화는 프로이엔탈이 교수 현상학에 대한 자신의 의견을 피력하기 전에 이미 주장해 온 '수학화'와 같은 것이라 할 수 있다. 프로이엔탈은 수학은 하나의 활동이라는 해석을 근거로 다음과 같이 '수학화'를 진술하고 있다.

"도형으로써 공간적인 구조를 파악하는 것은 공간을 수학화하는 것이다. 평행사변형의 정의를 얻기 위하여 평행사변형의 성질을 나열하는 것은 평행사변형의 개념적 영역을 수학화하는 것이다. 기하에 관한 모든 정리를 추론하기 위해서 몇 가지의 기하학적 정리를 나열하는 것은 기하를 공리화(수학화) 하는 것이다. 이러한 체계를 언어적 수단에 의해 조직하는 것은 또 다시 하나의 주제에 대한 수학화이다. 이것은 형식화(formalization)라 불린다. 평행사변형에 대한 일반적인 진술은 수학적인 진

3) 여기에서의 발명은 학생의 입장에서 보면 분명히 '발명'이라고 할 수 있으나 수학자에 의해 이미 발명되어진 것을 교수·학습의 과정에서 다시 발명하게 하는 것이므로 실제로는 발명이 아닌 '재발명'이다.

1) 김옹태 외 (1994). 수학교육학 개론, 서울대학교 출판부, p.103
2) Ibid, p. 241

술이다. 그러나 이런 것도 모두 뒤죽박죽이 된 혼란한 상태이다. 그것이 만약 논리적 관계에 의해 구조화 되어 진다면 그것은 수학이 되며, 이것이 수학화이다. 기하적인 정리들의 집합은 하나의 혼란상태이다. 이러한 집성체는 공리적인 수학화에 의해 수학화 되어진다. 언어학적으로 이것은 다시 언어로 표현된 다른 모든 것들과 마찬가지로 혼란 상태이다. 이것으로 조직하게 되면 그것은 형식적인 체계가 된다.”

이러한 주장에서 볼 수 있듯이 수학화란 덜 수학적인 것을 보다 더 수학적인 것으로 조직화하는 일련의 연속된 과정이다. 수학의 역사적 발달이 수학화에 의해 이루어져 왔다고 볼 때, 교수현상학적 수학교육의 핵심은 수학화가 이루어져야 함을 알 수 있다. 수학화는 수학의 개념, 구조, 아이디어 등을 만들어 가는 활동 자체를 뜻 하므로 교수현상학적인 수학교육에서는 연역적으로 이미 제시되어진 수학 자체를 학습하는 것이 아님은 분명하다.

프로이덴탈은 연역적 체계(완성된 지식)가 아닌, 창조된 과정으로서의 수학을 실행수학(acted out math)이라고 하고 결과로서의 수학을 기성수학(ready-made math)으로 구분하고 있다. 사실상 수학은 그것이 수학자에 의해 기성수학으로 모습을 드러내기 전에는 모두 실행수학의 모습으로 존재한다. 교수 현상학적인 수학교육에서 학생들은 이와 같은 실행수학을 학습해야 하는데, 이를 위해서는 교수 제재가 실행수학의 모습으로 주어져야 한다. 그 래야만 학생들이 수학자들에 의해 이미 발명된 수학을 발명되던 방식 그대로 다시 한 번 발명하게 하는 것, 즉 재발명이 가능해진다. 이러한 재발명은 학생의 관점에서 본 발명, 주관적 의미에서의 발명으로서 이로 인해 획득된 지식과 능력은 활동적인 면이 적은 방법에 의한 것보다 더 잘 이해되고, 더 쉽게 보존된다.

교수현상학적인 수학 교육에서 수학화가 이루어져야 한다는 것은 학생들이 실행수학을 학습해야 한다는 것을 의미한다. 또 이것은 학생들이 재발명해야 한다는 것을 의미한다. 그러한 이유로 교수현상학적인 수학 교육에서의 교수·학습방법을 “재발명법”이라 부를 수 있다.

2) 발견학습⁴⁾

브루너(J.S. Bruner)는 ‘새 數學’을 뒷받침한 ‘새 心理

學’의根據가 될 수 있는 「教育의 過程」을 저술했다. 發見, 構造, 直觀的 思考와 같은 아이디어로 표현되는 브루너의 이 저서는 1950년대 말 수학교육 개혁운동의 정신을 잘 파악하여 ‘새 數學’의 인식론적 골격을 제공하였으며 그 이후의 발달을 자극하여 왔다. 브루너의 주장은 어떤 교과내용이든 어떤 발달단계에 있는 어떤 아동에게든 知的으로 정직한 형태로 효과적으로 지도할 수 있다는 가정으로 시작하고 있다. 각 教科의 교육은 그 교과의 기본적인 아이디어 곧 ‘構造’를 다루어야 하며, 그러한 기본적인 아이디어는 어떤 年齡層, 어떤 사회적 출신의 아동에게라도 그가 지닌 思考樣式과 그가 이해할 수 있는 표현수단에 대응되는 형태로 전달될 수 있다는 것이다. 브루너는 아동의 지능의 발달을 活動的 表現, 映像的 表現, 象徵的 表現의 순서로 표현수단의 증대와 그 사이의 조절능력의 증대로 보고 있다.

발견학습이란 브루너가 제시한 지식습득의 새로운 방법으로 기본교재의 학습내용이 사고와 탐구를 수단으로 발견적인 과정을 통해 습득되어 가는 학습 형태를 말한다. 브루너가 기술하고 있는 학습과정은 다음과 같은 방식으로 나타난다. 먼저 아동이 具體的 資料를 다루는 가운데, 그가 이미 이해하고 있는 直觀的 規則性과 대응하는 규칙성을 발견하게 된다. 이렇게 학습자가 발견한 것은 학습자 밖의 어떤 것이 아니라 앞서 알게 된 아이디어의 內的 再組織 과정을 말한다.

발견학습은 소크라테스 방법의 바탕에 있는 교육철학에 기반하고 있다. 플라톤의 「對話篇」 가운데 ‘메논(Menon)篇’에서 아무런 교육도 받지 않은 노비가 주어진 정사각형의 넓이의 두 배가 되는 정사각형은 주어진 정사각형의 대각선을 한 변으로 하는 정사각형임을 이해하게 된다. 이 대화에서 소크라테스는 자신은 이 소년에게 새로운 어떤 것을 가르치고 있지 않으며, 단지 그가 알고 있는 것을 재조직하고 回想해 내도록 도와주고 있을 뿐이라고 주장하고 있다.

브루너의 발견학습에 대한 이상의 해석은 古典的 合理主義와 결부된 現代的의 發達이론의 다이나믹한 적용으로 피아제와 플라톤의 理論的 混合物이라 볼 수 있다.

브루너의 발견학습은 구체적 자료의 취급으로부터 시작됨을 주목해야 한다. 브루너는 지적 발달이 表象樣式의 增大와 그 調節能力의 增大라 보고 있으므로 처음 수

4) Ibid., pp. 155-170

준은 활동적 수준으로 직접 자료를 다루고, 다음에는 영상적 수준으로 대상의 이미지를 다룬다. 마지막에 상정적 수준으로 옮아가는데 여기서는 대상의 이미지가 아니라 記號를 엄격하게 다룰 수 있게 된다. 지적 발달 모델의 중심된 아이디어로서의 구체적인 자료의 취급이란 생각과 학습을 내적인 재조직으로 보는 소크라테스적인 관념을 발견학습으로 결합한 것이 브루너의 생각이다.

3. 연구의 중요성

최근 중학교 수학교육 현장은 많은 변화를 요구하고 있다. 학생들은 수학의 가치를 이해할 수 있어야 하고, 수학을 행하는 자신의 능력에 대해 확신을 가져야 하며, 수학문제의 해결자가 되어야 하며, 수학적으로 의사소통하고 추론하는 것을 배워야 한다.(「학교 수학을 위한 교육과정 및 평가 규준집」, NCTM) 즉, 수학적 활동과 정의적 목표의 달성을 강조하고 있다. 이를 위하여 다양한 경험의 기회를 제공할 수 있는 수업방법의 모색이 절실하다.

본 연구의 결과는 교구를 이용한 수업이 다양한 수준의 학생들의 수학적 지식의 습득과 수학 학습 태도변화에 어떤 영향을 미치는가에 대한 자료를 제공해 줄 수 있을 것이다. 또한 학생들의 활동을 통한 새로운 발견학습의 과정을 알아봄으로서 이것을 조별 토론식 수업에 활용한다면 현장 수업에 도움을 줄 수 있으리라 생각된다.

4. 연구문제

(1) 피타고拉斯 정리의 학습에 기하판을 사용할 때, 성취수준이 다른 학생들의 이해 정도 및 반응은 어떤 차이가 있나?

(2) 기하판 활동이 피타고拉斯 정리를 발견하고 관련 문제를 해결하는데 어느 정도 도움을 줄 수 있나?

(3) 피타고拉斯 정리를 이미 접해 본 학생들은 기하판을 사용하는 학습활동을 어떻게 평가하는가?

(4) 4인 1조로 기하판을 이용하는 수업활동 중 학생 상호 작용의 학습효과는 어느 정도인가?

(5) 일정한 시간이 지난 후 피타고拉斯 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동이 문제해결에 어느 정도 도움을 줄 수 있나?

II. 연구방법

1. 연구방법론의 개요

연구대상자들의 발견, 통찰, 이해에 초점을 둔 본 연구는 연구 문제의 성격상 질적 사례 연구방법을 사용하였다.

질적 사례연구란 하나의 정체, 현상 혹은 사회단위에 대한 철저하고 총체적인 서술과 분석이라 정의할 수 있다. 질적 사례 연구방법의 유형은 최종산물의 형태에 따라서 서술적, 해석적, 평가적인 유형으로 나눌 수 있다. 서술은 사건 혹은 과정에 대해서 철저히 서술하는 것이고, 서술의 수준을 넘어서 사례를 분석, 해석, 이론화하는 것이 해석적 사례 연구이며, 특정 프로그램이나 관행의 장점을 가늠해 보는 것이 평가적 사례 연구이다. 실제로 대부분의 사례 연구들은 서술과 해석의 혹은 서술과 평가의 연합으로 이루어진다.

질적 사례 연구방법의 자료수집 방법으로는 면접(interview), 참여관찰(participant observation), 문서를 통한 자료수집이 있다. 면접은 연구되는 현상에 개입된, 혹은 그것에 관해 알만한 사람으로부터 알고자 하는 것을 알아내는 목적 있는 대화이다. 참여관찰은 관심 있는 현상들을 자연스러운 현장상황에서 직접 경험하고 관찰하는 것이다. 문서는 공공기록이나 선행연구, 물리적 자취들 그리고 인공물들을 포함하는 것으로 사례 연구법에서 제 3의 주요 자료 출처가 된다.

2. 연구대상자

본 연구 대상자를 선정하기 위하여 경기도 A시에 소재한 B중학교 3학년 275명의 2학년 학년말 수학 성적의 석차 백분율을 조사하였다. 조사된 자료를 기반으로 연구자가 지난 1년 동안 담당한 학생들 중에서 수학에 대한 관심, 흥미, 수학 수업 시간의 학습태도 등을 고려하여 12명의 연구 대상자를 선정하였다. 연구를 위해서 성적과 학습태도가 비슷한 2명을 한 조로 하는 네 개 조와 수학 학습 태도와 성적이 다른 4명을 한 조로 하여 총 5개조로 나누었다. 학업성적으로 보면 A조는 상, B조는 중, C조는 하였으며, 이미 피타고拉斯 정리를 배운 적이 있는 X조는 상, Y조는 여러 수준이 혼합되어 있었다.

<표 1> 학생의 인적 및 진로사항

관련사항 학생	가족구성	부모의 교육정도		부모의 직업		취미	진로희망
		부	모	부	모		
A1	부, 모, 여동생2	고졸	중졸	막노동	.	낚서	교사
A2	부, 모	대졸	대졸	회사원	교사	만화	애니메이션 감독
B1	부, 모	고졸	고졸	막노동	공장	체육활동	없음
B2	부, 모	고졸	고졸	경찰	피아노교습	피아노	교사
C1	부, 모, 언니	중졸	국졸	실직	공장	없음	없음
C2	부, 모	중졸	중졸	트럭운전	시계공장	피아노	없음
X1	부, 모, 여동생	고졸	고졸	사업	.	미술	교사, 외교관
X2	부, 모	고졸	고졸	건축업	공장	독서	역사가, 비평가
Y1	부, 모, 언니	고졸	고졸	자영업	.	음악감상	요리사
Y2	부, 모, 오빠, 남동생	고졸	대졸	운수업	.	요리, 노래	교사
Y3	부, 모, 언니, 여동생	고졸	고졸	운수업	.	음악감상	없음
Y4	부, 모, 언니, 여동생	고졸	고졸	가게운영	웃장사	그림	디자이너, 교사

<표 2> 각 학생의 학업성취도 (과목석차 백분율)

학생	1997년도		1998년도		학생	1997년도		1998년도	
	수학	전교과	수학	전교과		수학	전교과	수학	전교과
A1	0.68	3.77	0.36	7.27	X1	12.33	2.74	4.34	5.09
A2	7.88	1.17	6.18	1.82	X2	2.40	1.03	1.82	0.73
B1	43.15	46.58	45.82	48.00	Y1	65.41	58.90	90.91	75.64
B2	79.79	68.15	24.36	50.91	Y2	17.47	20.89	23.64	20.36
C1	93.84	99.32	100	98.18	Y3	64.73	72.26	86.18	86.18
C2	95.55	97.60	99.64	96.36	Y4	48.63	41.78	54.91	37.85

3. 연구절차

연구를 위한 학습활동 전에 면담을 통하여 수학에 대한 태도를 알아보았다.

A, B, C 세 개의 조는 성적과 학습태도에 따른 조 편성으로 기하판을 이용한 학습활동과 발견학습의 과정을 관찰하였고, 학습 후 개별 면담하여 내용 이해 정도 및 기하판을 이용한 학습활동에 대한 반응을 알아보았다. X 조는 이미 과외 활동이나 예습 등으로 피타고라스의 정리에 대하여 알고 있는 학생들로 학습 후 면담을 통하여 기하판을 이용한 학습과 기존의 학습 방법을 비교하게 하였다. Y조는 기하판을 이용한 학습활동 과정 중의 상호작용에 초점을 두어 관찰하였고 피타고라스 정리의 학습내용과 태도, 흥미 등을 면담을 통해 알아보았다. 5개

조 모두 학습 후 바로 내용 이해 정도를 알아보는 형성 평가를 실시하였고 문제 풀이 과정을 설명하게 했다. 또한 일주일 후 학습한 내용을 어느 정도 기억하고 있는가를 알아보기 위하여 대상자 모두에게 피타고라스 정리와 관련된 문제를 풀도록 하고 제출시 풀이과정을 설명하게 하였다.

본 연구자와 학생간의 교수 학습활동 과정, 학생 상호간의 학습활동 과정은 모두 녹음하였다. 녹음된 내용은 모두 분석을 위해서 옮겨 적었으며 이는 활동이 끝날 때마다 실시하였다. 연구를 실시한 기간은 4월 16일부터 5월 8일까지이며 방과후 특별실에서 진행하였다.

교수학습과정을 간단히 소개하면 다음과 같다.

(1) A, B, C, X, Y조 모두 기하판에 고무줄을 이용하여 여러 가지 도형을 만들어 기하판에 친숙하게 한다.

(2) 도형의 넓이를 기존의 공식에 의한 것이 아닌 기하판을 이용하여 구할 수 있게 한다.

(3) 등적변형을 알 수 있는 충분한 활동을 할 수 있게 한 후 직각삼각형의 각 변을 한 변으로 하는 정사각형을 만들어 넓이를 비교하여 세 변의 길이 사이의 관계를 발견하도록 한다.

(4) 발견한 내용을 식으로 나타내게 한다. 피타고라스의 정리를 이용하여 풀 수 있는 문제를 제시하여 기하판을 사용하여 구할 수 있게 한다.

4. 선행연구 (pilot study)

학업 성적이 중하위권이고 특히 평소 수학 수업 중 집중하지 못하는 A, B 두 명을 대상으로 간단한 연구를 하였다. 두 학생 모두 예체능의 활동적인 과목에 흥미가 있고 제일 싫어하는 과목을 수학이라고 하였는데 그 주된 원인은 문제해결에 있어서의 어려움과 수학내용에 대한 이해의 부족이라고 대답했다. 수학을 공부하며 재미 있었던 경험을 묻는 질문에 A는 정답을 맞출 때와 조별 수업 중 친구들과 상의하며 공부했을 때라고 답하였고 B는 수학 학습 중 재미있는 경험이 없었다고 답하였다. 두 학생 모두 도형단원에 대한 흥미가 전혀 없다고 말 했다.

교수학습과정 중 처음에는 두 학생 모두 직사각형, 평행사변형, 사다리꼴 등의 정의에 맞는 도형을 만드는 과정과 넓이를 구하는 공식 등을 정확히 기억해내지 못하고 당황했으나 기하판에 고무줄을 걸어 도형을 만드는 것에 쉽게 익숙해진 후 흥미를 갖고 적극 참여하였다. 도형의 넓이를 알아보는 과정에서는 공식을 몰라도 기하판의 눈금으로 넓이를 직관적으로 비교할 수 있음을 알고 이 과정에 더욱 흥미를 갖고 차오 없이 도형의 넓이를 구하고 비교하였다. 직접 눈금을 세어 볼 수 없는 길 이를 한 변으로 갖는 정사각형을 만드는 작업에는 상당한 어려움을 보였고 이 정사각형의 넓이를 구할 때는 한동안 생각을 했고 그 과정에 대한 설명에도 자신이 없는 듯 했다. 정사각형을, 한 변을 빗변으로 하는 4개의 합동인 직각삼각형으로 분할하는 과정을 본 후, 다양한 형태의 정사각형의 넓이를 구하고 고무줄을 이용하여 사고과정을 설명할 수 있었다. 임의의 직각삼각형을 만들고 각

변을 한 변으로 하는 정사각형을 만들게 한 후 세 개의 정사각형의 넓이를 비교하는 과정을 여러 번 해보고 삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 다른 두 정사각형의 넓이의 합과 같음을 알아내고 신기해하며 재미있어 하는 모습을 보였다. 이때 본 연구자는 피타고라스 정리의 내용을 간단히 설명하였다. 기하판을 이용했던 수업 활동에 대한 질문에 대해서 학생들은 넓이를 구하는 작업이 어려웠으나 집중할 수 있었고 직접 활동하는 작업이 재미있었다고 대답했다.

이틀 후 두 학생에게 피타고라스 정리의 내용을 질문하니 두 학생 모두 정확한 문자와 식은 아니었으나 그 내용을 설명할 수 있었고 두 변이 주어진 직각삼각형의 한 변을 구하는 문제에 쉽게 접근하여 풀 수 있었다.

선행연구를 통해서 정사각형의 넓이를 구하는 과정에 어려움을 느낀다는 것을 발견하였으므로 다양한 고무줄 결이로 넓이를 알아 내는 기회를 충분히 주어야 한다는 것을 알았다.

III. 연구 결과

A 그룹

A1학생은 다른 교과에 비해 수학과목의 성적이 월등히 높고, A2학생은 다른 교과에 비해 수학성적이 비교적 낮은 성취의 차이를 반영하듯 수학에 대한 호감의 차이를 나타내고 있었다.

I : 좋아하는 과목과 싫어하는 과목은 어떤 과목이니?

A1 : 저는 재미있고 계산해서 정답이 나왔을 때 기분이 좋아서 수학을 좋아하고, 도덕은 싫어해요.

I : 왜?

A1 : 이해가 안가고 말이 어려워요. 제가 도덕적이지 못 한가봐요.

A2 : 저는 미술·체육같이 실제적인 과목이 좋아요. 저는 원래 교과서를 싫어하고 책상에만 앉아서 하는 건 싫어하거든요.

I : A2는 평소 책을 좋아한다고 생각했는데?

A2 : 다른 책은 좋아하고 자주 보지만 교과서는 지루해요.

I : A2는 수학에 대해 어떻게 생각하니?

A2 : 지겨워요.

I : 왜?

A2 : 공식을 외우기가 힘들어서 많이 반복해야 한참 후에 그 방법이 터득이 되요. 지금 배우고 있는 인수분해도 공식이 많고 곱셈공식을 다 외워야 하고 또 이용하는 방법도 알아야 하는데 아직 저는 공식도 헷갈리고 적용하는 방법을 몰라서 걱정이 되는데요. 또 공식을 외워도 이용하는데 이해가 안가요. 또 공식 외우기가 싫고.

I : 왜 공식 외우기가 싫어?

A2 : 수학은 다른 과목처럼 말로 되어있지 않고 숫자나 문자로 복잡하게 되어 있잖아요. 그래서 머리에 금방 들어오지 않고 외워도 금방 잊어버려요.

A1은 문제를 해결했을 때 느끼는 성취감과 문제해결이 쉽다고 느끼기 때문에 수학을 좋아하고 어려운 문제를 대하여도 별 두려움 없이 수학공부를 했다고 했으며 수학을 어려워하는 A2를 의식해서 인지 면담 중 짧게 답하고 적당히 대화에 참여하는 모습을 보였다.

A2는 수학을 어려운 과목으로 생각하고 있었고, 계속 반복하고 연습해야만 그 원리를 알 수 있는 많은 노력이 필요한 교과로 생각하고 있었다. 또 본인이 이해가 늦은 편이어서 여러 번 반복 연습해야 계산 원리나 수학내용을 깨닫게 되고 이런 원리를 발견하는 과정이 재미있기는 하지만 스스로 알게 되는 단계에 도달하기 위한 반복 연습 때문에 수학공부는 지루하지만 해야되는 부담스러운 시간으로 생각하고 있었다.

I : A1은 수학을 암기 한 적이 없니?

A1 : 음.. 없는 것 같아요. 집에 가서 이해하려고 많이 노력해요.

I : 어떤 식으로 노력하니?

A1 : 학원에서 했던 것도 보고 혼자 생각하고 문제집도 봐요. 아참, 소금물의 농도, 속력 뭐 이런 거는 외워요.

I : 외우는데 어려움은 없었니?

A1 : 네, 억지로 이해하려고 해요.

A2 : 저는 요, 억지로 이해하려고 노력하지 않아요. 거의 똑같거나 비슷한 문제를 계속 많이 풀어봐요. 중학교에 들어와서 다항식의 계산도 잘못하고 몰랐었는

데 계속 풀다 보니까 저절로 머리에 들어오고 원리를 알겠더라구요. 제가 풀걸 보니까 부호도 같이 계산하는 걸 발견할 수 있었어요. 저절로 이해될 때까지 반복해서 문제를 풀어야 돼요. 저는 이해가 좀 늦은 것 같아요.

수학을 배우는 이유를 물었을 때 A1은 본인은 재미있어서 하지만 다른 사람들은 특별히 공부해야 할 이유는 없다고 한 점과, 수학이 본인에게 인내심과 참을성을 길러 준다는 A2의 반응은 수학학습이 각 학생에게 어떤 시간이었는지를 함축시킬 수 있었다.

I : 수학을 공부하는 이유는 무엇일까? 무슨 이익이 있을까?

A1 : 모르겠어요. 덧셈, 뺄셈만 하면 되는 데 왜 수학을 하는지 모르겠어요. 전 다른 과목도 마찬가지예요.

I : 그래도 좋아한다고 했잖아?

A1 : 전 그냥 좋아서 하지만 다른 애들은 할 이유가 없을 것 같아요. 얻는 게 없을 것 같아요.

A2 : 전 수학을 못하니까 하기 싫고 한데 그래도 해야하니까 문제를 풀면서 하기 싫어하고 노력하지 않으려는 마음을 참아요. 수학은 인내심, 참을성을 길려주는 것 같아요.

두 학생 모두 어려운 문제는 적극적으로 해결하려는 적극적인 경향이 있었고 공식도 많고 암기해야 하는 내용이 많아서 도형 부분이 싫다고 했다.

I : 어려운 문제가 있으면 어떻게 하지?

A1 : 그냥 학원에서 해요.

A2 : 전 혼자 풀어봐요. 여러 가지 방법으로 계속해요. 고집이 세서 다른 사람의 풀이는 안 보게 돼요. 풀후 답을 맞추고 틀리면 다시 풀어요. 그래도 안되면 거꾸로 답을 보고 중간과정을 끄워 맞춰 봐요.

I : 그럼 수학이 싫다고 느낄 때는 언제지?

A1 : 도형을 배울 때, 공식 외우는 것이 싫어요. 전 아직도 도형에 대한 공식은 몰라요. 넓이, 부피 뭐 이런 것.

A2 : 저도 도형이요. 공식도 많고 이해도 안 가는데 중명까지 따져야 하니까. 저도 공식에 관계된 중명은

하나도 몰라요.

A1, A2 학생 모두 수학을 적극적으로 공부했다. 그러나 A1은 쉽게 이해하고 수학학습에 별 어려움 없이 자신감을 갖고 있었으며, A2는 수학학습에 상당한 부담을 갖고 노력을 많이 해야 할 수 있는 교과로 생각하여 수학에 대한 부정적인 태도를 보였다.

(1) 기하판을 이용한 피타고라스 정리의 이해정도 및 반응

기하판을 주고 고무줄로 여러 가지 도형을 만들고 넓이를 물어보니 A2는 “이런 건 유치원에서 해야 될 것 같은 데요.”라며 너무 쉬워서 동기유발이 안 되는 듯 놓담하며 쉽게 만들고 답하였다. 만든 도형의 넓이를 구할 때 공식을 사용하려는 경향이 보여 공식을 이용하지 않고 구하고 고무줄만을 이용하여 넓이 구하는 과정을 설명하도록 하였다. 공식을 알지 못한다고 가정하고 넓이를 알아보도록 해서인지 등적변형을 쉽게 이해하고 면담 과정보다 적극적으로 참여하였고, 이런 활동으로 피타고라스 정리를 유도하여 더 쉽게 피타고라스 정리를 이해할 수 있었다고 하였다.

I : 기하판을 이용하여 수업 한 것이 어땠는지 궁금하구나.

A1 : 이해하기가 쉬운 것 같아요. 넓이를 구할 때도.

A2 : 선생님이 칠판에 필기하는 것보다 자기가 만들어 보니까 여러 번 할 수도 있고 직접 확인하니까 집중하기도 쉬운 것 같아요.

I : 어려운 점은 없었어?

A1 : 별로 없었어요.

A2 : 저도요.

기존의 공식에 의한 것이 아닌 기하판에 고무줄을 걸어 보며 넓이를 알아보고 피타고라스 정리를 유도하는 전 과정에 흥미를 갖고 재미있어 하는 반응을 보이며 피타고라스 정리가 무엇인지 정확히 말할뿐 아니라 식으로도 표현할 수 있었다. 또 직접 이용하는 간단한 문제 뿐 아니라 두 점 사이의 거리 구하는 문제에도 적용하여 해결하였으므로 정확히 이해하고 있음을 알 수 있었다.

(2) 기하판 활동이 피타고라스 정리를 발견하고 관련 문제 해결에 어느 정도의 도움을 줄 수 있는가?

A1은 이미 학원에서 예습을 통해서 2학년 겨울 방학 때 피타고라스 정리의 내용을 접해보아서 쉽게 수업내용을 발견하고 관련 문제 풀이도 쉽게 하였다. A2는 기하판 활동을 통하여 처음 접하는 피타고라스 정리의 내용을 발견했는데 문제 풀이도 쉽게 할 수 있었다고 했다.

I : 무엇인가 발견한 것 같아?

A1 : 그런 건 모르겠어요

A2 : 네.

I : 피타고라스 정리라고 들어 본 적이 있어?

A1 : 네, 학원에서 조금 배웠어요.

A2 : 저는 그냥 뭐 찾아보다가 피타고라스가 뭘 발견했는데 피타고라스 정리이다 하는 걸 본적이 있지 내용에 대해서는 전혀 몰랐었어요. 이런 방법으로 하니까 하나도 몰랐는데도 혼자 알 수 있었고 나중에 배울 때도 더 잘 알 수 있을 것 같아요.

피타고라스 정리의 유도 과정 중 넓이에 대한 학습 활동에서도 더 쉽고 활동적으로 수업에 임하는 모습을 관찰할 수 있었다. 먼저 본 연구자가 기하판에 정사각형을 만들어 주고 각자 기하판 활동으로 넓이를 구할 수 있도록 충분한 시간을 주고 관찰했다. 장난처럼 쉽게 생각했던 그 전의 모습과는 달리 진지하게 여러 개의 고무줄을 놓아보고 서로 다른 방식으로 정사각형의 넓이를 알아냈다. A1은 정사각형의 내부를 합동인 네 개의 직각삼각형과 정사각형으로 나누어서 표현하여 설명하였고, A2는 제시한 정사각형을 포함하는 눈금을 셀 수 있는 가장 작은 정사각형을 만들고 만든 정사각형의 넓이에서 모서리의 4개의 직각 삼각형의 넓이를 빼내는 방법으로 구하고 설명했다. 두 번째 제시한 정사각형의 넓이는 더 빨리 구하고 설명했다. 넓이가 5, 10, 20 인 정사각형을 실제 보고 그 한 변의 길이를 물었을 때, 처음에는 자신 없는 듯 했으나 곧 제곱근을 이용하여 그 길이를 답하였다.

직각삼각형의 세 변을 한 변으로 하는 정사각형을 만들고 그 넓이를 구해보고 연습장에 기하판에 만들어진 모양을 간단히 옮기고 그 넓이사이의 관계를 찾아보도록 했다. 여러 개의 직각삼각형을 만들고 같은 과정을 되풀이하여 그 규칙성을 발견할 수 있었고, 발견한 것을 설명하게 하고 직각삼각형의 세 변의 길이를 문자를 사용하여 지금 발견한 관계를 식으로 표현하게 하여 이를 피

타고라스 정리라 함을 설명하여 주었다. X집단과는 달리 정사각형의 넓이 구하기에는 어려움이 없었으나 피타고라스 정리를 알아내는데 비교적 시간이 걸렸다. 본 연구자의 도움 없이 피타고라스 정리의 내용을 알아내어 발견학습이 이루어졌음을 알 수 있었고 A2학생도 상당히 만족해 하는 것을 느낄 수 있었다. 이를 이용하여 두 변의 길이가 주어진 직각삼각형의 한 변의 길이나 좌표평면에서 두 점 사이의 거리 구하는 문제를 제시했을 때 A1은 능숙히 해결했고, A2는 조심스럽게 신중히 문제를 풀었고 구한 답이 정답임을 알고 기뻐했다.

풀이 과정을 설명하라고 요구했을 때 A1은 “피타고라스 정리에서 삼각형의 세 변이 이런 관계가 있으니까 숫자를 대입하면 이 답이 나와요.”라고 식에 대입하여 문제를 풀었고, A2는 “저는 기하판에서 한 것처럼 그림을 그려서 풀었어요”라 하므로 기하판 활동이 관련 문제 해결에 직접, 간접적인 도움이 될 수 있음을 관찰할 수 있었다. A2에게 피타고라스 정리를 발견하고 관련 문제를 해결하는데 기하판 활동은 상당한 도움을 주었음을 알 수 있었다.

(3) 기하판 활동 수업에 대한 평가

수업 후 기하판을 사용한 본 수업에 대하여 A1은 도형의 넓이를 쉽게 구할 수 있었으며 이해하는 데 쉬웠고, 학원에서 배웠을 때 보다 정확하게 그 내용을 알 수 있었으며 특별한 것은 없었다고 했다. A2는 기하판 활동이 기존 설명식 수업보다 직접 활동할 수 있어서 집중하게 되고 전혀 몰랐던 내용도 쉽게 알게 되어 좋았다고 소감을 밝혔다. 실제 수업에 도입한다면 학생수가 많아서 현실적으로 학습이 이루어지지 않을 것 같지만 흥미를 갖고 참여할 수 있다는 긍정적인 예상을 할 수 있었다.

I : 그럼 A1이 그때 배운 것과 비교해 본다면 어떤 차이가 있었지?

A1 : 학원에서는 그냥 식을 알려주고 내용 설명을 해주며 문제를 많이 풀었는데 지금 이렇게 하니까 정확하게 내용을 이해할 수 있었어요.

I : 기하판을 이용한 수업을 실제로 한다면 어떨 것 같니?

A1 : 애들이 딴 짓을 안하고 재미있어 할 것 같아요.

A2 : 저도 그럴 것 같은데, 이렇게 둘 만 하니까 할 수 있었지만 교실에서 많은 애들이 할 수 없을 것 같

은데 그래도 교과서만 하는 것보다는 좋겠죠.

I : 왜?

A2 : 새롭고 재미있으니까요.

(4) 일주일 후 피타고라스 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동은 어느 정도 도움을 줄 수 있었는가?

A1은 두 변의 길이가 주어진 직각삼각형의 한 변의 길이를 구할 때 빗변이 아닌 변의 길이를 묻는 질문에 모두 틀린 답을 썼다. 전에 했던 식은 생각이 있는데 정확히 어떻게 적용되는지 모르겠다며 틀린 과정을 설명하였다. A2는 4문제 모두 정답을 맞추었고 풀이과정도 정확하였다. 따로 복습했는지를 물어보니 그 후 복습도 하지 않았는데 기하판을 사용한 수업내용이 다 기억나서 어려움 없이 다 풀 수 있었다고 했다. A2에게는 기하판 활동이 일주일이 지나도 학습내용을 정확히 기억하고 적용할 수 있을 정도의 의미 있는 경험이 되었음을 알 수 있었다.

B그룹

B1과 B2 두 학생은 2년 연속 같은 반으로 B1은 다소 소심한 성격이고 B2는 적극적인 면이 있으나 2년째 수학을 담당했던 교사와 수학에 대한 면담을 상당히 부담스러워 했다.

B1은 성격 탓인지 항상 질문하면 먼저 말하기를 꺼려했고 비교적 활발한 B2가 답을 주도하는 경향이 있었다. B2는 주위 환경에 영향을 많이 받는 편으로 중도에 학원을 다니지 않게 되면서 수학에 대한 흥미를 잃었다. B1은 교사에 의해서 그 교과에 대한 호감도가 결정되었다. 반면 B2는 본인이 잘한다고 인정받는 교과를 좋아한다고 했다.

두 학생은 학교생활이나 성격 등에 큰 차이를 보였으나 모두 수학을 어려워하고 공부하기 싫어하는 교과로 여기는 공통점이 있었다.

B2는 싫어하는 교과로 수학을 지적하지만 학원에서 별도로 공부하여 어느 정도의 문제풀이를 위한 학습을 하는 반면에 B1은 수업시간에 수업 듣는 것 외에는 거의 포기한 상태임을 알 수 있었다.

수학을 싫어하는 이유로는 초등학교 때부터 학원을

다니다가 중학교 올라오면서 학원을 그만둔 것을 원인으로 말하고 있다. 학원을 그만 두어서 공부할 기회가 없어지고 중학교 수학의 생소한 내용을 접하면서 어려워지기 시작하였다고 말했다. 수학을 공부하면서 재미있었던 경험을 묻는 질문에 얼른 답을 못하고 난처해하는 것을 볼 수 있었다.

평소 수업시간에 배운 내용에 대한 이해정도는 B1은 쉽게 이해되나 문제를 보면 모르겠고, B2는 처음에는 그 내용을 모르나 몇 문제를 풀어봐야 이해가 된다고 대답해서 수학내용보다는 문제풀이에 더 익숙해있고 이는 학원에서의 과외수업이 쉽게 문제를 해결할 수 있게 도움을 주고 있음을 알 수 있었다.

(1) 기하판을 이용한 피타고拉斯 정리의 이해정도 및 반응

수업 후 두 학생 모두 기하판을 이용하여 직접 고무줄을 걸어 도형을 만들고 기존 공식이 아닌 새로운 방법으로 도형의 넓이를 구하는 것이 시간은 걸렸으나 재미있고 쉽게 이해가 된다고 했다.

두 학생 모두 피타고拉斯 정리가 무엇인지 정확히 표현은 못하나 그 내용을 알 수 있었고, 재미있고 새로운 경험을 했다고 활동에 대한 소감을 밝혔다.

B1은 피타고拉斯 정리에 대하여 전혀 들어 본 적이 없으나 넓이를 비교하여 쉽게 알 수 있었고 식도 쉽게 이해가 간다고 했다. B2는 전에 학원에서 도형의 한 변의 길이를 구하는 방법으로 피타고拉斯 정리에 대해서 들어보았고 이를 이용하여 삼각형의 한 변의 길이도 구할 수 있었는데 기하판을 이용하여 직접 만들어 보니 그 내용이 쉽게 이해가 되었다고 했다.

요약하면, 두 학생 모두 쉽고 재미있는 수업이었다는 반응을 보이고 있고 피타고拉斯 정리의 내용을 정확히 표현하는 것은 꺼려했으나 쉽게 이해가 된다고 하였다. 간단한 길이 구하는 문제에 피타고拉斯 정리를 이용하여 푸는 것으로 보아 그 내용을 이해하고 있음을 알 수 있었다.

(2) 기하판 활동이 피타고拉斯 정리를 발견하고 관련 문제를 해결하는데 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

학생들이 어렵게 느끼는 공식이나 교과서에 의하지 않고 기하판에 고무줄을 걸고 넓이를 직접 세어보는 활동이 피타고拉斯 정리를 쉽게 발견할 수 있게 하고 특히

선수학습이 부족한 B1이 흥미를 갖고 적극적으로 활동하는 시간이 되었으며 그 내용을 정확히 알게하여 관련 문제 해결에도 도움 주는 것을 수업과정의 관찰을 통하여 알 수 있었다.

기하판에 고무줄로 여러 도형을 만들고 단위 넓이를 정하여, 만든 도형의 넓이를 단위 넓이를 기준으로 세어보며 구하도록 했다. 밑변과 높이가 같은 평행사변형의 넓이는 모두 같다는 것을 직접 확인했고 사다리꼴의 넓이를 구하는데 다소 어려워했으나 직사각형과 직각삼각형으로 분할할 수 있다는 것을 알고는 쉽게 넓이를 알아내었다. 넓이가 4인 정사각형을 만들고 그 안에 내접하는 넓이가 2인 정사각형을 만들도록 했는데 처음에는 “안 만들어지는 것 아니에요” 하며 난처해했으나 “넓이가 4의 반이니 넓이를 이루는 4개의 단위 넓이의 반을 모아 보렴” 하자 고무줄을 걸어 보면 넓이가 2인 정사각형을 만들 수 있었고 같은 방법으로 넓이가 8, 18인 정사각형도 만들고 한 변의 길이도 확인 할 수 있었다. 본 연구자가 넓이가 9인 정사각형 안에 내접하는 넓이가 5인 정사각형을 만들고 각자의 기하판에 이 도형의 넓이를 알아보도록 충분한 시간을 주었다. 기하판 활동 후 넓이가 5가 되는 것을 확신하는 것 같아 각자 넓이 구하는 과정을 설명하도록 하였다. B2는 이 정사각형을 4개의 합동인 직각삼각형과 하나의 정사각형으로 분할하여 설명하였고 B1은 구하는 과정중 이상한 모양을 만들었으므로 재현해 보도록 하니 도형의 합동을 이용하여 넓이를 상쇄시키며 이동시키니 5개의 단위 정사각형이 나와 넓이가 5라 설명하였다. 같은 방법으로 다양한 정사각형을 제시하고 넓이를 구하고 설명하게 하니 모두 정확히 구하고 있음을 알 수 있었고 특히 B1은 B2에게 조언까지 하며 자신 있게 구해냈다. 피타고拉斯 정리의 도입은 여러 개의 직각삼각형을 제시하고 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하여 그 넓이 사이의 관련성을 찾아보도록 했는데, 3, 4 번 후에 그 관계를 알아내었으므로 종이에 일반적인 문자를 사용하여 나타내고 자신이 발견한 것을 식으로 표현하도록 하고 이를 피타고拉斯 정리라 하며 정리해 주었다.

두 변의 길이가 주어진 직각삼각형의 한 변을 물어보는 문제를 풀고 설명하게 했을 때 B2는 빨리 쉽게 풀고 지금 정리한 식에 의해 풀었으나 B1은 정사각형을 그리

며 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하고 계곱근을 이용하는데는 어려워했으나 자신이 구한 값이 정답임을 알고는 만족해했다.

기하판 활동이 수업내용에 집중하게 하고 직접 보며 생각할 수 있으므로 피타고라스 정리를 발견할 수 있게 했다. B1은 정확하게 식을 이용하여, B2는 기하판에서의 활동을 연상하여 관련 문제를 풀었으므로 기하판 활동이 피타고라스 정리의 학습에 직접적으로, 그리고 간접적으로 도움이 되었음을 알 수 있었다.

(3) 일주일 후 피타고라스 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동은 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

B2는 피타고라스 정리의 내용을 정확히 식으로 나타내고 이를 이용하여 직각삼각형의 변의 길이를 구하였으나 이를 이용하여 좌표평면 위에서 두 점 사이의 거리를 묻는 문제는 상당히 어려워했으며 위의 식도 잘못 적용하고 있음을 알 수 있었다. B1은 '아무것도 모르겠어요, 생각이 안나요'라며 메모를 남기며 문제풀이에 거부감을 나타냈으나 본 연구자가 용기를 북돋아 주며 기하판에서 활동을 연상시킬 것을 유도하여 그림으로 되어 있는 한 문제를 겨우 해결하며 피타고라스 정리의 내용을 기억해냈다. 따라서 기하판 활동이 B1에게는 피타고라스 정리를 오래 기억시키는데 별 도움이 안되었고, B2에게는 정확한 식의 기억 및 이를 간단히 사용하는 문제해결에는 시간이 지났는데도 도움이 됨을 알 수 있었다.

C그룹

C1, C2 두 학생 모두 수학에 대해서 자신이 없어 했으며 수학 담당 교사인 본 연구자와의 면담을 어려워하고 소극적인 면을 보였다.

수학에 대한 생각은 수학공식도 모르고 문제 파악도 안되어서 자신감도 잃은 상태였고, 수학을 복잡하고 어려운 과목으로 인식하여 더 이상 노력도 안하고 포기한 상태임을 알 수 있었다.

C1, C2 두 학생 모두 수업시간외에는 거의 수학을 공부하지 않고 수업의 이해정도는 아주 쉬운 내용으로 20%정도만 알 수 있다고 했다.

C2는 일반 학생들과 달리 수학내용 중 풀이와 계산에 부담이 없고 비교적 직관에 의존하는 도형이 제일 재미 있는 내용이라 말하는 반면 C1은 수학중 재미있는 내용

이 없다고 했다.

두 학생 모두 수학을 어려워하고 다 포기한 상태로 이는 누적된 학습의 결손이 성취도뿐 아니라 수학에 대한 태도에도 깊이 영향을 미쳤음을 알 수 있었다.

(1) 기하판을 이용한 피타고라스 정리의 이해정도 및 반응

기하판에 고무줄을 걸어서 도형을 표현하며 식이나 계산에 의한 것이 아니라 직접 세어 보면서 넓이를 구하는 것을 더 쉽게 생각하고 처음 면담할 때와는 달리 적극적으로 기하판 활동에 참여하는 모습을 볼 수 있었고 재미있다고 했다.

피타고라스 정리의 내용을 물어보니 정확한 용어는 아니나 그 내용을 자신의 언어로 직관적으로 이해하고 있음을 알 수 있었다. 간단한 피타고라스 정리의 내용 이해 정도를 묻는 문제의 풀이도 쉽게 정리를 생각해냈다.

C1과 C2는 활동에 적극적으로 참여하였고 활동 중에 많이 틀려서 다른 그룹들 보다 시간도 많이 걸렸으나 재미있다는 반응을 보였다. 또한 피타고라스 정리의 내용도 직관적으로 이해하고 있음을 알 수 있었다.

(2) 기하판 활동이 피타고라스 정리를 발견하고 관련 문제 해결에 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

기하판 활동 중 도형의 넓이를 구하는데 상당한 시행착오를 겪었고 다양한 크기의 정사각형의 넓이를 구하는데에는 본 연구자의 도움을 받아야 했다. 정사각형이 넓이를 구할 수 있도록 도움을 받아서 정사각형을 분할한 후에는 본인들이 정확하게 넓이를 구하는 방법을 알아낼 수 있었다. 직각삼각형에서 세 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이 사이의 관계도 제시받은 후에야 기하판으로 확인하는 시간이 되어 스스로 활동을 통한 발견학습은 이루어지지 못했음을 관찰할 수 있었다. 피타고라스 정리의 관련문제 풀이에 있어서는 계산 과정이 틀리긴 했어도 두 변이 주어진 직각삼각형의 다른 한 변을 구할 수 있었고 답을 구하는 과정을 직각삼각형의 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형을 그리고 그 넓이로 설명하는 것을 관찰할 수 있었다. 이를 통해서 기하판을 이용한 피타고라스 정리에 대한 수업이 식의 표현 및 계산에 어려움을 겪는 두 학생의 문제해결에 도움을 주었음을 알 수 있었다.

기하판 활동을 통하여 스스로 피타고라스 정리의 내용을 발견하지는 못했으나 그 내용을 알고 있음을 확인할 수 있었고 식이 아닌 고무줄 결이로 넓이를 알아내는 과정에 큰 도움이 되었음을 관찰할 수 있었다. 관련 문제 풀이도 계산에는 어려움을 보였으나 기하판의 도형의 모습을 연상하여 구하였으므로 본 수업이 문제풀이에도 직접 도움이 되었음을 알 수 있었다.

(3) 일주일 후 피타고라스 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동이 문제해결에 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

C1은 쉽다고 생각하는 한 문제만 답을 썼는데 풀이가 없어서 구두로 물어보니 '그냥 이렇게 생긴 삼각형에서 무엇인가 더했던 것 같다'라며 두 변의 길이를 더해서 답이 나왔다고 했으며 나머지 문제는 물음 내용조차 전혀 파악하지 못하였다. C2도 쉬운 1문제만 답을 썼는데 C1과 답은 같으나 기하판에서 만들었던 정사각형의 넓이를 그리고 이를 이용하여 답을 구하였으나 정사각형의 넓이 구하는 부분에서 틀리면서 오답이 나왔음을 알 수 있었다. 따라서 기하판 활동의 경험을 생각해내기는 했으나 피타고라스 정리의 내용을 정확히 기억하지는 못했다.

X그룹

문제를 해결하고 정답을 맞추었을 때 느끼는 성취감, 성적과 관련된 평가 등을 중요하게 생각했고 이에 따라서 각 교과 수업의 호감정도를 나타내고 있다.

두 학생 모두 수학을 쉽게 이해하고 또 이해만 하면 암기가 필요 없는 것으로 쉽고 재미있는 과목으로 어느 정도의 자신감을 갖고 있는 듯했다. 이런 수학에 대한 견해는 내용을 알아 가는 과정이나 수학적 내용보다는 이를 이용한 문제풀이를 중요시하고 반복 연습을 통하여 답을 구하고 그때마다의 성취감이 크게 영향을 미친 것으로 생각된다.

학원에서 과외 수업이나 자율 학습에서 수학 문제 해결을 위해 적극적이고 자율적인 태도를 보이는 반면 학교 수업에는 만족스럽지 못한 태도를 보였다.

수학 내용으로는 함수, 방정식 등 풀이를 할 수 있는 것을 좋아하나 증명해야 하는 도형을 싫어하는 것을 알 수 있었다. 이는 쉽게 이해하고 계산하여 풀이를 할 수 있는 활동의 기회보다 논리적인 사고과정을 중요시하고

또 엄격히 표현해야 하는 2학년 기하 학습의 경험 때문인 듯 했다.

두 학생 모두 수학에 대해 긍정적인 태도를 보였고 다른 학생들보다 수학을 잘한다고 생각했고 도전적이고 적극적인 학습습관을 갖고 있음을 알 수 있었다.

(1) 기하판 활동을 통한 피타고라스 정리의 내용 이해 정도 및 반응

본 수업에서는 도형의 넓이를 이용하여 피타고라스 정리를 유도하므로 기하판을 이용하여 도형의 넓이 특히 다양한 길이를 갖는 정사각형의 넓이를 알아보기 위한 활동을 많이 할 수 있게 하였다. 이 활동 중 두 학생 모두 직관적인 새로운 넓이에 대한 정의보다는 기존의 넓이 공식을 사용하려 하여 상당히 어려움을 겪었다.

여러 가지 도형을 정의에 맞게 기하판에 잘 표현하고 질문의 의도를 잘 파악하여 기존의 도형에 대한 지식(도형의 성질, 삼각형의 합동 조건, 넓이 공식 등)을 적용하여 설명하였다. 연구자가 만든 도형의 넓이를 물었을 때 이를 신속히 구했고 그 과정에 대한 설명 또한 공식에 적용하여 답했다. 각자 직관적으로 만든 사각형이 정사각형인가라는 질문에 2학년 때 배운 삼각형의 합동 조건을 사용하여 설명하면서 어려워하였다. 직관적으로 알 수 있는 것도 이론과 식으로 나타내려 하였다. 자신이 만든 정사각형을 다른 도형으로 분할해서 넓이를 구하기 쉬운 도형을 만들어서 다양하게 표현하는 활동을 본 후 기존의 공식이 아닌 다른 도형을 이용하여 비교함으로써 정사각형의 넓이를 구할 수 있음을 알게 되었고 다양한 정사각형의 넓이를 구할 수 있었다.

피타고라스 정리는 몇 개의 직각삼각형에서 각각의 변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 구하고 그 사이의 관계를 찾아내어 쉽게 알아낼 수 있었으며 이해가 잘되고 재미있다고 했다. 또한 간단한 피타고라스 정리를 이용한 문제는 쉽게 정답을 맞추었고 그 과정도 자신 있게 설명했다.

(2) 기하판을 사용하는 학습활동에 대한 평가

활동 전과는 달리 당황하고 어려워하는 모습이 보였으므로 그 이유를 물어 보았더니 넓이를 구하는데 공식을 억지로 적용하려고 해서 새로운 넓이 구하는 방법이 어려웠다고 했다. 새로운 수업 방식을 재미있어 하면서도 이미 알고 있는 답을 쉽게 구하는 지식을 사용하려는

경향 때문에 더욱 어려웠고 생각을 많이 할 수 있었다고 지적했다.

이전에는 피타고라스 정리를 쉽게 배우고 간단한 식의 풀이로 이해했으나 더욱 그 내용을 정확히 알 수 있음을 지적하였다.

기하판을 이용한 수업이 활동할 수 있는 기회를 주므로서 학생들에게도 흥미를 유발할 수 있고 시험만을 위한 공부가 아니라 많이 생각하여 흥미를 유발한다고 했다.

기하판을 이용한 수업은 학생들이 직접 활동할 수 있으므로 재미있고 생각할 기회를 충분히 제공하므로 더 정확히 그 내용을 이해할 수 있었다고 평가했다.

(3) 일주일 후 피타고라스 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동이 문제해결에 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

X1, X2 두 학생 모두 계곱근 계산 과정에서 실수하여 한 문제를 틀렸고 나머지는 정확히 풀고 설명하였다. X1은 이미 알고 있는 식이었으나 기하판 활동을 통하여 개념 정리가 정확히 되어서 문제풀이에도 정확하게 식을 이용할 수 있다고 하였다. X2는 문제지를 주자 공부를 안해서 모를거라 하였으나 피타고라스 정리의 내용을 그대로 기억하고 있고 이를 이용하여 문제도 쉽게 풀었다. 또 좌표평면에서 두 점사이의 거리를 묻는 문제풀이에서 기하판에서의 활동을 연상하여 식을 확인하며 풀었음이 관찰되었다. 이는 시간이 지나도 기하판을 이용한 본 수업의 학습효과가 지속됨을 나타내었다.

Y그룹

수학 성취수준은 서로 다르나 서로에 대하여 잘 알고 성격이 모두 활발해서 면담에 적극적으로 임하였다.

수학은 도구적인 교과로 생각했고 어느 정도는 꼭 필요하나 필요 이상으로 어려워지는 것 때문에 가끔씩 문제를 풀며 느끼는 성취감에도 불구하고, 수학은 어렵고 문제풀이를 잘 하기 위해서 외워야 할 공식도 많은 삶은 교과로 인식하게 되었다. 수학을 잘 하기 위한 전제조건으로 이해력, 집중력, 용용력, 끈기 등이 필요하나 본인은 이에 비춰볼 때 부족한 점이 많아 수학을 못한다고 했다.

Y1, Y2, Y3, Y4 모두 어느 정도의 수학은 필요하나 지나치게 어려워지는 것이 쉽고 본인들도 잘 하고 싶지만 산만하고 머리가 나빠서 못한다며 열띤 토론을 하였다.

(1) 기하판을 이용한 수업에 대한 반응 및 평가

새로운 형식, 공식에 의한 문제풀이 위주가 아닌 활동을 할 수 있는 수업이어서 이해도 잘 되고 제시된 그대로의 식의 학습이 아니라 실제 발견학습이 이루어졌다고 말했다. 실제 수업에 적용한다면 이런 활동으로 재미있고 집중이 잘 될 수도 있다는 가능성을 갖게 되었다.

(2) 상호작용의 학습 효과

개인적인 기하판 활동에서 연구자가 이미 만들고 생각한 것을 서로에게 설명하고 서로 고무줄 결이나 넓이를 위한 칸의 수를 세어 보고 조언해 주었다. 가끔씩 쉽게 안되는 것은 살짝 보기도 하였으나 서로 자극이 되어 빨리 구하려고 적극적으로 참여했다. 공동의 활동에서 가끔씩 지켜보기만 하는 학생도 있었지만 잘 하는 학생이 활동을 주도하고 서로 도와주고 설명하면서 피타고라스 정리를 유도해갔다. 각자 모두 혼자 수업하는 것보다 이해도 쉽고, 빨리 알 수 있고 본인이 생각한 것이 올바르게 되었는지도 확인할 수도 있어서 4인 1조의 조별 수업에 상호작용을 촉진시키고 이를 통해 더 쉽고 빨리 피타고라스 정리를 이해할 수 있었음을 말하고 있다.

(3) 일주일 후 피타고라스 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동은 문제해결에 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

Y1은 생각이 안 나서 전혀 모르겠다며 친구에게 물어서 그 설명을 듣고 이해하는 듯했다. Y2는 ‘그때 했던 것 다 생각나요’라 하며 자신 있게 풀었는데 2문제만 맞추고 1문제는 계산 과정에서 틀렸다. 하나는 전혀 모른다 했으나 피타고라스 정리의 내용은 정확히 기억하고 있었다. Y3는 피타고라스 정리의 내용을 묻는 문제를 경사각형의 넓이를 구하여 기하판에서 유도한 그대로의 과정으로 해결하여 1문제만 풀었고 나머지는 모른다고 했다. Y4는 ‘하나도 모름’이라는 메모를 남기며 피타고라스 정리를 빗변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합으로 나타내는 식으로 문제를 풀었다. 기하판 활동이 얼마나 기억되고 또 관련 문제해결에 도움을 줄 수 있지 여부는 개인차가 많이 있음을 알 수 있었다.

IV. 연구 결과 분석

연구 문제에 따라 연구 결과를 정리하고 분석하면 다음과 같다.

(1) 피타고라스 정리의 학습에 기하판을 사용할 때,

성취수준이 다른 학생들의 이해정도 및 반응은 어떤 차 이를 보이는가?

피타고라스 정리의 학습에 기하판을 사용할 때, 성취수준이 다른 A, B, C그룹의 학생들의 내용 이해 정도 및 반응은 모두 쉽게 이해가 되며 재미있고 쉬웠다는 반응을 나타내어 큰 차이를 발견하지 못하였다.

성취수준이 제일 높은 A그룹은 기하판에서 발견한 내용을 쉽게 문자를 사용하여 식으로 옮기고 길이를 구하는 간단한 관련 문제 뿐 아니라 좌표평면에서 두 점 사이의 거리 구하는 것까지 쉽게 적용하여 풀고 자신있게 설명하는 것으로 정확히 이해하였음을 알 수 있었다.

중간의 성취수준을 보이는 B그룹도 기하판에서 발견한 내용을 식으로 나타내고 간단한 관련 문제를 쉽게 해결하여 피타고라스 정리의 내용을 이해하고 있음을 알 수 있었다. 성취수준이 아주 낮은 C 그룹은 피타고라스 정리의 내용을 기하판에서 활동한 것을 기반으로 직관적으로는 이해하나 식으로의 표현에는 혼란스러워함을 알 수 있었다. 관련 문제의 해결은 피타고라스 정리의 내용을 쉽게 생각하고 이용하려 하였으나 계산과정에는 본 연구자의 도움을 얻어야 했다.

위에서와 같이 피타고라스 정리의 표현이나 이해도를 묻는 문제풀이에서 나타나는 약간의 차이는 피타고라스 정리의 대수적 성질에 기본 문자와 식의 표현과 그 계산과정이 포함되어 있으므로 본 수업 내용의 이해정도가 그대로 반영되었다고 할 수는 없다.

(2) 기하판 활동이 피타고라스 정리를 발견하고 관련 문제를 해결하는데 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

성취수준의 차이를 보이는 A, B, C그룹 모두 기하판에서 고무줄을 걸어 보면 생각하는 활동이 수업에 집중하게 하고 실제 본인이 만들고 확인이 가능하므로 일관적인 규칙성을 찾아내어 피타고라스 정리의 내용을 발견하는데 큰 도움이 되었음을 알 수 있었다. 특히 수학에 대한 부정적인 시각을 지닌 A2, B1, C1, C2 모두 흥미를 갖고 적극적으로 활동에 임해서 처음 보는 피타고라스 정리의 내용을 발견해내고 크게 만족해하는 모습을 관찰할 수 있었다. 이는 추상적이고 어려운 정의와 이에 의한 식의 유도나 식의 계산으로 이어지는 기존의 수학학습에 반하는 새로운 활동주의적인 수업이 이루어졌음을 알 수 있었다. 또 관련 문제 해결에도 피타고라스 정리

의 식을 직접 이용하거나 기하판에 만들어진 도형의 모양을 상상하며 식을 유도하거나 직접 넓이를 알아내는 과정으로 쉽게 문제해결에 성공했다. 이는 기하판 활동이 피타고라스 정리의 관련 문제 해결에도 각각의 다른 태도를 보이는 학생들에게 다양하게 도움을 주었음을 알 수 있다.

(3) 피타고라스 정리를 이미 접해본 학생들은 기하판을 사용하는 학습활동을 어떻게 평가하는가?

피타고라스 정리를 이미 알고 있는 학생들은 이미 식을 알고 있기 때문에 기하판 활동으로 넓이를 구하고 이를 사용하여 피타고라스 정리를 유도하는 과정을 어렵게 생각했다. 이 연구 문제의 주 대상자인 X그룹은 모두 수학내용을 쉽게 이해하고 관련 문제에도 쉽게 적용하여 어려운 수학문제에도 도전적인 학습태도와 어느 정도의 자신감을 갖고 있는 문제해결에 능숙한 학생들이었다. 이들은 기하판 활동을 전혀 새로운 경험을 제공하여 더 깊이 생각하는 수업이었고 쉽게 식을 이해하고 이를 통해 문제를 푸는 기존 수업보다 깊이 생각하고 정리에 대해서 정확히 알 수 있는 수업이었다고 평가했다.

(4) 4인 1조로 기하판을 이용하는 수업활동 중 학생 상호 작용의 학습효과는 어느 정도인가?

수업중 가끔씩 참여하지 않는 대상자가 관찰되기도 하였으나 수업활동에 서로 도움을 주고 함께 알아내고 설명하는 과정을 통해 활발하게 상호작용이 이루어졌고, 다른 대상자 그룹보다 빨리 피타고라스 정리를 유도했다. 평소 교실의 조별수업은 서로 성취수준이 다른 4명으로 구성되었을 때 새로운 수학 내용을 이해하는 정도의 차이로 문제풀이나 교과서와 교사의 설명에 대한 조별학습에서의 상호작용은 성취수준이 높은 학생이 낮은 학생에게 설명해주는 일방적인 방향으로 진행되는 경향이 있다. 그러나 기하판 활동은 기존의 지식에 크게 영향받지 않고 구성원 전체의 다양한 형태의 상호작용이 이루어졌고 각각의 구성원 모두 수업에 더 적극적으로 참여할 수 있었다. 또한 이를 통해 피타고라스 정리의 내용을 발견하고, 이해하고, 관련 문제 해결에도 쉽게 임할 수 있었다.

(5) 일주일 후 피타고라스 정리와 관련된 문제를 제시했을 때 기하판 활동이 문제해결에 어느 정도 도움을 줄 수 있는가?

성취수준이나 학습태도에 따라 많은 차이를 보이고

있다. 비교적 학업 성취도가 높은 학생일수록 학습한 내용을 직관적 뿐 아니라 식으로도 정확히 기억하고 있어서 이와 관련된 문제풀이도 큰 어려움 없이 해결하는 것을 볼 수 있었다. 기하판 활동으로 직접 발견한 내용이 정확히 기억되어서 관련 문제해결에도 다양하게 적용하고 있음을 알 수 있다. 수학과목에 중간 정도의 성취수준을 보이는 학생에게도 본 수업의 효과가 시간이 지났는데도 지속되어 문제해결에 도움을 주었다. 성취수준이 낮은 학생들은 수업 중 쉽게 피타고라스 정리를 이해하고 직관적으로 말할 수는 있었으나 시간이 지나면서 정확히 기억하지 못하고 있었다. 문제 풀이 과정 중 피타고라스 정리의 내용을 정사각형을 그리는 것으로 기하판 활동을 통한 내용을 문제풀이에 이용하려는 것을 알 수 있었으나 정확하게 그 내용을 기억하지는 못하였다. 이는 문자와 식을 이용하여 학습한 내용을 정리하지 못하여 시간이 지나면서 그 내용에 혼란이 왔음을 알 수 있었다. 또 성취수준이 낮은 Y3는 피타고라스 정리 내용을 묻는 간단한 문제 풀이에 기하판에서의 그림과 같은 것을 그리며 정확하게 정답을 구했는데, 식을 사용하는 문제는 모른다고 하여 기하판 활동 수업이 문제해결에 직

접적으로 도움이 되었음을 알 수 있었다. 따라서 시간이 지난 뒤 기하판 활동을 통하여 학습한 내용을 기억하여 문제해결에 적용할 수 있는 능력은 성취수준이나 학습태도 등 개인차를 나타내고 있다. 비교적 성취수준이 낮은 학생들의 수업에는 수업 중 직관적으로 이해한 내용을 문자나 식을 사용하여 표현할 수 있게 하고 식을 다루는 연습을 강화해야 더욱 학습효과를 높일 수 있음을 알 수 있었다.

V. 요약 및 적용

오늘날 수학교육은 수학적 활동과 정의적 목표의 달성을 강조하고 이를 위한 다양한 경험의 기회를 제공할 수 있는 수업을 절실히 요구하고 있다. 이에 본 연구자는 기하판이라는 교구를 사용하여 학생들의 조작적인 활동을 유도하고 이를 통해 피타고라스 정리의 내용을 스스로의 활동으로 발견해내고 이해할 수 있는 활동적인 수업을 연구하였다.

본 연구는 성취수준이 상, 중, 하 인 2명이 한 조를 이루는 A, B, C 3그룹과 피타고라스 정리를 이미 알고

<표 3> 연구 결과요약

수학에 대한 기본태도		기하판을 사용한 수업에 대한 평가	
		피타고라스 정리 이해정도 및 반응	기하판 활동의 효과
A	A1	쉽고 재미있고 타교과 보다 높은 성취를 보임	쉽게 이해가 가고 정확히 내용을 알 수 있었고 관련 문제해결도 성공적임 집중이 잘 됨
	A2	지루하고 노력을 많이 해야 하는 어려운 과목임	정확히 이해하고 문제해결에도 적극적이며 흥미를 갖고 있함 직접적인 활동으로 새로운 내용을 발견하는 수업이었음
B	B1	어렵고 싫어서 거의 포기함	정확히 표현은 못하나 그 내용을 알고 관련 문제를 해결함 재미있게 내용을 발견하게 하고 쉽게 이해됨
	B2	어렵고 싫으나 학원에서의 공부로 어느 정도 적극적임	정확히 표현은 못하나 내용을 충분히 이해하며 문제해결에도 적극적임 쉽게 이해가 됨
C	C1	어렵고 수학학습 결손이 누적되어 포기함	어느 정도 이해하여 본 연구자의 도움을 얻어 문제를 해결함 쉽고 재미있게 느껴짐
	C2	어렵고 수학학습 결손이 누적되어 포기함	자신의 언어로 자신있게 표현하였으며 도움을 얻어 문제를 해결함 놀이를 한 것처럼 쉽게 임하게 됨
X	재미있고 자신감을 갖고 있으며 도전적이며 적극적임	그 내용은 정확히 이해하나 식의 유도과정을 어려워함	재미있고 집중하게 하여 생각을 많이 하게 함
Y	잘하고 싶고 꼭 필요하나 어려워서 싫은 교과임	그 내용을 이해하여 서로 설명해주며 관련 문제해결에도 적극적임	재미있고 집중을 도와 쉽게 내용을 알게 함

있는 2명의 한 조인 X와 성취수준이 중상, 중, 중하, 하인 4인의 한 조인 Y로 나누어서 실시되었고 질적 연구 방법을 사용했다. 그 결과를 요약하면 <표 3>과 같다.

본 연구는 기하판을 사용한 수업이 학생들의 직접적인 활동으로 스스로 생각할 수 있는 충분한 기회를 제공함으로써 발견학습을 이루어냈고 이를 통한 정의적 목표 까지 달성할 수 있음을 보여 주고 있다. 교구를 이용하는 활동적인 수업이 단순한 동기유발의 차원을 넘어서 기존에 수학적 지식이 있는 학생에게는 더 정확히 사고 할 수 있는 기회를 주고 기존의 수학학습이 부진한 학생에게는 흥미롭게 그 내용을 발견할 수 있는 기회를 제공함으로써 다양한 수준의 학생들의 학습에 큰 도움이 될 수 있음을 예상할 수 있었다. 또한 효과적인 조별 협동 수업의 한 형태로 교실 현장에 적용할 수 있으리라 생각된다.

참 고 문 헌

- 김용태 외 2 (1994). 수학 교육학 개론, 서울: 서울대학교 출판부.
 김호우 외 3 (1997). 중학교 수학 3 교사용 지도서, 서울: 지학사.

김미정 · 이종희 (1994). Van Hiele 이론에 의한 중학생들의 기하적 사고 수준에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 33(2).

나귀수 (1998). 중학교 기하의 증명 지도에 관한 소고 -van Hiele과 Freudenthal의 이론을 중심으로, 대한수학교육학회논문집 8(1).

나귀수 (1997). 기하개념의 이해와 적용에 관한 소고, 대한수학교육학회논문집 7(2).

노태근 (1992). 발견학습을 통한 문제 해결력 신장 방안, 대한수학교육학회 논문집 2(2).

박대우 · 윤주한 (1997). 피타고라스 정리의 효과적인 지도 방안에 관한 CAI제작 및 적용을 통한 학습의 효과에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 36(1).

박춘자 (1998). 대수막대을 이용한 수업연구, 고려대학교 석사학위논문.

이은영 (1997). 대수막대을 이용한 수업연구, 고려대학교 석사학위논문.

서동엽 (1992). 증명지도에서 직관의 역할에 관한 연구, 대한수학교육학회논문집 2(2).

신준식 (1993). 인지학습과 학습내용 전개-평면도형의 넓이, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 32(3).

허미화 역 (1996). 질적 사례 연구법, 서울: 양서원.

A Qualitative Study on the Effect of Geoboard Activities

Whang, Woo-Hyung

Department of Mathematics Education, College of Education, Korea University,
Seoul, 136-701, Korea; e-mail: wwhang@kucnx.korea.ac.kr

Lee, Ji-Yon

Hanam middle school, Hanam, Kyonggi-do, Korea

The purpose of the study was to investigate the effects of the geoboard activities in understanding the Pythagorean Theorem. Five groups of middle school students were involved in the study. The research questions of the study were followings: 1) What are the differences in understanding and attitudes among students those who revealed the various levels of achievement when geoboards were introduced in learning the Pythagorean Theorem. 2) What was the effect of the geoboard activity in introducing the Pythagorean Theorem and solving relevant problems? 3) What would be the impression of geoboard activity for those who already knew the Pythagorean Theorem? 4) What would be the effects of interaction in geoboard activities? 5) What was the effect of the geoboard activity in recovering the Pythagorean Theorem, and applying the theorem.

The result of the study revealed the positive effects of geoboard activities throughout the research questions although there were differences among various levels of students and groups.