한국정밀공학회지 제 17 권 제 7 호 (2000 년 7 월)
Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 17, No. 7, July 2000.

진원도 계산을 위한 Minimum Zone 알고리즘 연구

이응석*, 김종길*, 신양기**

A Study on the Minimum Zone Algorithm for the Calculation of Roundness

Lee Eung Suk*, Kim Jong Gil* and Shin Yang Gi**

ABSTRACT

Least Squares and Minimum Zone method are known for obtaining a datum or a continuous approximate function of measured data. This study is for a Minimum Zone algorithm for a circle, which is useful to obtain the exact roundness from the reference circle of measured data. The proposed method is compared with the Least Squares Limacon method and Chrystal-Peirce algorithm. A computational algorithm for the Minimum Zone circle is suggested and results in less roundness than the other two methods. This Minimum Zone circle method will be used for other geometrical measured data, such as plane or sphere for obtaining the exact flatness or sphericity.

Key Words : Minimum Zone method (최소 간격법), Least Squares method (최소 자승법), Least Squares Limacon (최소자승 리마콘), Chrystal-Peirce algorithm, Roundness (진원도), CMM (3 차원좌표측정기), Master ball (표준구)

기호설명

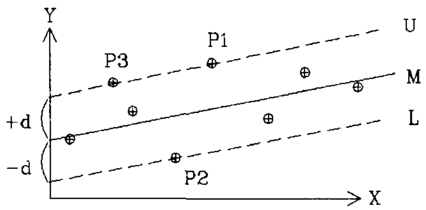
(a,b) : Circle center coordinate (x,y)
BW : Bandwidth
C : Eccentricity
i,j,k : Index for selecting 3 points, Iteration count
g : Index for increasing 'n' group in series
LSL : Least Squares Limacon
m : BW index
MZC : Minimum Zone circle
N : Number of measuring points
R : Circle radius
Rmax : Maximum circumscribe radius
Rmin : Minimum inscribe radius
P(xi,yi) : Circular measuring coordinate

* 충북대학교 기계공학부
** NC 공작기계협회

1. 서론

계측기를 사용하여 얻은 측정값은 통상 측정기의 off-set 또는 바닥면 기울기 등 외부 요인에 기인하는 측정 환경 정보를 포함한다. 따라서 이들로부터 정확한 측정값을 얻기 위해서는 측정당시의 기준(reference) 또는 datum을 설정하여 측정값으로부터 제하고 정확한 측정데이타를 구할 필요가 있다. 불연속 데이터로부터 연속적인 datum, 즉 모든 데이터를 대표하는 근사함수를 구하는 일반적인 방법으로 Least Squares method (최소자승법)가 알려져 있으며, 이것은 해석적으로 가능한 polynomial curve, 직선 및 평면 등의 경우 간단한 계산식에 의해 쉽게 풀려진다. 최소 자승법은 데이터와 근사함수와의 차이의 제곱이 최소가

되도록 임의 근사함수를 구하는 방법이며 이 경우 잘못된 또는 이상적으로 큰 데이터의 비중이 월등하게 증가하게 되는 단점이 존재한다. 실제적으로는 측정된 데이터가 모두 정확할 경우 데이터 모두를 같은 비중으로 하여 datum 을 구하는 Minimum Zone method (최소 간격법)을 적용해야 할 경우가 있으며, 수치해석 기준에서 권고사항으로 규정하고 있다[1]. 최소 간격법은 과거에는 도식적인 방법으로 그래프 용지로 구하였으나[2] 최근에는 iteration 방법에 의한 컴퓨터 알고리즘을 사용하여 직선 및 평면 등의 경우 최소 간격법으로 datum 을 구하는 방법들이 알려져 있다[3].



U : Upper line, Y=aX+b1
M : Minimum zone line, Y=aX+(b1+b2)/2
L : Lower line, Y=aX+b2

Fig. 1 Definition of the Minimum Zone for an average line

Fig.1 은 직선의 경우 최소 간격법 정의에 의한 기준선을 구하는 방법을 보여주고 있다. 즉, 모든 측정데이타를 포함하는 2 개의 직선 (U, L)사이의 간격 (2d)가 최소로 되는 기준선 M 이 최소 간격법에 의한 평균선 (Minimum Zone line)이 된다. 이때 아래쪽 직선(L)을 결정하는 점 P2 는 반드시 위쪽 직선(U) 상의 점 P1,P3 의 사이에 있게 된다[3]. 원(circle) 측정 데이터로부터 기준원을 구하는 방법은 Cox 등이[4,5] 일반적인 기하학적 방법을 연구하였으며, 최소 자승법으로는 쉽게 해석적인 답을 구할 수 없다. 따라서 이러한 목적으로 현재 Least Squares Limacon (LSL) 근사법이 알려져 있으나[6,7], 최소 간격법으로 원에 대한 기준을 구하는 알고리즘은 알려져 있지않다.

본 연구에서는 원 측정 데이터로부터 최소간격에 의한 기준원 (MZC, Minimum Zone circle)을 구하는 컴퓨터 알고리즘을 제안하고, 본 연구 결과로 제안된 MZC 알고리즘을 적용하여, 측정 데이터로부터 기존의 LSL 방법 및 Chrystal-Peirce 알고리즘[8]에 의한 결과와 비교하였다.

2. 기준원 계산

2.1 최소 자승법 (Least Squares method)

최소 자승법에 의하여 기준원을 구하는 일반적인 방법을 적용하면, 먼저 원형의 불연속 측정 데이터로부터 요구되는 기준원은 중심(a,b) 반경 (R)로 하면 다음과 같이 된다.

$$R^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 \tag{1}$$

또한 임의 측정점(x_i,y_i)에서 중심까지의 거리를 R_i로 하면 최소 자승값 q 는, n 개의 측정 데이터에 대하여

$$q = \sum_i^n (R - R_i)^2, \quad where\ R_i^2 = x_i^{\ 2} + y_i^{\ 2} \tag{2}$$

과 같이 되고, 여기서 q 를 최소로하는 미지수 a, b, R 의 값을 구하기 위하여 q 에 대한 편미분은 다음과 같이 된다.

$$\frac{\partial q}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial R} = 0 \tag{3}$$

식(3)은 각각의 변수에 대한 2 차식의 형태로서 쉽게 풀리지 않으며, 특별한 방법이 요구된다. 최소자승원(Least Squares circle) 계산을 위하여 몇 개의 변수를 임의 다른 변수로 대치하여 식(3)을 각 변수에 대한 1 차식으로 변환하여 해를 구하는 방법

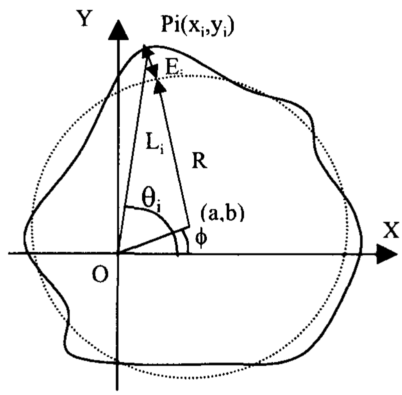


Fig. 2 Coordinate for the calculation of Least Squares Limacon

이 있지만[5], 일반적으로는 최소자승 리마콘 근사법(Least Squares Limacon)이 기준원을 구하는 근사적인 방법으로 사용된다. 최소자승 리마콘법은 먼저 Fig 2 와 같이 측정데이타 Pi(xi,yi)에 의한 평균원의 중심이 (a,b)로 되는 좌표계를 설정하고, 측정좌표 O 에서의 편심량 C 는 평균원의 중심으로부터 측정점까지의 거리 R 에 비하여 충분히 작다고 가정한다. 이 방법의 또 다른 필수적인 가정은 각 데이터는 측정 중심에 대하여 모두 등각으로 구분되어야 한다는 것이다. Fig 2 에서 임의 측정점 Pi 에서의 거리 Li 는

$$L_i = C\cdot\cos(\theta-\phi)+\sqrt{(R+E_i)^2 - C^2\cdot\sin^2(\theta-\phi)} \tag{4}$$

과 같이 되고 Limacon 법의 가정으로 R>>C 로 하면 위 식을 아래와 같이 정리 된다.

$$E_i = L_i - C\cdot\cos(\theta-\phi) - R \tag{5}$$

따라서 최소자승원 조건으로 평균원에 요구되는 미지수 R, C, ϕ를 근사적인 방법으로 사용된다. 따라서 최소 자승원 구하기 위하여 식(5)의 각 변수에 대한 편미분을 구하면,

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(\sum_1^n E_i^2\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial C}\left(\sum_1^n E_i^2\right)=0,\ \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sum_1^n E_i^2\right)=0 \tag{6}$$

과 같이 되고, 윗 식의 해를 구하여 평균원의 반경 R 및 중심좌표(a,b)를 구하면 다음과 같이 된다.

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i$$
$$a=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i\cdot\cos\theta_i=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$
$$b=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i\cdot\sin\theta_i=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \tag{7}$$

식(7)의 평균 R 의 유도과정 식(8)에서 각 측정값이 등각이라는 가정에서 즉, θ_i = 360/n 로 되어 $\Sigma[\cos(\theta_i-\phi)]$항의 값이 중심점에 대하여 서로 대칭으로 되어 Σ의 과정에서 상쇄되어 소거된다.

$$R=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{C\cdot\cos(\theta_i-\phi)\} \tag{8}$$

즉 Limacon 근사법에서 등각의 가정으로 식(8)의 2 번째 항의 값만큼 오차가 있고, 이것은 Fig.2 에서 중심(a,b)와의 편심량 C 의 각 데이터에 대한 반경 L 의 cosine 의 평균값에 해당된다. 일반적으로 편심량 C 는 적은 값이며 또한 360°로 합산하여 평균하면 더욱 적은 값으로 된다.

2.2 Chrystal-Peirce 방법

기준원을 구하는 해석적인 방법으로 Chrystal-Peirce 알고리즘이 알려져 있으며[8], 본 연구에서 제안된 최소간격법과의 비교를 위하여 사용된 단계적인 순서는 다음과 같다.

Step-0 : 데이타 S 의 두 점 A, B 를 지나고, S 를 포함하는 원을 그린다 (원의 중심을 P1, S1={A,B}, i = iteration count).

Step-1 : S - S_i에서 모든 D 에 관하여 각 ADB 가 최소가 되는 C 를 구하고, 만약 ACB 가 둔각이면, iteration 을 중지하고 이때 최소원은 직경을 AB 로하고 중심은 AB/2= Mab 가 된다.

Step-2 : 점 A, B, C 를 지나는 새 원의 중심을 그리고, 만약 삼각형 ABC 가 둔각이 아니면 iteration 을 중지한다. 그렇지 않으면, Si 에서 둔각을 가지는 점을 제거하고, 남은 점을 A, B 로 하고, i=i+1, Step-1 을 반복 한다.

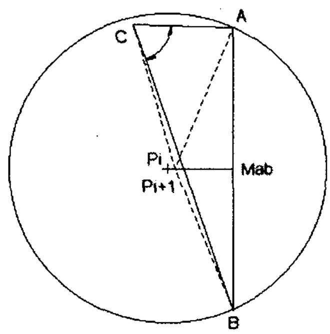


Fig. 3 Definition of Chrystal-Peirce circle algorithm

3. 최소 간격법 (Minimum Zone circle)

3.1 Minimum Zone 알고리즘

Minimum Zone 의 정의는 구하고자 하는 기준값으로 부터의 가장 멀리 떨어진 두점(+, -)와의 편

차가 최소로 되도록 기준 즉 datum 을 설정하는 것이다 (Fig.1). 기준원에 대해서는 편차 즉, |Rmax – Rmin| = bandwidth 의 값의 최종 결과 값, 즉 최대편차를 진원도(roundness)로 정의 한다. 따라서 Minimum Zone 의 정의에 의한 기준원의 경우 다음 두 가지 알고리즘이 존재한다.

Algorithm-1 :
접근방법은 최소외접원 → 최대내접원 →진원도 계산의 순서로, 다음과 같은 Steps 으로 이루어 진다.
Step-1 : 측정점을 좌표값 P(x,y)으로 변환.
Step-2 : 임의 3 점으로부터 각기 다른 3 점으로 이루어지는 중심점 (xc, yc)와 반경 R 계산.
Step-3 : (xc, yc)와 R 로 이루어지는 원이 최소외접원 반경(Rmin) 즉, 최소 반경이 아니면 Step-2 로.
Step-4 : Rmin 에서 (xc, yc)를 중심으로 동심(Concentric)이 되는 최대내접원 반경(Rmax) 설정.
Step-5 : |Rmax – Rmin| = bandwidth
Step-6 : 모든 점을 Step-2 방법으로 선택하여 평가.
Step-7 : Step-6 에서 구한 bandwidth 들 중에서 최소값이 측정원의 진원도 (roundness)가 된다.
Algorithm-2 :
접근방법은 최대내접원 → 최소외접원 →진원도의 순서로 되지만 기본적으로 Algorithm-2 와 같으며, Step-4 에서 최대내접원(Rmin)과 Step-5 에서 최소외접원(Rmax)를 적용하여 최소의 bandwidth 로 되는 진원도를 구한다.

각 알고리즘에서 사용된 기본 식은 Fig.5 와 같이 3 점 $P_0(x_0,y_0)$, $P_1(x_1,y_1)$, P_2 (x_2,y_2)로 구성되는원에서의 두 직선 Y_{01}, Y_{12}에서의 수직선 Y'_{01}, Y'_{12}을 구하면 다음과 같이 되고,

$$Y'_{01} - \frac{y_0 + y_1}{2} = -\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}\left(X_{01} - \frac{x_0 + x_1}{2}\right) \quad (9)$$

$$Y'_{12} - \frac{y_1 + y_2}{2} = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\left(X_{12} - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad (10)$$

이 두 직선은 기하학적으로 3 점으로 이루어지는 원의 중심 (xc, yc)을 지나게 된다.

Algorithm-1 과 Algorithm-2 를 통해 얻은 진원도는 서로 차이가 나게 되고, 이중 최소값을 원측정데이타의 진원도로 결정한다.

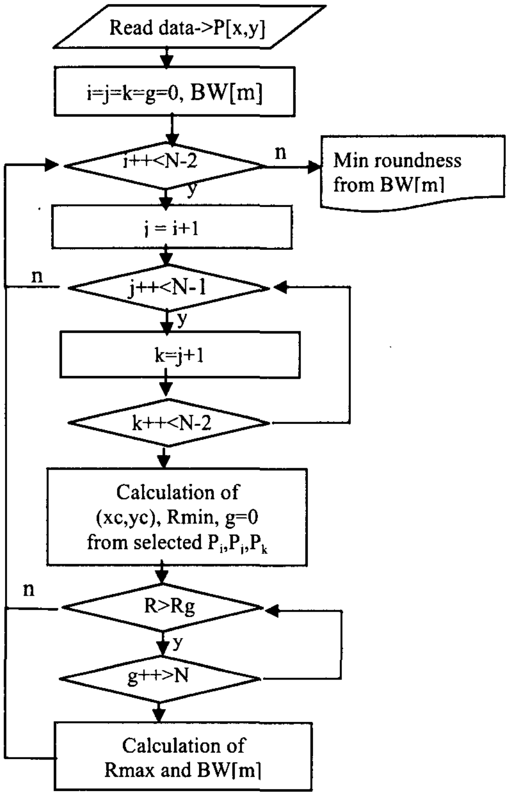


Fig. 4 Algorithm-1 for the Minimum Zone circle

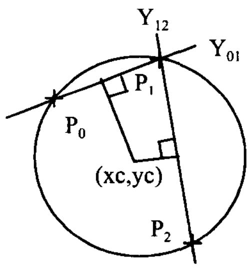


Fig. 5 Condition for constructing a circle using three points

3.2 계산 결과 및 분석

전술한 Minimum Zone circle 알고리즘 적용을 위하여 Fig.6 은 3 차원좌표측정기(CMM, coordinate measuring machine)을 이용하여 실제 측정데이타를 얻는 예를 보여준다. 그림에서는 직경이 알려진 표준구(Master ball)로부터 원주상의 점들을 구의 중심에 대한 등간격으로 측정한다. 측정시 CMM

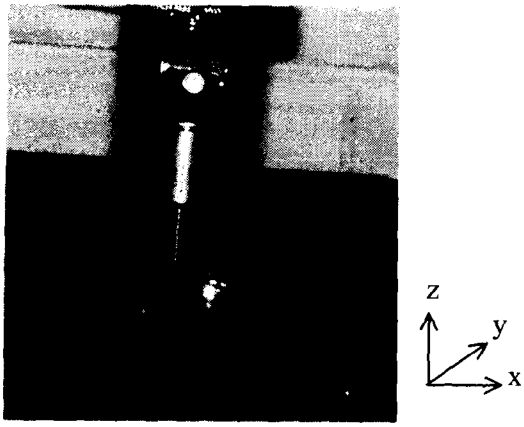


Fig. 6 Master ball data measurement using a CMM and touch probe

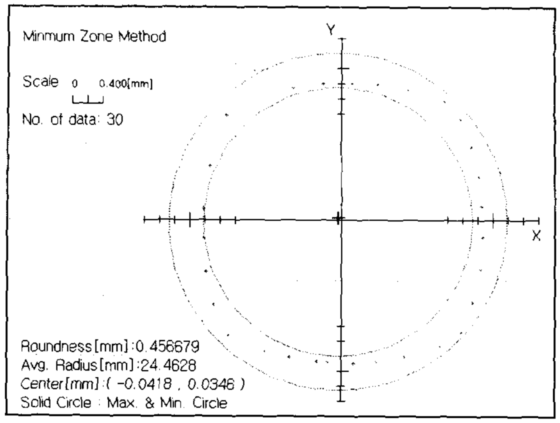
의 Z 축 방향을 고정하고 수평방향 즉 X,Y 평면상에서 측정 Probe 를 이동시킨다. CMM 의 분해능은 0.5 ㎛이고, 구의 주위로 60 개의 점 데이타를 얻었다. 사용된 표준구의 직경은 31.689 ㎜, 진구도는 0.1 ㎛이하이다.

Fig.7 은 원형 가공물의 CMM 측정 데이터(Data 'A'), CMM 에서 2 차원 정밀구 측정 데이터(Data 'B') 및 CNC 밀링머신에서 공구의 원형 운동(contouring) 위치 측정 데이터 (Data 'C') 등에 대하여 Minimum Zone 알고리즘으로 기준원에 대한 진원도를 계산하여 비교 한 것이다. 이들 결과를 종합하여 Table 1 과 같이 정리하였으며, Minimum Zone 방법으로 계산된 기준원에 대하여 진원도가 Limacon 근사법 및 Chrystal-Peirce 알고리즘에 의한 결과에 비하여 적게 계산 되었음을 보이며,

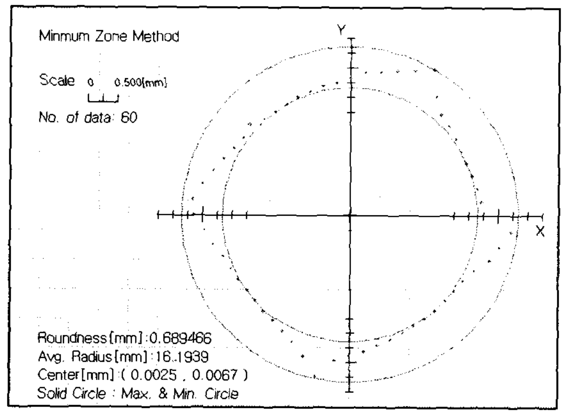
Table 1 Roundness calculation comparison using the different data set and algorithm (Calculated in 486 PC)

Roundness unit : mm

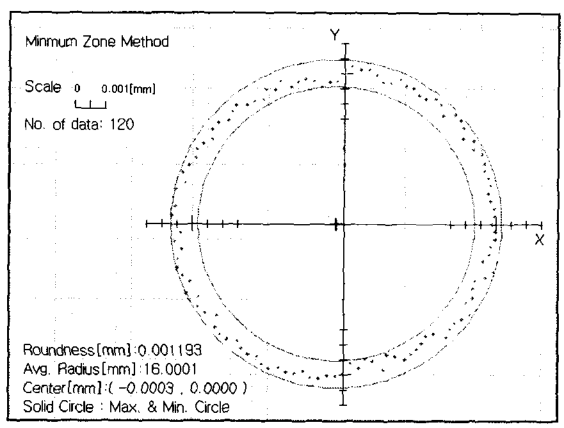
Method / Data	L. S. Limacon	Chrystal-Peire	Minimum Zone
Data 'A' No of data 30 Calculation time	8.349151 0.9 msec	0.499100 55 msec	0.456679 4 sec
Data 'B' No of data 60 Calculation time	0.694921 1.6 msec	0.762308 55 msec	0.689466 8 sec
Data 'C' No of data 120 Calculation time	0.001208 2.9 msec	0.001258 55 msec	0.001193 95 sec



(a) Data 'A' (Number of data 30)



(b) Data 'B' (Number of data 60)



(c) Data 'C' (Number of data 120)

Fig. 7 Roundness calculation for the different measured circle data using the Minimum Zone method

이것은 본 연구에서 제시된 Minimum Zone 알고리즘이 타당하다는 것을 보여 준다. 각 방법간의 계산 시간 비교를 위하여 486 PC 상에서 수행하고 결과를 Table 1 에 표시하였다. 평균원 datum 으로부터 진원도의 계산은 정확도의 관점에서, 계산시간을 효율적인 방법의 관점에서 비교된 것이다. Data 'C'의 경우 Pentium PC (333MHz)에서 MZM 에 의한 진원도 계산은 약 6 sec 가 소요되었다.

4. 결 론

측정 데이타로부터 기준원을 구하는 방법으로 본 연구에서 제시된 수치해석 방법에 의한 Minimum Zone 알고리즘은 기존의 Limacon 근사법 및 Chrystal-Peire 방법 등에 비하여 진원도(roundness)가 적은 것으로 되어 본 방법에 대한 타당성을 증명하였다.

본 연구의 알고리즘은 기존의 Limacon 근사법의 2 가지 필수적인 가정 (1.측정좌표 중심에 대한 평균원 중심의 편심량은 측정점까지의 거리에 비하여 충분히 작다. 2. 측정데이터는 중심에 대하여 모두 등각으로 되어야 한다.)이 필요한 단점을 해결하였다. Minimum Zone 계산을 위한 iteration 계산시간은 최신 PC 를 사용하여 수백개의 데이터에서 수초이내로 계산 될 수 있는 것으로 나타났다. 본 연구의 Minimum Zone 알고리즘은, 다른 기준원 계산 알고리즘의 평가방법으로 사용될 수 있을 것이며, 또한 진원도 이외 정밀한 평면도(flatness) 및 진구도(sphericity) 구하는 알고리즘으로 확대 될 수 있을 것이다.

참고문헌

1. British Standard BS 7172 : Assessment of position, size and departure for nominal of geometric feature, 1989.
2. A.T.Scarr, "Use of the Least Squares line and plane in the measurement of straightness and flatness," Proc. Inst. Mech. Engrs. Vol. 182 Pt. 1, No. 23, pp. 531-536, 1968.
3. E.S.Lee, "Z-approaching minimum zone method for flatness and straightness error measurement," IJSME, Vol. 39 No. 3, pp. 667-670, 1996.
4. M.G.Cox and P.M.Harris, "Assessing fundamental geometric form from measured coordinate data," MATADOR Conference, U.K. pp. 655-662, 1992.
5. 이일환, 박희재, "비젼을 이용한 기어 측정 시스템 개발," 정밀공학회 추계발표, pp. 485-489, 1996.
6. R.E.Reason, "Report on the measurement of roundness," A.R.C.S. pp. 116-119, 1966.
7. D.G.Chetwynd and P.H.Phillipson, "An investigation of reference criteria used in roundness measurement," The Institute of Physics, pp. 531-538, 1980.
8. Donald W. Hearn etc., "Efficient algorithm for the (Weighted) Minimum circle problem," Operational Research, Vol. 30, No. 4, 1982.