

## 다양한 곡률을 가진 공기 동압 베어링의 축방향 부하특성 해석

최우천\*, 신용호\*\*, 최정환\*\*\*

### Analysis of Axial Load Characteristics of Air-Dynamic Bearings of Various Curvatures

Woo Chun Choi\*, Yong Ho Shin\*\*, and Jung Hwan Choi\*\*\*

#### ABSTRACT

Air-dynamic bearings are increasingly used in supporting small high-speed rotating bodies. This study investigates the effects of design parameters on the axial stiffness of spiral-grooved air bearings of various curvatures. Design parameters are fundamental clearance, groove depth, and bearing number. The pressure distribution at the clearance between the stator and rotor of the bearing is obtained by solving the Reynolds equation, and the supporting load and the axial linear stiffness are calculated from the pressure distribution. It is found that a larger curvature increases the axial linear stiffness more and that there exist an optimal groove depth for the linear stiffness of the air bearing. It is also found that the linear stiffness has a linear relationship with the bearing number.

**Key Words** : Air Dynamic Bearing (공기 동압 베어링), Curvature (곡률), Axial Load (축방향 부하), Linear Stiffness (선형부 강성), Spiral Groove (나선 홈), Fundamental Clearance (기본간극), Groove Depth (홈깊이), Bearing Number (베어링수),

#### 1. 서론

고속 경량 회전체의 지지에 쓰이는 공기 동압 베어링은 컴퓨터와 멀티미디어 산업의 발전에 따라 레이저 프린터, 스캐너 등에서 기계식 볼베어링을 주차로 대체하여 쓰이는 추세이다. 기계식 베어링은 접촉식이기 때문에 소음과 마찰열로 인해 10,000rpm 이상의 고속회전에는 적합하지 않다. 이

에 반해 공기 동압 베어링은 공기층이 베어링 고정자와 회전자 사이에 존재하므로 기계식 베어링에서의 결점이 거의 문제가 되지 않는다. 또한, 고속회전이 가능하고 공기 정압 베어링과 달리 별도의 가압장치가 필요하지 않아서 저렴하므로, 운전 초기 회전자와 고정자의 고체 접촉 등의 문제점이 보완

\* 고려대학교 기계공학과

\*\* 고려대학교 기계공학과 대학원

\*\*\* 현대자동차

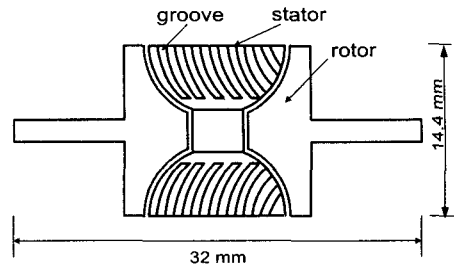
된다면, 앞으로 점차 많은 장치에 적용될 것으로 예상된다. 공기 베어링의 해석에 관련된 연구는 많이 보고되지 않은 편이다. Saito 등<sup>(1)</sup>은 공기 유통 나선 홈 반구형 베어링의 부하하중과 축방향 강성의 관계 및 진동특성에 관해 연구하였고, Czywewski와 Titus<sup>(2)</sup>는 편심된 유한한 길이의 공기 동압 저널베어링의 압력분포와 성능에 대한 연구를 수행하였다. Bootsma<sup>(3)</sup>는 나선형 홈을 가진 반구형 및 원추형 베어링의 압력분포에 관해 연구하였고, Kawabata 등<sup>(4)</sup>은 나선 홈을 가진 헤링본 무너 저널 베어링의 펌핑 효과를 연구하였다. Murata 등<sup>(5)</sup>은 편심된 나선 홈 반구형 베어링에 대해 평면 해석 이론을 적용하여 베어링의 여러 제작 조건이 부하하중에 미치는 영향을 고려하였다.

본 연구에서는 나선 홈을 갖는 공기 동압 베어링을 대상으로 하여 다양한 곡률을 가진 베어링 형상에 대해 여러 가지 설계변수가 베어링 축방향 부하하중과 선형부 강성에 미치는 영향을 수치해석적인 방법으로 연구한다. 반구형이나 원추형 공기 베어링에 대한 연구는 간헐적으로 있었으나, 다양한 곡률에 대한 것으로는 본 연구가 처음이다. 공기 동압 베어링에서 회전자와 고정자 사이에 있는 공기층의 압력분포를 구하면, 이로부터 베어링이 회전자에 가하는 힘(부하하중), 공기층의 강성 등을 구할 수 있다. 이러한 수치해석 결과를 이용하면, 설계 변수의 성능에 대한 영향을 알 수 있으므로, 실제로 베어링을 제작하기 전에 최적 성능을 갖게 하는 베어링의 조건을 파악할 수 있다.

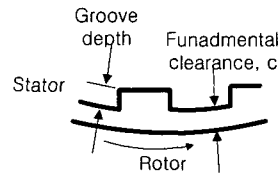
## 2. 공기 동압 베어링

본 연구에서는 나선 홈을 갖는 자체부상식 공기 동압 베어링이 해석 대상이다. 반구형 베어링의 개략도가 Fig. 1에 나타나 있다. 공기 동압 베어링에서는 회전체가 회전함에 따라 외부 공기가 고정자에 있는 홈으로 유입되어, 고정자와 회전자 사이의 틈새에서 압력이 증가하고 압력차에 의해 발생한 힘이 회전자를 부상시킨다.

지금까지 다루어진 베어링의 형상은 주로 반구형이나 원추형이었다. 본 연구에서는 다양한 베어링 형상을 고려한다. 이를 위하여 공기 동압 베어링에서의 고정자 베어링 면의 곡률( $\chi$ )을 곡률반경( $\rho$ )의 역수로 Fig. 2에서와 같이 정의한다.



(a) Stator and rotor



(b) Groove depth and fundamental clearance

Fig. 1 Schematic of a semi-spherical spiral-grooved air bearing.

이 그림에서 볼 수 있듯이 베어링 면의 곡률은 베어링 면이 반구형과 같이 볼록한 경우 양의 값을 갖고, 원추형인 경우 0이며, 오목한 경우 음의 값을 갖는다. 이러한 다양한 곡률을 가진 베어링 형상에 대해 설계변수가 베어링의 축방향 부하특성에 미치는 영향을 연구하고자 한다.

설계변수로 회전자와 고정자 사이의 기본간극(fundamental clearance), 고정자 표면에 가공된 홈의 깊이(groove depth)와 베어링수(bearing number)를 선정하였다. 기본간극은 회전자가 편심되지 않은 위치에 있을 때, 회전자와 고정자 사이의 틈새를 의미한다. 베어링의 성능으로는 여러 가지를 고려할 수 있으나, 본 연구에서는 축방향의 부하하중과 선형부 강성을 선정하였다. 축방향은 Fig. 2에서의 중심선 방향이다. 각 설계변수의 기본값은 아래와 같이 선정하였다.

- 기본간극 :  $c = 4 \mu\text{m}$
- 홈깊이 :  $\Delta G = 4 \mu\text{m}$
- 베어링수 :  $\Lambda = 6 \frac{\mu\omega}{p_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2 = 4.789$

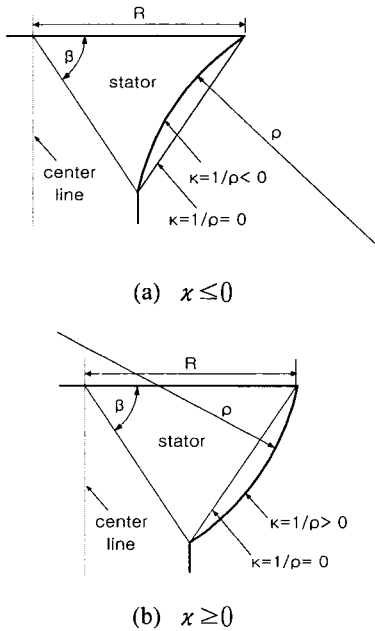


Fig. 2 Definition of the curvature(  $\chi$  ) of the bearing.

베어링수에서,  $\mu$ ,  $\omega$ ,  $p_a$ 와  $R$ 은 각각 공기의 점도, 회전각속도, 대기압, 베어링 최대 반경으로 다음의 값을 갖는다.

$\mu=1.789 \times 10^{-5}$  Ns/m<sup>2</sup>,  $\omega=18,000$ rpm = 1885 rad/s,  $p_a=1.015 \times 10^5$  Pa,  $R=6.2 \times 10^{-3}$  m

고정자의 형상에 관계된 타 변수들은 다음과 같이 설정하였다.

- 홈각도(groove angle,  $\alpha$ ) : 60°
- 홈갯수 : 10
- 홈/랜드 비(groove/land ratio) : 1/2

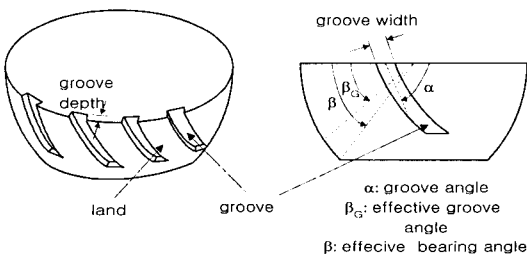


Fig. 3 Parameters related to the air bearing stator.

- 유효 홈각도(effective groove angle,  $\beta_G$ ) : 52°
- 유효 베어링 각도(effective bearing angle,  $\beta$ ): 58°

위의 변수들은 반구형 베어링에 대해 Fig. 3에 개략적으로 나타나 있다. 다른 곡률을 가진 베어링에 대해서도 이 변수들은 반구형에서와 유사하게 설정하였다. 어떤 설계변수의 성능에 대한 영향을 고찰할 때, 다른 변수는 기본값으로 설정하고 해당 변수만을 변화시켰다.

### 3. 기본 이론

공기 베어링의 간극에서의 압력분포를 구하기 위해, 레이놀즈 방정식(Reynolds equation)을 지배방정식으로 이용한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \rho h^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6\mu \left\{ \frac{\partial(\rho U h)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho V h)}{\partial y} + 2 \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} \right\} \quad (1)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도,  $h$ 는 간극,  $p$ 는 압력,  $\mu$ 는 점도,  $U, V$ 는 각각  $x$  및  $y$  방향의 속도,  $t$ 는 시간이다. 공기 베어링의 경우, 공기의 밀도가 압력에 비례하므로 식 (1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 12\mu \left\{ U \frac{\partial(p h)}{\partial x} + V \frac{\partial(p h)}{\partial y} + 2 \frac{\partial(p h)}{\partial t} \right\} \quad (2)$$

Fig. 4(a)에는 여러 곡률을 가진 상부 고정자가 나타나 있다. 이 그림에서  $x$ 는 공기 유입구로부터 아래 방향으로 고정자 면을 따라 설정된 좌표이고,  $y$ 는 원주를 따라 설정된 좌표이다. 이 좌표계에서

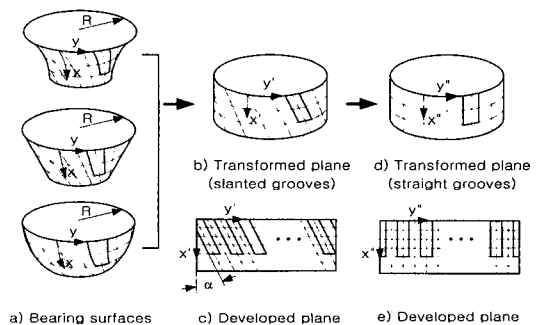


Fig. 4 Coordinate systems.

회전자 면에서의 선속도  $V$ 는  $x$ 만의 함수이며,  $x$ 방향으로는 베어링 회전자의 운동이 없으므로  $U=0$ 이 된다. 또한, 정상상태로 가정하여  $\partial/\partial t=0$ 이라 놓으면, 식 (2)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( h^3 \frac{\partial p^2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( h^3 \frac{\partial p^2}{\partial y} \right) = 12\mu V \frac{\partial (ph)}{\partial y} \quad (3)$$

고정자와 회전자 사이의 간극은 베어링의 반경에 비하여 무시할 수 있을 정도로 작으므로, 간극 내 공기의 유동은 평면 유동으로 볼 수 있다. 식 (3)은 베어링 면에 설정된 좌표계에 적용되는 식이나, 다양한 곡률을 가진 베어링에 대해 해를 구할 수 없다. 이를 해결하기 위해 좌표변환을 한다. Fig. 4(b)와 (d)는 변환된 좌표계를 보여준다. Fig. 4(a)의  $x$ - $y$ 좌표계는  $x$ 축을 따라  $y$ 의 값이 달라지는데 반해, Fig. 4(b)의  $x'$ - $y'$ 좌표계는  $x'$ 축에 따라  $y'$ 이 변하지 않는다.  $x'$ - $y'$ 좌표계에서 해를 구할 수 있으나, 여러 홈각도에 대해서 계산이 편리하도록 한 번 더 좌표 변환하여 홈이  $x''$ 에 평행한  $x''$ - $y''$ 좌표계를 만든다. Fig. 4(c)와 (e)는 각각 Fig. 4(b)와 4(d)의 원통면을 펼친 그림이다. 이 좌표계들의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial x} = J_1 \frac{\partial}{\partial x'} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = J_2 \frac{\partial}{\partial x''} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = J_1 J_2 \frac{\partial}{\partial x''} = J \frac{\partial}{\partial x''} \quad (6)$$

자코비안  $J_1, J_2, J$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{yR_1 r'(x)}{r^2(x)} \\ 0 & \frac{R_1}{r(x)} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \sec \alpha & 0 \\ \operatorname{cosec} \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

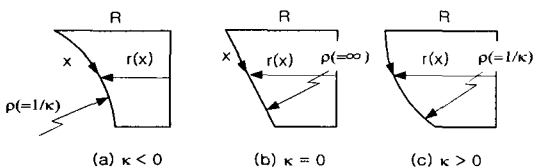


Fig. 5 Bearing stator cross-sections of various curvatures.

$$J = J_1 J_2 = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서  $r(x)$ 는 Fig. 5에 나타나 있다. 이 그림에서 알 수 있듯이,  $r(x)$ 는 베어링 면의 곡률에 따라 달라지며,  $y$ 에 무관하므로  $x$ 의 함수로 표시된다. 식 (3)을 좌표변환하면 다음의 식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \left( J_{11} \frac{\partial}{\partial x''} + J_{12} \frac{\partial}{\partial y''} \right) \left[ h^3 \left( J_{11} \frac{\partial p^2}{\partial x''} + J_{12} \frac{\partial p^2}{\partial y''} \right) \right] + \\ & \left( J_{21} \frac{\partial}{\partial x''} + J_{22} \frac{\partial}{\partial y''} \right) \left[ h^3 \left( J_{21} \frac{\partial p^2}{\partial x''} + J_{22} \frac{\partial p^2}{\partial y''} \right) \right] = \\ & 12\mu V \left( J_{21} \frac{\partial (ph)}{\partial x''} + J_{22} \frac{\partial (ph)}{\partial y''} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

Fig. 4(d) 혹은 4(e)의  $x''$ - $y''$ 좌표계에서 절점을 선정하고, 식 (10)의 해를 구한다.  $x''$ - $y''$  좌표계에서의 경계조건은 다음과 같다.

$$\bullet p(0, y'') = p_a \quad (11)$$

$$\bullet \partial p(x''_{\max}, y'') / \partial x'' = 0 \quad (12)$$

$$\bullet p(x'', 0) = p(x'', y''_{\max}) \quad (13)$$

식 (2)를 무차원화 하기 위해 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\bar{X} = x/R, \quad \bar{Y} = y/R, \quad \bar{P} = p/p_a, \quad \bar{H} = h/c,$$

$$\Lambda = 6 \frac{\mu \omega}{p_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2 \quad (14)$$

위의 무차원 변수를 식 (10)에 대입하여 식 (10)을 무차원화된 식으로 변환한다.

수치해석을 위해 무차원화된 식을 유한 차분법 (finite difference method)을 사용하여 대수식으로 변환한다. 유한 차분법에 의해 구한 대수식은 TDMA (TriDiagonal-Matrix Algorithm)와 circular TDMA를 사용하여 해를 구한다. 이와 같은 방법으로 압력분포를 구하고, 구한 압력을  $x$ - $y$  좌표계에서의 면적에 대해 적분하여 회전자에 가해지는 힘을 구하며, 힘과 변위의 관계로부터 베어링의 선형부 강성을 구한다.

본 연구에서 절점의 수는  $x'$  방향으로 31개,  $y'$  방향으로 181개를 선정하였다. 해석에서는 유한 차분법의 특성 상 홈과 랜드의 경계에서 기울기가 있는 것으로 고려되었다. 이로 인한 오차는 검토한 결과 미미한 것으로 나타났다.

#### 4. 해석 결과 및 고찰

본 연구에서 개발한 해석프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 해석 결과와 실험 결과를 비교하였다. Fig. 6은 반구형 베어링에 대해 축방향 부하 하중과 축방향 변위의 관계를 나타낸 것이다. 실험 결과는 해석조건과 유사한 치수와 형상을 갖는 두 개의 반구형 베어링을 대상으로 실험을 수행하여 구한 것이다. 실험에서는 전자력을 회전자에만 가한 후, 이에 따라 발생한 회전자의 변위를 측정하였고, 해석에서는 회전자를 일정한 변위로 이동시킨 후, 압력차에 의해 발생하는 반력을 구하였다. 이 그림에서 해석 결과와 실험 결과는 서로 잘 일치함을 볼 수 있다. 실험결과가 서로 차이는 것은 실험에 쓰인 베어링을 원하는 치수와 형상으로 매우 정밀하게 제작하는 것이 불가능하였기 때문이다. 그리고 이 그림에서 변위의 변화가 기본간극보다 큰 이유는 회전자의 자체 하중 때문에 회전자의 평형 위치가 하반구에 치우쳐 있고, 회전자에 위 방향으로 힘이 가해져 회전자가 움직이는 거리가 커지기 때문이다. 회전자의 변위에 대한 반력은 적은 변위에서는 선형적인 증가를 보이다가 변위가 커지면서 비선형적으로 증가한다. 선형부에서의 기울기를 본 연구에서는 선형부 강성이라 명명하고, 베어링의 강성을 대표하는 강성으로 취급한다. 공기 베어링에서는 회전자가 어떤 방향으로 이동하면, 반력이 반대 방향으로 작용하여 회전자를 원래의 위치로 이동시키는 복원력으로 작용한다. 이것은 공기베어링의 장점인 자기정렬(self-centering) 현

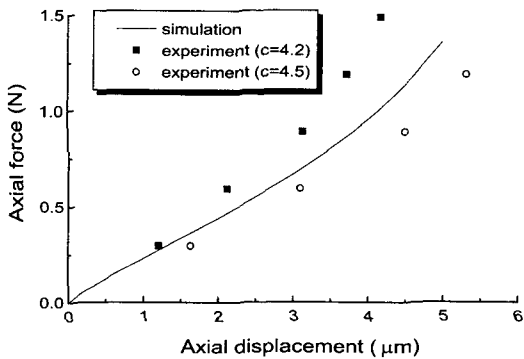
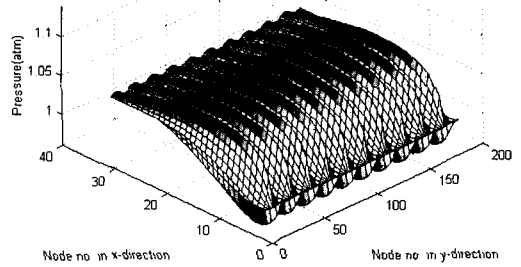
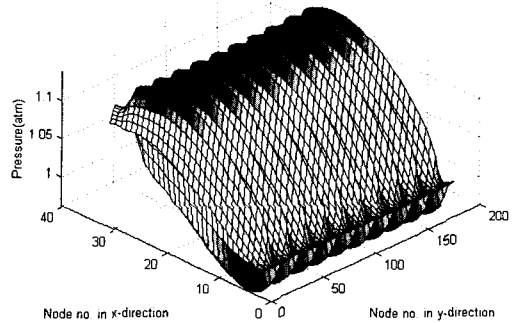


Fig. 6 Axial force vs. axial displacement for semi-spherical air bearings.



(a) Upper hemisphere.



(b) Lower hemisphere.

Fig. 7 Pressure distributions at (a) upper and (b) lower hemispheres.

상이며, 이로 인해 베어링은 평형 위치에서 안정적으로 작동할 수 있게 된다.

Fig. 7은 반구형 베어링에서 회전자가 중심위치에서 하반구 쪽으로 기본간극의 반에 해당하는 변위 만큼 이동될 때, 상반구와 하반구 베어링을 펼친 면에서 공기층의 압력분포를 보여준다. x와 y는 Fig. 4에 나타난 바와 같이 각각 고정자를 따라 입구에서 중심부로 향하는 좌표와 원주방향으로의 좌표이다. Fig. 7에서는 압력이 웨지 효과 때문에 홈부근에서 큰 것을 보여준다 (홈의 개수가 10개임을 알 수 있다). 그리고 하반구에서의 압력이 상반구에서의 압력보다 큰 것을 볼 수 있고, 이 압력차에 의해 힘이 위 방향으로 발생하여 회전자의 무게를 지지한다.

Fig. 8에는 곡률에 따른 축방향 지지하중과 축방향 변위의 관계가 나타나 있다. 이 그림에서 축

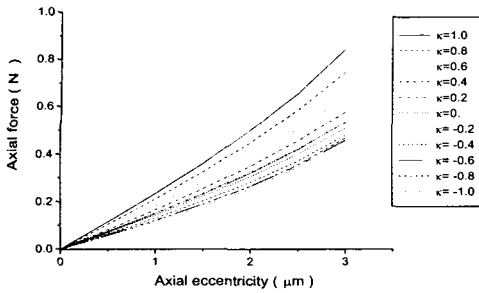


Fig. 8 Axial force vs. axial displacement for various curvatures.

방향 지지하중은 곡률이 클수록 크게 나타났다. 이것은 두가지 원인으로 설명할 수 있다. 첫 번째는 곡률이 감소함에 따라 베어링의 평균 회전반경이 줄어서 회전자 표면에서의 선속도가 감소하기 때문이다. 두 번째는, Fig. 7에 나타난 하반구에서의 압력분포는 큰  $x$  값(절점 30번 부근)에서 크게 나타나는데, 이 위치에서 압력에 의해 발생하는 힘이 곡률이 클수록 반경방향보다는 축방향으로 작용하고 곡률이 작아지면 주로 반경방향으로 작용하기 때문이다. 따라서 곡률이 작은 베어링은 축방향보다는 반경방향의 하중을 지지하는 장치에 적용되는 것이 바람직하다고 여겨진다.

공기 베어링의 강성을 대표하는 것으로 선형부 강성을 사용하였다. 축방향 선형부 강성은 회전자가 기본간극의 1/2만큼 축방향으로 편심되었을 때 힘-변위 곡선의 기울기로 정의하였다. Fig. 6에서 나타난 바와 같이 편심량이 크지 않을 때는 힘-변위가 선형적임을 알 수 있고, 이 기울기가 선형부 강성이다. Fig. 9에 기본간극의 축방향 선형부 강성에 대한 영향이 나타나 있다. 이 그림에서 기본간극이 작아질수록 선형부 강성은 급격하게 증가하는 것을 볼 수 있다. 그러나 기본간극을 감소시키는 것은 베어링 및 회전자의 제작비용을 상승시키게 되므로 지나치게 적은 기본간극은 비실용적이라 할 수 있다.

공기 베어링에서는 베어링 표면에 있는 홈에서의 웨지 효과(wedge effect)에 의해서 압력이 커지고, 이 때문에 반력이 발생하므로 홈깊이가 중요하다. Fig. 10에서는 홈의 깊이의 영향을 살펴보았다. 이 그림에서 선형부 강성을 최대화 하는 최적의 홈

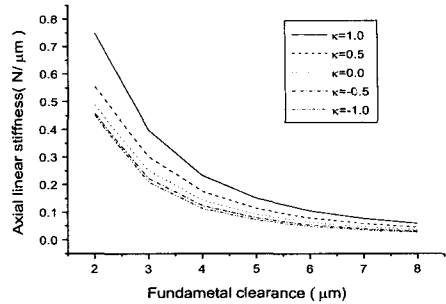


Fig. 9 Axial linear stiffness vs. fundamental clearance for various curvatures.

깊이가 존재함을 볼 수 있다. 이것은 홈깊이가 지나치게 적거나 크면, 웨지 효과가 덜 나타나기 때문이다. 그리고 최적의 홈깊이는 곡률( $\kappa$ )이 감소함에 따라 적어지는 것을 알 수 있다. 따라서 베어링의 형상에 따라 홈깊이를 적절하게 선택해야 한다.

베어링수는 해석을 위해 레이놀즈 방정식을 무차원화하는 과정에서 생긴 무차원 수이고,

$$6 \frac{\mu \omega}{P_a} \left( \frac{R}{c} \right)^2$$

으로 표현된다. Fig. 11에는 베어링수에 따른 축방향 선형부 강성의 변화가 나타나 있다. 이 그림에서 베어링수에 대한 축방향 선형부 강성은 거의 선형적인 비례관계를 갖는 것을 볼 수 있다. 따라서 회전속도가 증가하면 비례적으로 선형부 강성이 증가하고, 베어링 반경이나 기본간극의 역수가 증가하면 제곱으로 지지하중이나 선형부

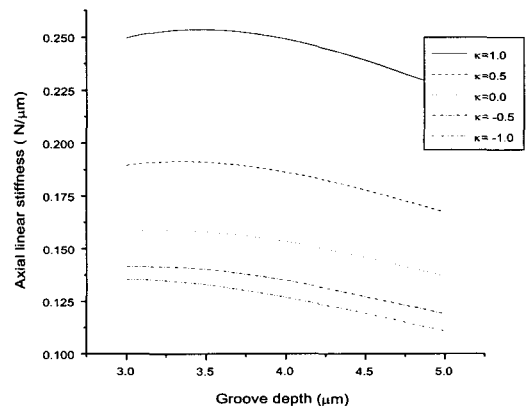


Fig. 10 Axial linear stiffness vs. groove depth for various curvatures.

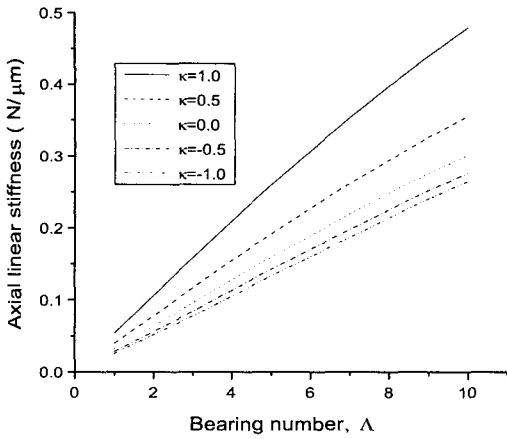


Fig. 11 Axial linear stiffness vs. bearing number for various curvatures.

강성이 증가하게 될 것이다. 그렇지만, 반경을 단순히 증가시키는 경우는, 베어링 반경의 세제곱으로 회전자의 부피와 무게가 증가하므로, 지지하중의 증가가 회전자의 무게의 증가를 따라가지 못할 수 있다. 이러한 경우에는 회전자의 무게를 줄이도록 설계할 필요가 있다. 그러나 반경이 큰 베어링에서 기본간극을 작은 값으로 유지하기 어렵다. 따라서 본 연구에 대상인 공기 동압 베어링은 소형 회전체의 지지에 적합하다고 할 수 있다.

### 5. 결론

본 연구에서는 여러 가지 곡률을 가진 나선 홈 공기 베어링에 대해 간극 내의 압력분포를 수치해석방법으로 구하고, 이로부터 부하하중과 베어링의 선형부 강성을 구하여, 몇 가지의 설계변수가 베어링의 축방향 부하하중과 선형부 강성에 미치는 영향을 연구하였다. 연구 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

- 베어링의 곡률이 커짐에 따라 베어링의 축방향 선형부 강성이 커진다.
- 간극이 작아지면, 축방향 부하와 선형부 강성은 급격히 증가한다.
- 베어링의 곡률이 커짐에 따라 베어링의 축방향 선형부 강성이 커진다.
- 강성을 최대로 하는 최적의 홈깊이가 존재하

며, 최적의 홈깊이는 곡률이 감소함에 따라 감소한다.

- 적은 곡률 혹은 음수의 곡률을 가진 베어링은 반경방향 부하를 지지하는데 적당하다.
- 베어링수가 증가하면 축방향 선형부 강성은 베어링수에 거의 선형적인 비례관계를 갖는다. 따라서 회전속도가 증가하면 비례적으로 선형부 강성이 증가하고, 베어링 반경이나 기본간극의 역수가 증가하면 선형부 강성이 제곱으로 증가한다.

### 후 기

본 연구는 1998년도 학술진흥재단(1998-001-E00284)의 지원에 의하여 연구되었으며 이에 감사드립니다.

### 참고문헌

1. Saito, Y., Makino, H., and Tamura, A., "Characteristics of gas-lubricated spherical spiral groove bearings," *Journal of JSLE*, vol. 28, no. 3, pp. 221-227, 1983.
2. Czyzewski, T., and Titus, P., "Analysis of an arbitrarily misaligned self-acting gas film journal bearing of finite length," *Wear*, Vol. 114, pp. 367-379, 1987.
3. Bootsma, J., "Spherical and conical spiral groove bearings," *ASME Journal of Lubrication Technology*, pp. 236-249, April 1975.
4. Kawabata, N., Ashino, I., Sekizawa, M., and Yamazaki, S., "Spiral grooved bearing utilizing the pumping effect of a herringbone journal bearing," *JSME International Journal*, Vol. 34, No. 3, pp. 411-418, 1991.
5. Murata, S., Miyake, Y., and Kawabata, N., "Exact two-dimensional theory of spherical spiral groove bearings," *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol. 102, 1980.