

# 비선형 천장 크레인시스템의 위치제어 알고리즘 개발

이종규\*, 이상룡\*\*

## Development of the Position Control Algorithm for Nonlinear Overhead Crane Systems

Jong Gyu Lee\*, Sang Ryong Lee\*\*

### ABSTRACT

An overhead crane system which transports an object by girder motion, trolley motion, and hoist motion becomes a nonlinear system because the length of a rope changes. To develop the position control algorithm for the nonlinear crane systems, we apply a nonlinear optimal control method which uses forward and backward difference methods and obtain optimal inputs. This method is suitable for the overhead crane system which is characterized by the differential equation of higher degree and swing motion. From the results of computer simulation, it is founded that the position of the overhead crane system is controlled, and the swing of the object is suppressed.

**Key Words** : Nonlinear Overhead Crane (비선형 천장크레인), Object Transportation State (화물운송상태), Nonlinear Optimal Control (비선형 최적제어), Two Point Boundary Problem (두점 경계치 문제)

### 1. 서론

거더, 트롤리, 호이스트운동으로 화물을 운송하는 크레인시스템은 거더모터의 운동으로 트롤리와 호이스트를 안내하는 거더가 이송운동하고, 트롤리 모터의 운동으로 호이스트를 안내하는 트롤리가 이송운동하고, 호이스트모터의 운동으로 호이스트에 장착된 줄이 상하운동하면서 줄에 연결된 화물을 운송한다.

따라서 크레인시스템의 운동방정식은 거더, 트롤리, 호이스트를 모터의 부하로 간주하여 유도되

는 모터의 운동방정식과 화물에서 발생하는 진자운동의 영향으로 유도되는 화물의 운동방정식으로 표현할 수 있다.<sup>(1)</sup> 유도된 크레인시스템의 방정식은 비선형방정식으로 표현되므로, 비선형시스템의 제어기법을 적용하여 크레인시스템을 제어할 수 있다.

비선형시스템의 제어기법은 주로 시스템의 동작점을 이용하여 유도된 선형모델에서 구한 궤환이득을 사용하여 시스템을 제어하는 것으로, Moustafa 등<sup>(2)</sup>은 비선형 크레인시스템을 모델링하면서 구동모터(가속·등속·감속 구간)의 동작점을

\* 대구효성가톨릭대학교, 기계·자동차공학부

\*\* 경북대학교 기계공학부

이용하여 유도된 선형모델의 진자각을 제어하였고, 이종규 등<sup>(3)</sup>은 선형모델을 이용하여 비선형 크레인 시스템의 진자각을 제어하였지만 위치제어를 하지 못하였다. 이러한 제어기법을 크레인시스템에 적용하면, 구동모터의 감속구간이 끝나는 시점에서 화물의 흔들림이 일정한 정상상태오차를 유지하는 단점을 가진다.

본 연구에서는 크레인의 위치 및 화물의 흔들림을 제어할 수 있는 비선형 최적제어방법을 적용한 크레인시스템의 위치제어 알고리즘을 제시한 뒤, 컴퓨터 시뮬레이션으로 이러한 알고리즘의 타당성을 검증하는 것이다.

## 2. 크레인시스템의 운동방정식

Fig. 1은 거더, 트롤리, 호이스트로 구성된 크레인시스템이 거더운동, 트롤리운동, 호이스트운동으로 줄에 연결된 화물을 운송하는 것을 보여준다.

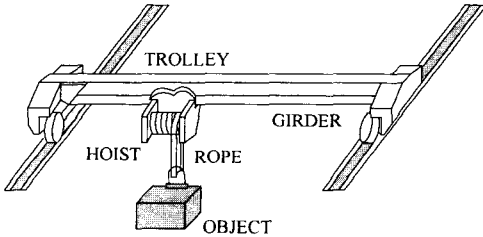


Fig. 1 Overhead crane system

이러한 크레인을 대상으로 한 크레인시스템의 운동방정식은 다음과 같이 모터의 운동방정식과 화물의 운동방정식으로 유도된다.<sup>(1)</sup>

$$\ddot{x} = \frac{r_t K_t}{\tau_t} v_t - \frac{1}{\tau_t} \dot{x} \quad (1)$$

$$\ddot{y} = \frac{r_g K_g}{\tau_g} v_g - \frac{1}{\tau_g} \dot{y} \quad (2)$$

$$\ddot{l} = \frac{r_h K_h}{\tau_h} v_h - \frac{1}{\tau_h} \dot{l} \quad (3)$$

$$\ddot{X} = -\frac{g(X-x)}{l} \quad (4)$$

$$\ddot{Y} = -\frac{g(Y-y)}{l} \quad (5)$$

여기서,  $r_t, r_g, r_h$ 는 각각 트롤리, 거더, 호이스트 모터 반지름,  $K_t, K_g, K_h$ 는 각각 트롤리, 거더, 호이스트 모터 이득상수,  $\tau_t, \tau_g, \tau_h$ 는 트롤리, 거더, 호이스트 모터 시상수,  $v_t, v_g, v_h$ 는 각각 트롤리, 거더, 호이스트 모터 전압,  $g$ 는 중력가속도,  $x, y, l$ 는 각각 트롤리, 거더, 줄의 위치,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{l}$ 는 트롤리, 거더, 줄의 속도,  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{l}$ 는 트롤리, 거더, 줄의 가속도,  $X, Y$ 는 화물의  $X, Y$  위치,  $\dot{X}, \dot{Y}$ 는 화물의  $X, Y$  가속도이다.

화물의 비틀림각  $\phi$ 과 흔들림각  $\theta$ 는 식 (1)~(5)에서 얻은 거더, 트롤리, 줄, 화물의 위치를 다음 식에 대입하여 얻는다.<sup>(1)</sup>

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{Y-y}{X-x} \right) \quad (6)$$

$$\theta = \sin^{-1} \left( \frac{X-x}{l \cos \phi} \right) \quad (7)$$

크레인시스템의 운동방정식은 다음과 같은 비선형 상태방정식으로 나타낼 수 있다.<sup>(4)</sup>

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{\tau_t} x_2 + \frac{r_t K_t}{\tau_t} u_1 \\ x_4 \\ -\frac{1}{\tau_g} x_4 + \frac{r_g K_g}{\tau_g} u_2 \\ x_6 \\ -\frac{g(x_5 - x_1)}{x_9} \\ x_8 \\ -\frac{g(x_7 - x_3)}{x_9} \\ x_{10} \\ -\frac{1}{\tau_h} x_{10} + \frac{r_h K_h}{\tau_h} u_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

여기서,  $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_{10}]^T$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$ 는 각 상태벡터, 제어벡터,  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}, x_3 = y, x_4 = \dot{y}, x_5 = X, x_6 = \dot{X}, x_7 = Y, x_8 = \dot{Y}, x_9 = l, x_{10} = \dot{l}$ ,  $u_1 = v_t, u_2 = v_g, u_3 = v_h$  이고, 시스템의 초기시간  $t_0$ 에서 초기상태  $x_0 = \mathbf{x}(t_0)$ 는 알려진다.

### 3. 크레인시스템의 위치제어 알고리즘

크레인시스템이 화물을 운송할 때, 화물운송상태는 거더, 트롤리, 줄, 화물이 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않고 원활하게 이송되면서 목표위치에 도달하고, 운송도중에 화물의 흔들림이 작아야 한다. 이러한 화물운송상태를 만족하는 시스템의 위치제어 알고리즘의 흐름도는 Fig. 2에서 보는 바와 같이 최적제어방법을 적용하여 구동모터의 최적 입력인 최적전압을 구한 다음 그 전압으로 시스템의 위치를 제어하는 것이다.

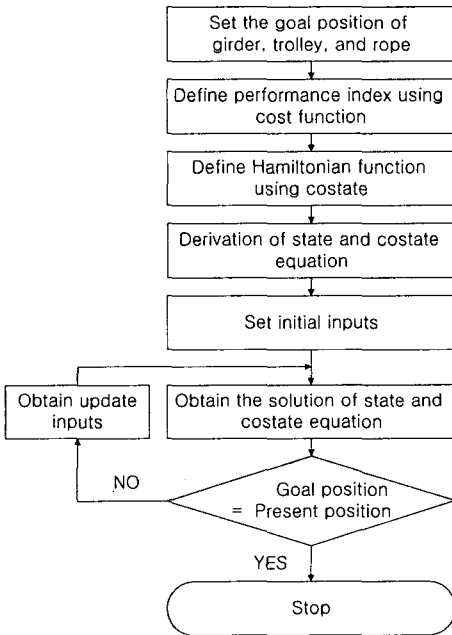


Fig. 2 Flow chart of the position control algorithm for overhead crane systems

최적제어방법에 이용되는 크레인시스템의 성능지수는 시간  $t_f$  에서 시스템의 최종상태와 목표상태의 오차로 정의되는 비용함수  $S$ 와 시스템의 과도상태와 제어영향을 나타내는 비용함수  $L$ 을 이용하여 다음과 같이 정의된다.

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} vS(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \frac{1}{2} wL(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt \quad (9)$$

여기서,  $v, w$ 는 가중치이고, 함수  $S, L$ 은 다음과 같이 나타낸다.

$$S = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_{10}^2 \quad (10)$$

$$L = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \quad (11)$$

여기서,  $e_i = x_{i_f} - x_{i_0}, i = 1, 2, \dots, 10$

식 (9)로 정의된 성능지수를 이용하는 최적제어방법<sup>(5)</sup>은 보완상태  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{10}]^T$  을 도입하여 다음과 같이 정의되는 Hamiltonian 함수  $H$ 를 이용하여 크레인시스템의 화물운송상태를 만족하는 최적입력을 구할 수 있다.

$$H = \lambda^T f - \frac{1}{2} wL \quad (12)$$

식 (12)은 보완상태를 이용하여 시스템의 비선형 상태방정식과  $L$  사이의 관계를 나타낸다. 그리고 부호를 -로 한 것은 시스템의 화물운송상태를 결정하는 입력의 탐색방향을 찾는 데 이용되는 경사도  $c$ 를 식 (15)과 같이 정의되는 편미분방정식을 이용하여 구할 수 있기 때문이다.<sup>(6)</sup>

식 (9), (12)를 이용하는 최적제어방법은  $t_f$  가 고정되면 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad (13)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad \lambda_f = -\frac{v}{2} \frac{dS}{d\mathbf{x}} \Big|_{t_f} \quad (14)$$

$$c = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \quad (15)$$

식 (13)은 상태방정식을 나타내며 크레인시스템의 비선형 상태방정식 (8)과 일치하고, 식 (14)은 보완상태방정식과 그 방정식의 최종상태  $\lambda_f$  을 나타낸다.

따라서 최적제어방법을 적용한 크레인시스템은 식 (13), (14)에서 보는 바와 같이 초기상태가 알려진 상태방정식과 최종상태가 알려진 보완상태방정식으로 이루어진 두 점 경계치 문제가 되고, 이러한 문제에서 상태방정식의 해는 시스템의 초기상태와 입력을 이용한 전향차분방법을 사용하여 구하고, 보완상태방정식의 해는 식 (14)에 주어진 최종

상태와 상태방정식의 해를 이용한 후향차분방법을 사용하여 구한다.<sup>(7)</sup>

두 점 경계치 문제에서 구한 크레인시스템의 상태 해가 화물운송상태를 만족하여야하고, 이러한 상태를 만족하는 최적입력인 구동모터의 최적전압은 최대전압  $u_{max}$  과 최소전압  $u_{min}$  을 설정하여 구할 수 있으므로, 최적입력은 다음과 같이 표현되는 식에서 얻어진다.

$$u_{i+1} = \begin{cases} u_{max} & u_i + a_i s_i \geq u_{max} \\ u_i + a_i s_i & u_{min} < u_i + a_i s_i < u_{max} \\ u_{min} & u_i + a_i s_i \leq u_{min} \end{cases} \quad (16)$$

여기서,  $u_i$  는 현재입력을 나타내고  $u_{i+1}$  는 현재입력보다 시스템이 목표위치에 더 접근하게 하는 새로운 입력을 나타낸다. 그리고  $a_i$ 는 현재입력이 탐색한 방향으로 이동할 수 있는 이동거리를 나타내고, 2차함수의 최소치를 구하는 이차보간법<sup>(8)</sup>을 이용하여 얻을 수 있고,  $s_i$ 는 현재의 탐색방향을 나타내며 식 (15)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$s_i = \begin{cases} -c_i \\ b_i s_{i-1} - c_i \end{cases} \quad (17)$$

여기서,  $b_i$ 는 탐색방향 계수를 나타내며 다음과 같이 얻을 수 있다.<sup>(9)</sup>

$$b_i = \begin{cases} I_1/I_2 & b_m < b_n \\ \gamma(I_1/I_3) & b_m < b_n \quad (0 < \gamma < 1) \\ 0 & I_2 = 0 \text{ or } I_3 = 0 \end{cases} \quad (18)$$

여기서,  $I_1, I_2, I_3$ 는  $u_{min} < u_i < u_{max}$ 를 만족할 때 정의되는 식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int J_{u_i}^T J_{u_i} dt \\ I_2 &= \int J_{u_{i-1}}^T J_{u_{i-1}} dt \\ I_3 &= \int J_{u_i}^T s_{i-1} dt \end{aligned} \quad (19)$$

이와 같이  $s_i$ 과  $a_i$ 가 결정되면, 크레인시스템의 현재위치를 목표위치에 접근시켜주는 새로운 입력  $u_{i+1}$ 을 얻을 수 있고, 이  $u_{i+1}$ 가 시스템의 화물운송

상태를 만족하면 최적입력에 해당된다.

Fig. 3은 크레인시스템의 위치제어 알고리즘을 블록선도로 나타낸 것으로 시스템의 목표상태  $x_d$ 를 만족할 수 있도록 상태방정식과 보완상태방정식을 이용하여 성능지수를 최소화 하는 최적입력  $u_d$ 를 구하고, 그 입력으로 시스템의 위치를 제어하는 것을 나타낸다.

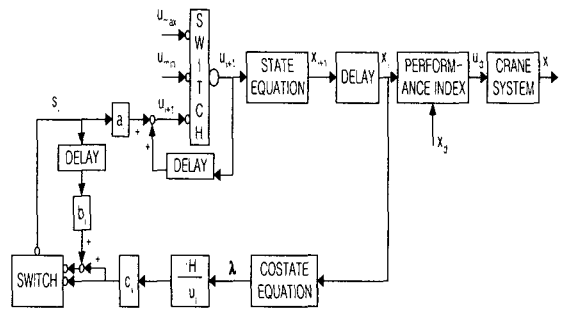


Fig. 3 Block diagram of overhead crane system

#### 4. 컴퓨터 시뮬레이션

거더, 트롤리, 호이스트 구동모터를 사용하여 거더, 트롤리, 줄을 이송운동시켜 화물을 운송하는 크레인시스템의 위치제어알고리즘에 최적제어방법의 적용으로 시스템은 두점 경계치 문제로 변환되고, 그 문제에서 나타나는 상태방정식과 보완상태방정식의 해는 Runge-Kunnta 방법으로 0.1초 마다 얻었고, 시뮬레이션 시간은 시간  $t_0=0$ 초에서 시간  $t=30$ 초로 하였다. 초기시간  $t_0=0$ 초부터 시간  $t=20$ 초까지는 최적제어방법이 적용되어 최적입력을 구할 수 있는 모터의 구동구간을 나타내고, 시간  $t=20$ 초부터 시간  $t=30$ 초까지는 구동구간에서 얻은 시스템의 최적상태가 모터가 정지되었을 때 시스템에 미치는 영향을 알아보는 정지구간을 나타낸다.

크레인시스템의 초기상태  $x_0$ 와 목표상태  $x_d$ 를 각각  $x_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0]^T$

$x_d = [11 \ 0 \ 11 \ 0 \ 11 \ 0 \ 11 \ 0 \ 5 \ 0]^T$  로 하고, 모터 시상수, 모터 이득상수, 모터 반지름, 모터 초기전압을 크레인시스템의 모델링에서 사용된 정보

와 동일한 값<sup>(1)</sup>으로 하였을 때 시뮬레이션 결과를 보여주는 Fig. 4, 5 는 본 연구에서 정의한 성능지수에서 함수 L이 존재하면 시스템의 화물운송상태를 만족하는 최적입력을 구할 수 없어서 함수 S만을 이용하고, 시스템의 과도상태 변화에 관계없이 0.1초 마다 최종상태와 목표상태에서 얻은 오차를 제어한 결과를 보여준다. 이때 사용된 가중치  $v=1$ ,  $w=0$  로 하였다.

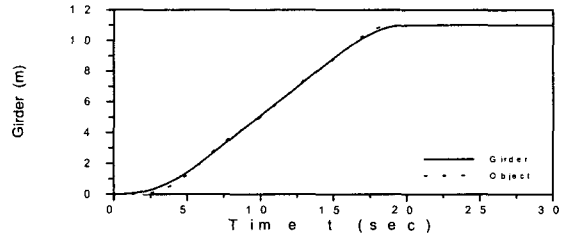
Fig. 4 (a) 에서 보는 바와 같이 거더모터의 구동구간에서 거더는 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않고 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 거더는 목표위치에 도달한 다음 그 위치를 유지하고 있다. 그리고 거더의 이송방향에서 본 화물은 구동구간에서 거더의 위치변화와 비교해보면 흔들리고 있지만 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않고 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 흔들림이 거의 발생하지 않고 있다.

Fig. 4 (b) 에서 보는 바와 같이 트롤리모터의 구동구간에서 트롤리는 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않고 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 트롤리가 목표위치에 도달한 다음 그 위치를 유지하고 있다. 그리고 트롤리의 이송방향에서 본 화물은 구동구간에서 트롤리의 위치변화와 비교해보면 흔들리고 있지만 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않고 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 흔들림이 거의 발생하지 않고 있다.

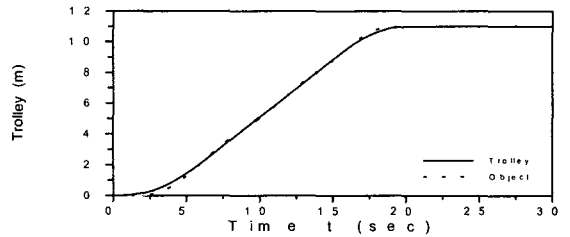
Fig. 4 (c) 에서 보는 바와 같이 호이스트모터의 구동구간에서 줄은 이송도중에 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않고 원활하게 움직이면서 목표위치에 도달하고 있고, 정지구간에서 줄은 목표위치에 도달한 다음 그 위치를 유지하고 있다.

Fig. 4 (a)~(c) 에서 보는 바와 같이 거더, 트롤리, 줄의 이송과 화물운송 중에 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않는 것은 최적제어방법에서 얻어진 거더, 트롤리, 호이스트 모터의 최적전압이 식 (16)에서 나타낸 것과 같이 최대전압과 최소전압을 넘지 않는 상태로 하였기 때문이다. 또한 화물의 흔들림이 모터 구동구간의 전 영역에서 발생하고 있는 것은 시스템의 과도상태를 제어하지 않고 최종상태만을 제어한 결과로써, 과도상태를 제어하지 않더라도 화물운송지연에 큰 영향을 미치지 않을 정도로 과도상태의 진폭이 작고, 그 진폭의 영향은

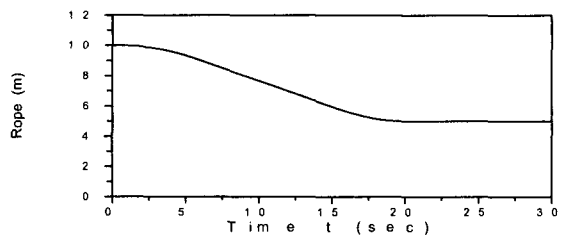
모터의 정지구간에서 보는 바와 같이 과도상태의 진폭보다 아주 작아서 화물운송지연에 큰 영향을 미치지 않는다.



(a) Position of girder and the object of girder direction



(b) Position of trolley and object of trolley direction



(c) Position of rope

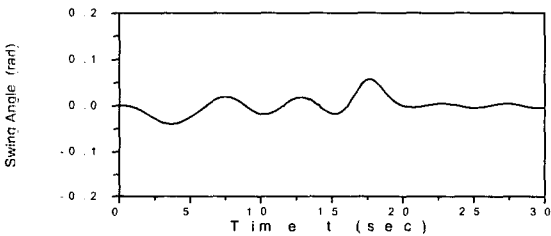
Fig. 4 Position of overhead crane system using nonlinear optimal control

Fig. 5 는 Fig 4 에서 보여준 거더, 트롤리, 줄, 화물의 위치를 식 (6), (7)에 대입하여 얻은 화물의 흔들림각과 비틀림각을 나타낸다. Fig. 5 (a)에서 보는 바와 같이 모터 구동구간의 전 영역에서 화물의 흔들림이 발생하고 있지만 그 진폭은 작고, 정지구간에서 화물 흔들림의 진폭은 아주 작다.

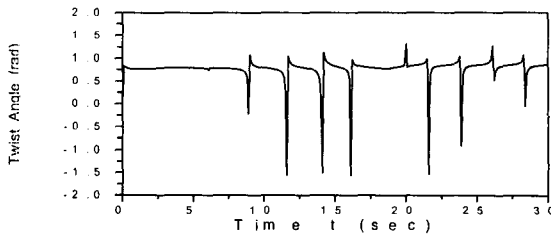
Fig. 5 (b)에서 보는 바와 같이 화물의 비틀림각

이  $0^\circ < \phi < 90^\circ$  인 것은 거더길이방향을 기준축으로 하였을 때 화물이 그 축에서 반시계방향으로  $\phi$  만큼 떨어진 곳에 위치하고,  $-90^\circ < \phi < 0^\circ$  인 것은 화물이 그 축에서 시계방향으로  $\phi$  만큼 떨어진 곳에 위치한 것을 나타내는 것으로, 비틀림각은 모터의 구동 및 정지구간에서 제어되지 않고 있다.

Fig. 5 (a), (b) 에서 보는 바와 같이 화물의 비틀림각이 제어되지 않더라도, 흔들림각만 제어되면 화물의 흔들림이 시스템의 화물운송지연에 큰 영향을 주지 않는다. 이것은 Fig. 4 (a), (b)에서 보여주는 거더와 화물의 위치변화 및 트롤리와 화물의 위치변화에서도 확인된다.



(a) Swing angle of object



(b) Twist angle of object

Fig. 5 Swing motion of object obtained by position control of overhead crane system

### 5. 결론

거더, 트롤리, 호이스트 모터를 사용하여 각각 거더, 트롤리, 줄을 이송운동시켜 화물을 운송하는 크레인시스템은 화물운송도중에 거더, 트롤리, 줄 및 화물이 오버슈트나 언더슈트가 발생하지 않으면

서 원활하게 목표위치에 이송되고, 운송도중에 발생하는 화물의 진자운동이 억제되는 화물운송상태를 만족하여야 한다.

이러한 화물운송상태를 만족하는 크레인시스템의 위치제어알고리즘은 모터에 공급되는 전압이 최대 및 최소 전압 사이에 존재하고, 시스템의 과도상태를 제어하지 않고 최종상태만 제어하는 최적제어방법을 적용하여 구한 최적전압을 사용하여 크레인의 위치를 제어하는 것이다. 이러한 최적전압을 크레인시스템에 사용한 결과, 시스템의 과도상태를 제어하지 않고 최종상태만 제어하더라도, 시스템의 거더, 트롤리, 줄 및 화물은 화물운송상태를 만족하면서 목표위치에 도달하였고, 화물의 흔들림은 억제되었다.

### 참고문헌

1. 이종규, 이상룡, "천장 크레인시스템의 모델링," 한국정밀공학회지, 제16권, 제9호, pp. 166-171, 1999.
2. Moustafa, K. A. F., and Ebeid, A. M., "Nonlinear Modeling and Control of Overhead Crane Load Sway," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 110, pp. 266-271, 1988.
3. 이종규, 이상룡, "부분상태 궤환제어를 이용한 비선형 천장크레인의 진자각제어," *대한기계학회논문집(A)*, 제21권, 제6호, pp. 907-917, 1997.
4. Brogan, W., L., "Modern Control Theory," Prentice-Hall International Editions, 1991.
5. Lewis, F. L., "Applied Optimal Control and Estimation," Prentice-Hall International Editions, 1992.
6. 嘉納秀明, 시스템의 최적이론과 최적화, 코로나사, 1987.
7. Bryson, A. E. and Ho, Y. C., "Applied Optimal Control," John Wiley & Sons, 1975.
8. Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T. and Flannery, B. P., "Numerical Recipes in C," Cambridge Uni. Press, 1992.
9. Quintana, V. H., and Davison, E. J., "Clipping-off Gradient Algorithms to compute optimal controls with constrained magnitude," *Int. J. Control*, Vol. 20, No. 2, pp. 243~255, 1974.