

## 고속 · 고정도 CNC 가공을 위한 NURBS 보간 알고리즘

김민중\*, 송진일\*, 권동수\*

### NURBS Interpolation Algorithm for CNC Machining with High Speed and High Precision

Min Jung Kim\*, Jin Il Song\*, and Dong Soo Kwon\*

#### ABSTRACT

In CNC machining, a free curve is cut into small linear segments using the linear interpolation(G01) method. Therefore, the interpolation error along the curve is not constant due to the changing curvature. This paper presents a NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline) interpolation algorithm for machining free curves with high precision and high speed. The proposed NURBS interpolation defines the tool path with NURBS parameters and limits the interpolation error to any desired level by adjusting the feed rate considering the curvature of the shape and sampling time. Both linear and NURBS interpolations are compared to show the validity of the proposed algorithm.

**Key Words** : NURBS interpolation(NURBS 보간), Curvature(곡률), High precision(고정도), CNC machining(CNC 가공), Interpolation error(보간 오차)

#### 1. 서론

CNC 공작 기계는 컴퓨터의 발달에 힘입어 고속, 고정도 가공과 다양하고 복잡한 기능을 갖게 되었다. 현재 CNC에서 자유곡면의 가공은 CAD/CAM 시스템에서 출력한 미소직선의 연결 형식인 직선 보간이나 작은 원호들로 구성된 원호 보간을 이용하여 공구의 가공경로를 생성한다. 이 방법은 CNC 지령 자체에 원래 형상과의 오차를 내포하고 단속적인 공구 이송속도지령을 생성하여 가공면의 조도가 불량해지며 가공프로그램의 길이가 길어지는 결점이 있다<sup>(1,8)</sup>.

이런 결점들을 근본적으로 해결하기 위해 최근의 CAD/CAM 시스템에서는 자유곡선, 자유곡면들을 표현하기 위해 일반적인 곡선의 정의식인 NURBS(Non-Uniform Rational B-Spline)곡선을 많이 사용하고 있다<sup>(4,5,6)</sup>. CNC 장치에 가공경로를 NURBS 파라미터들로 전달하면 수학적 정의식에 의해 가공 지령에는 오차가 발생하지 않는 장점이 있다. 이 방법은 NURBS 파라미터만으로 위치 정보를 전달하므로 가공 프로그램의 크기가 대폭적으로 줄어들어 직선 또는 원호 보간에 비해 상대적으로 고속의 전송장치가 필요 없게 되고, 가공 프로그램

\* 한국과학기술원 기계공학과

해석기의 처리 속도를 크게 향상시키지 않아도 고속·고정도 가공이 가능하다.

본 논문에서는 자유곡면의 가공 시 CAD/CAM 시스템에서 출력한 NURBS 곡선의 파라미터를 이용하는 NURBS 곡선의 보간 방법을 제안하였다. 제안한 보간법으로 곡선의 곡률 변화에 관계없이 주어진 최대 허용 보간 오차보다 항상 작은 오차를 갖도록 이송속도를 제한하고 NURBS 보간 알고리즘의 타당성을 검증하기 위해 자유곡선의 가공 시뮬레이션을 수행하여 그 성능의 유용성을 보였다.

## 2. CNC 의 보간 시스템

현재 거의 모든 상용의 CNC 의 보간 시스템은 연산 능력의 향상을 위해 Fig. 1 에 나타낸 바와 같이 메인 프로세서와 운동제어 프로세서를 사용한 2 단계 보간 시스템으로 구성되어 있다. 근사 보간(Rough interpolation)에서는 주어진 이송속도를 기준으로 근사 보간 주기인 샘플링 시간  $\Delta T$  마다 다음 보간점의 위치를 구한다. 그 다음 위에서 얻은 보간점 사이의 길이  $\Delta s$  를 이용하여 각 축 속도 성분 분배와 가감속을 거친 각 축의 위치 지령 데이터를 운동제어 프로세서에 넘긴다. 운동제어 프로세서는 근사 보간 주기마다 생성된 위치 지령 데이터를 위치 제어 루프의 주기로 상세 보간(Fine interpolation)을 수행하여 더욱 분해도가 높은 위치 지령을 생성한 후 각 축의 서보 모터를 구동하는 서보 입력으로 한다.

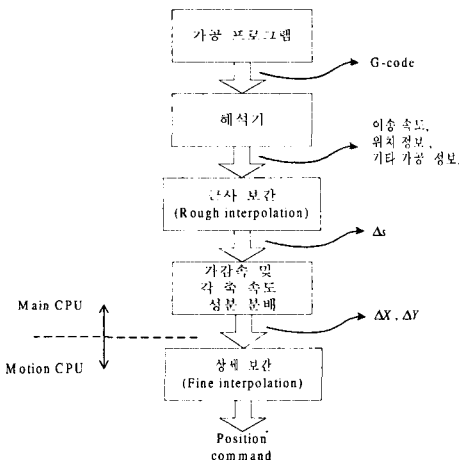


Fig. 1 Two step interpolation of CNC

상용의 CNC 에서 근사 보간 주기는 보통 4~10msec 이고 위치 제어 주기는 1msec 이다<sup>(1)</sup>.

기존의 자유곡선 및 자유곡면의 가공은 가공 경로를 미소직선이나 원호로 근사하기 때문에 가공경로의 길이에 따라 가공프로그램의 길이가 증가한다. 따라서 고속·고정도를 위해서는 CNC 의 대폭적인 기능향상 뿐만 아니라 고속의 데이터 전송장치가 필요하다. 하지만 가공경로를 NURBS 로 표현할 경우 가공프로그램의 길이와 보간에 의한 오차를 대폭으로 줄일 수 있다.

## 3. NURBS 보간 알고리즘

### 3.1 NURBS 의 정의

일반적인 곡선이나 곡면을 나타내기 위한 Cubic-spline, Bezier, B-spline, NURBS 등의 여러 가지 수학적 정의들이 존재한다. 그 중에서 NURBS 는 Cubic-spline 이나 B-spline, Bezier 등의 일반화된 형태이다. 특징으로는 복잡한 형상의 정의가 간편하고 적은 데이터로 매우 복잡한 형상의 표현이 가능하며, 파라미터의 변화로 다양한 형상의 표현이 가능하기 때문에 CAD/CAM 및 컴퓨터 그래픽스에서 많이 사용한다<sup>(4,5)</sup>. 이러한 NURBS 를 일반적인 형태로 정의하면 식(1)과 같고 Fig. 2 는 그 예이다.

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^n V_i \cdot w_i \cdot N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^n w_i \cdot N_{i,k}(u)} \quad (1)$$

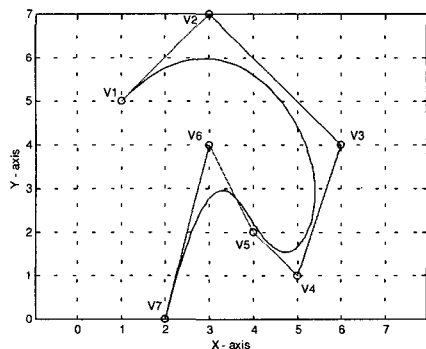


Fig. 2 Control points and NURBS curve

여기서  $u$  는 NURBS 곡선의 파라미터이고  $V_i$  는  $i$  번째 조정점(control point),  $w_i$  는  $V_i$  의 가중치(weight),  $N_{i,k}(u)$  는  $i$  번째 기저 함수(basis function)이며  $k$  는 기저 함수의 차수이다. 조정점은 자유곡선을 근사화 하는 순서적인 점들의 집합이며 NURBS 곡선은 이 조정점들이 이루는 볼록포(convex hull) 안쪽에 위치하게 된다. 가중치는 곡선이 조정점 쪽으로 끌리는 정도를 나타낸다. 기저 함수는 조정점이 곡선의 모양에 어느 범위에서 얼마나 영향을 미치는가를 나타내는 블렌딩(Blending) 함수이며 각각의 조정점마다 다음과 같이 재귀적으로 정의된다. 여기서  $r_i$  는  $i$  번째 절점을 나타낸다<sup>(2,3)</sup>.

$$N_{i,1}(u) = \begin{cases} 1 & r_i \leq u < r_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad (2)$$

$$N_{i,k}(u) = \frac{(u - r_i)}{(r_{i+k-1} - r_i)} N_{i,k-1}(u) + \frac{(r_{i+k} - u)}{(r_{i+k} - r_{i+1})} N_{i+1,k-1}(u)$$

### 3.2 보간 오차를 최대 허용 보간 오차 이내로 제한하는 NURBS 보간 알고리즘

이 절에서는 자유곡선의 곡률에 따라 보간점의 간격을 조절함으로써 일정한 보간 오차 이내로 제한하는 NURBS 보간 알고리즘을 제시한다.

자유곡선의 보간에서 곡선상의 미소 세그먼트(Segment) 상의 보간 오차  $h$  는 Fig. 3 에 나타낸 보간점 P 와 Q 를 연결한 직선의 수선과 곡선 사이의 최대 거리이다. 그리고 자유곡선상의 보간점 P 에서 곡률( $\kappa$ ) 은 식(3)과 같이 정의 된다. 곡률반경 R 은  $\kappa$  의 역수이다<sup>(7)</sup>.

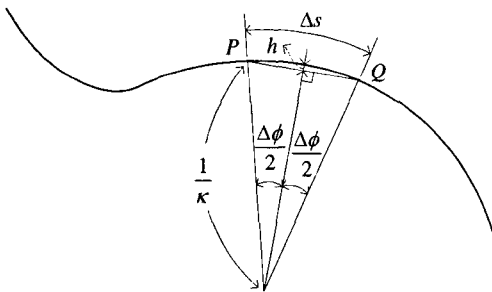


Fig. 3 Definition of curvature

$$\kappa \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \phi}{\Delta s} \equiv \frac{\Delta \phi}{PQ} \quad (3)$$

여기서  $\Delta \phi$  는 원주각이고  $\Delta s$  는 미소 곡선의 길이이다. 이 미소곡선은 미소직선  $\overline{PQ}$  로 근사할 수 있는데 이것은 보간점 사이의 간격  $\Delta L$  로서 보간 주기  $\Delta T$  동안의 이동거리 이므로  $\overline{PQ}$  를  $\Delta T$  로 나눈 값은 보간점 사이의 이송속도  $F$  를 의미한다. 식(3)과 Fig. 3 을 이용하여  $\Delta \phi$  와  $h$ ,  $\kappa$  와의 관계를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$h = \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} \times \cos\left(\frac{\Delta \phi}{2}\right) \approx \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} \times \left[1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{\Delta \phi}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta \phi^2}{8\kappa} \quad (4)$$

위의 식(4)에 의해 아래식을 유도할 수 있다.

$$h \approx \kappa \times \frac{\overline{PQ}^2}{8} = \kappa \times \frac{(F \times \Delta T)^2}{8} \quad (5)$$

Let  $h = \varepsilon_{\max}$ , then

$$\therefore F = \frac{2}{\Delta T} \sqrt{\frac{2\varepsilon_{\max}}{\kappa}}$$

위에서  $F$  는 보간점 사이의 이송속도 이고  $\Delta T$  는 보간 주기,  $\overline{PQ}$  는  $\Delta T$  동안  $F$  로 이동한 거리이며  $\varepsilon_{\max}$  는 최대 허용 보간 오차이다. 식(5)에 의해 보간 오차  $h$  를  $\varepsilon_{\max}$  로 놓을 때 보간 오차를  $\varepsilon_{\max}$  이하로 제한하는 이송속도  $F$  를 구할 수 있다. 위의 결과를 이용하여 Fig. 4 에 나타낸 현재 보간점의 위치를  $P(u_i)$ , 그리고  $P(u_i)$  이전의 두 점을  $P(u_{i-2})$ ,  $P(u_{i-1})$  이라 할 때 다음의 보간점  $P(u + \Delta u_i)$  즉  $P(u_{i+1})$  을 구하기 위해서는 NURBS 파라미터  $u$  의 증분치  $\Delta u_i$  를 구해야 한다.  $\Delta u_i$  를 구하기 위해 NURBS 곡선 한블럭은 적어도 일차 미분이 연속이라는 가정을 하고 아래의 식(6)에서 구할 수 있다. 여기서  $F(t)$  는 위의 식(5)에서 구한 최대 허용 보간 오차를 만족하는 이송속도 이고  $\Delta L_i$  는 이런 이송속도로 보간 주기  $\Delta T$  동안 이동하는 보간점  $P(u_i)$  와  $P(u_{i+1})$  의 거리이다. 정리하면 현재의 보간 위치를  $P(u_i)$  라 할 때

1) 식(3), (4)와  $P(u_i)$ ,  $P(u_{i-1})$ ,  $P(u_{i-2})$  로부터  $P(u_i)$  에서의 곡률  $\kappa$  를 구한다.

- 2) 식(5)에 의해 최대 허용 보간 오차를 만족하는  $P(u_i)$ 에서의 이송속도  $F$ 를 구한다.
- 3) 식(6)에 의해  $\Delta u_i$ 를 구해서 다음 보간점인  $P(u + \Delta u_i)$  즉  $P(u_{i+1})$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} \Delta u_i &= \Delta L_i \times \frac{1}{\dot{P}(u_i)} \cong F(t) \times \Delta T \times \frac{1}{\dot{P}(u_{i-1})} \\ &= \sqrt{\frac{8 \times \varepsilon_{\max}}{\kappa}} \times \frac{1}{\dot{P}(u_{i-1})} \end{aligned} \quad (6)$$

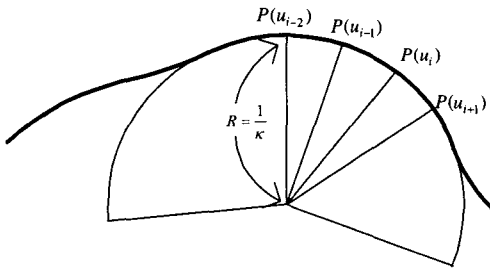


Fig. 4 Increment of parameter  $u$

#### 4. 시뮬레이션 결과

본 절에서는 제안한 NURBS 보간 알고리즘의 유용성을 검증하기 위해 MATLAB®을 이용하여 시뮬레이션을 수행하였다. 알고리즘을 적용한 NURBS 곡선으로 이루어진 가공경로를 Fig. 5에 나타내었다. (0, 0)이 가공 시작점이며 방향은 시계 방향이다. 시뮬레이션을 위해 근사 보간 주기는 8 msec, 최대 이송속도  $F$ 는 2000[mm/min]으로 가정하였다. Fig. 6은 최대 허용 보간 오차 한계를 0.05 μm로 했을 때 NURBS 보간을 수행한 후 보간 오차를 나타내었고 Fig. 7은 가공경로의 곡률, Fig. 8은 생성된 이송속도를 나타내었다. Fig. 6에서 보간 오차가 0.05 μm 이내로 제한 됨을 볼 수 있다.

Fig. 7과 Fig.8을 보면 식(5)에서부터 알 수 있듯이 이송속도는 곡률의 제곱근의 역수에 비례함을 알 수 있다.

Fig. 9는 최대 허용 보간 오차 한계를 2 μm, 최대 이송속도를 2000[mm/min]로 했을 때 NURBS 보간 오차를 나타내었고, Fig. 10은 같은 가공경로에서 이송속도를 2000[mm/min]로 고정하여 미소직선으로 보간을 수행한 경우의

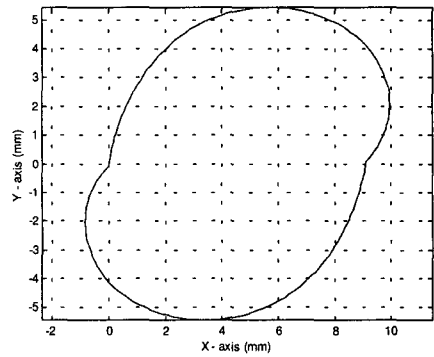


Fig. 5 NURBS curve for interpolation

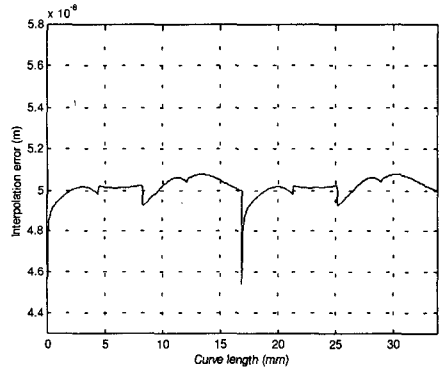


Fig. 6 NURBS interpolation error ( $\varepsilon_{\max} = 0.05 \mu\text{m}$ )

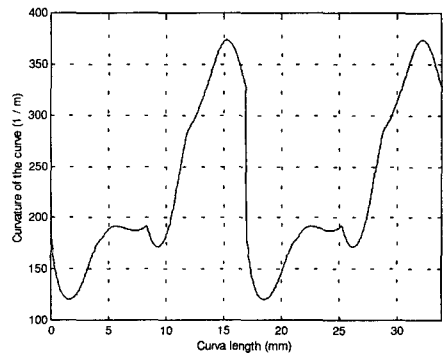


Fig. 7 Curvature of Fig. 5

보간 오차이다. Fig. 9가  $\varepsilon_{\max}$ 를 0.05 μm로 한 Fig. 6보다 불규칙한 이유는 미소곡선의 길이가 길어질 수록 미소직선으로의 근사가 어렵기

때문이다. Fig. 10에서 볼 수 있듯이 곡률이 클수록 보간 오차가 커짐을 알 수 있다.

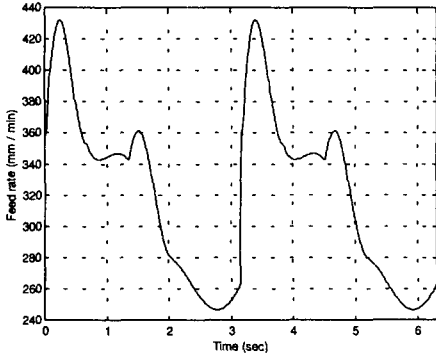


Fig. 8 Feed rate generated by NURBS interpolation algorithm

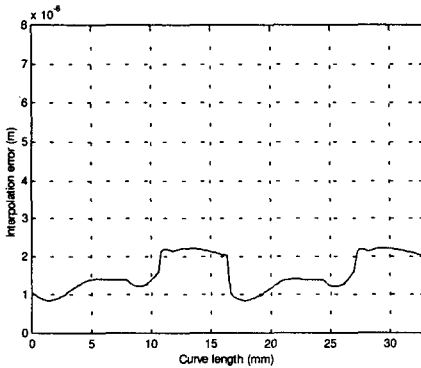


Fig. 9 NURBS interpolation error ( $\epsilon_{max} = 2 \mu m$ )

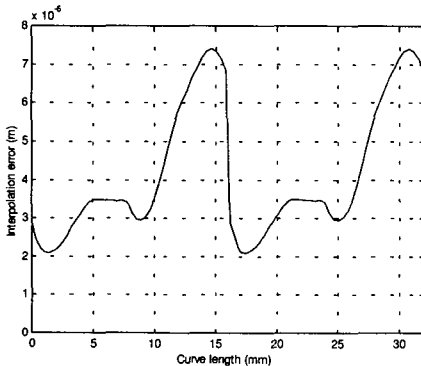


Fig. 10 Interpolation error (G01)

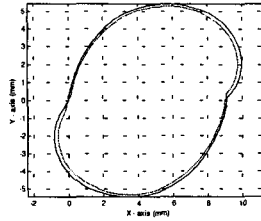


Fig. 11(a) NURBS interpolation path

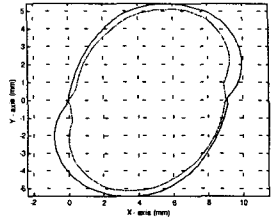


Fig. 11(b) Linear Interpolation path

Fig. 11(a)와 Fig. 11(b)는 Fig. 9와 Fig. 10의 보간 오차를 100 배 증폭하여 가공경로와 함께 나타내었다. 보간 오차를 포함한 가공경로는 각각 원래 원하던 목적 형상의 안쪽에 위치하고 있다. NURBS 보간은 Fig. 11(a)에서 보듯이 일정 이송속도를 사용한 보간 Fig. 11(b)에 비해 목적 형상과 보간 경로의 차이인 보간 오차가 일정함을 알 수 있다.

## 5. 결론

본 논문은 CNC 공작기계의 가공경로를 이루는 매개 함수 형태의 표현식인 NURBS 식을 이용하여 곡선상의 곡률과 보간 오차의 관계식을 유도한 후 보간 오차를 주어진 최대 허용 보간 오차 한계 이내가 되도록 보간점들을 계산하는 NURBS 보간 알고리즘을 제시하였고 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 그 타당성을 검증하였다.

## 참고문헌

1. 송진일, 김동일, 김성권의 7인, "삼성 CNC의 개발 및 적용," 서울대학교 신기술연구센터 CNC Workshop'94, 1994.
2. Les Piegl and Wayne Tiller, "The NURBS Book," Springer, pp. 47-78, pp. 117-138, 1995.
3. 이현찬 외 2인, "컴퓨터 그래픽스 및 형상 모델링," 시그마프레스, pp. 274-326, 1996.
4. Byoung K. Choi, "Surface Modeling for CAD/CAM," ELSEVIER, pp. 49-80, 1991.
5. 강성균, "개방형 수치제어 장치를 위한 범용 NURBS 보간기," KACC, 제 1 권, pp. 656-659,

1996.

6. Kazuo Muto , “曲線 補間 加工 技術의 現況と 課題,” 機械と 工具, pp. 2-11, 1998.
7. 기우환, 박진석, “미분기하학,” 학문사, pp. 26-33, 1990.
8. Jui-Jen Chou, D.C.H. Yang, “Command Generation for Three Axis CNC Machining,” Journal of Engineering for Industry, Vol.113, pp. 305-310, 1991.