Historia Mathematica Vol. 13, No. 2, 2000, 87-94

편미분방정식 해의 공간적 감소율을 결정하는 푸앵카레 상수*

한양대학교 이학부 수학전공 **송종철**

Abstract

This paper investigates history and modern developments concerning spatial decay estimates for solutions in a semi-infinite cylinder or strip, in which model equations are defined with appropriate homogeneous lateral boundary conditions and initial conditions but left end boundary data are assumed. Our aim is to show this Saint-Venant type decay rate dependent critically on the Poincare constant resulting from characterizing variational principles.

0. 서론

탄성학에서 오랜 역사를 갖고 있는 Saint-Venant principle은 편미분방정식의 해의 공간적 감소(spatial decay)를 연구하는 데 매우 중요하다. 이 공간적 감소의 연구에 대한 참고 문헌은 Horgan & Knowles[9], Horgan[5, 6]에 많이 나와 있다. 편미분방정식 해의 연구에서 푸리에(Fourier) 해석에 의하여 파동방정식과 열방정식에서 시간항을 분리하면 다음의 디리클레(Dirichlet) 형의 고정막(fixed membrane) 경계값 문제인 고유함수 ϕ와 고유치 $\lambda(>0)$로 표현되는 식을 얻는다.

$$\Delta\phi+\lambda\phi=0 \quad \text{in} \quad D, \quad \phi=0 \quad \text{on} \quad \partial D \tag{1}$$

여기서 Δ는 라플라스(Laplace) 연산자이고 D는 유한영역이고 ∂D는 그 영역의 경계이다.

일반적인 D 영역에서 (1)의 정확한 고유치와 고유함수를 구한다는 것은 거의 불가능하다. 근사해와 근사 고유치를 구하는 것도 엄청난 계산 작업이 필요하지만 자연 현상의 많은

* 본 논문은 2001학년도 한양대학교 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.

문제는 (1)의 가장 작은 첫 번째 양의 고유치 λ_1과 첫 번째 고유함수 ϕ_1을 구하면 충분하다. 예를 들면 평형에 이르는 시간, 냉각 시간을 구하는 데는 λ_1이 결정한다. 이의 근사 최소 고유치는 변형의 원리(variational principle)에서 중요한 Rayleigh-Ritz 방법으로 구할 수 있다. 변형의 원리를 이용하여 λ_1을 특성화하면 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \frac{\int_D (\nabla \phi)^2 dx}{\int_D \phi^2 dx}, \quad \phi \in H_0^1, \quad \phi \neq 0 \right\} \tag{2}$$

H_0^1은 homogeneous 경계조건과 C^1의 L_2 적분할 수 있는 admissible 함수 공간이다.

변형의 특성화 식 (2)를 잘 알려진 제 1 형의 푸앵카레(Poincare) 부등식으로 쓰면 다음 식으로 쓸 수 있다.

$$\int_D \phi^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_D (\nabla \phi)^2 dx \tag{3}$$

위 부등식은 고정막(fixed membrane) 문제 (1)에서 가장 작은 첫 번째 고유치의 역수인 $1/\lambda_1$은 가장 좋은 푸앵카레 상수임을 분명히 잘 보여준다. 노이만(Neumann) 형의 free membrane 문제의 경우는 (1)에서와 같이 variational characterization시키면 다음의 제 2 형 푸앵카레 부등식을 쓸 수 있다.

$$\int_D \phi^2 dx \leq \frac{1}{\mu_2} \int_D (\nabla \phi)^2 dx \tag{4}$$

여기서 $\mu_2(>0)$는 다음의 free membrane 문제에서 가장 작은 고유치이다.

$$\Delta\psi + \mu\psi = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D \tag{5}$$

로빈(Robin)형의 복사조건의 막문제에는 제 3 형의 푸앵카레 부등식을 쓸 수 있다[4].

$$\int_D \phi^2 dx \leq \frac{1}{\nu_k} \int_D (\nabla \phi)^2 dx + k \oint \psi^2 ds \tag{6}$$

여기서 양의 ν_k는 임의의 양의 상수 k에 대하여 다음 radiation 고유값 문제의 가장 작은 고유치이다.

$$\Delta\psi + \nu_k\psi = 0 \quad \text{in } D, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} + k\psi = 0 \quad \text{on } \partial D \tag{7}$$

위의 Poincare 상수들 $(\lambda_1, \mu_2, \nu_k)$ 중 본 논문에는 잘 연구된 푸앵카레 부등식 (3)을 중심으로 기술하고자 한다. 문제의 설명을 위하여 R을 반무한 실린더 내의 영역, 영역의

경계를 ∂R, 평면에 있는 실린더 단면을 D_0, $R_z = \{(x_1, x_2, x_3) | (x_1, x_2) \in D_0,\ x_3 > z \geq 0\}$, $D_z = \{(x_1, x_2, x_3) | (x_1, x_2) \in D_0,\ x_3 = z\}$, ∂R_z를 R_z의 경계, ∂D_z를 D_z의 경계로 한다.

다음 장에서 라플라스, 열, 파동방정식에 대하여 공간적 감소를 기술하고자 한다.

1. 라플라스 방정식의 공간적 감소

반무한 실린더 영역에서 측면에 0의 경계값이 주어지고 왼쪽 끝단면에 data(end effects)의 영향을 위하여 다음의 모델방정식을 생각한다.

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \text{ in } R, \\ u &= 0 \text{ on } \partial R - D_0, \\ u(x_1, x_2, 0) &= f(x_1, x_2) \text{ on } D_0 \end{aligned} \tag{8}$$

u가 $z \to \infty$에서 regularity 조건인 0으로 간다고 가정하고 (3)의 푸앵카레 부등식을 사용하여 지수적 감소를 주는 1차 미분부등식 또는 2차 미분부등식을 구한다. 이로부터 다음의 단면 에너지의 부등식을 얻는다.

$$\int_{D_z} u^2 dA \leq \int_{D_0} f^2 dA\, e^{-2\sqrt{\lambda_1} z} \tag{9}$$

여기서 dA 단면의 미소 면적을 나타낸다.

반무한 실린더내의 느린 점성유체의 흐름을 지배하는 Stokes 방정식 또는 탄성학에서 Karman의 plate 방정식을 나타내는 bihamonic 방정식 $\Delta^2 u = 0$과 적당한 경계값과 왼쪽 끝단면의 데이터로 주어진 해의 적당한 에너지도 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1} z})$로 지수적 감소함을 보여주는 결과를 얻는다[8, 16, 30]. Horgan & Payne[10]은 radiation 조건을 갖는 비선형 비등방성 타원형 미분방정식에서 $z \to \infty$에서 regularity 가정을 없이 해석을 하면 Phragmen-Lindelof 형의 지수적 증가 또는 적어도 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1} z})$, $k > 0$만큼 빠르게 지수적 감소함을 보여주는 결과를 얻는다.

2. 열방정식의 공간적 감소

반무한 실린더내의 영역에서 다음의 모델 열방정식을 생각한다.

$$\begin{aligned} \Delta u - \dot{u} &= 0 \text{ in } R\times(0,\infty), \\ u(x,t) &= 0 \text{ on } (\partial R - D_0)\times[0,\infty), \\ u(x,0) &= 0 \text{ in } x\in R, \\ u(x_1, x_2, 0, t) &= f \text{ on } D_0\times[0,\infty) \end{aligned} \tag{10}$$

주어진 data는 compatibility 조건을 만족한다고 하고 dot는 시간에 대한 미분을 나타낸다. (8)에서 해석한 방법과 같이 (3)의 푸앵카레 부등식을 이용하여 Knowles[14]은 다음의 에너지 부등식을 구했다.

$$E(z,t) = \int_0^t \int_{R_z} |\nabla u|^2 dx d\eta + \frac{1}{2}\int_{R_z} u^2 dx \le E(0,t)\, e^{-2\sqrt{\lambda_1} z} \tag{11}$$

위의 에너지 지수적 부등식으로부터 열방정식 해의 공간적 감소율은 적어도 라플라스 방정식 (8)의 감소율만큼 빠름을 알 수가 있다. 실제의 자연 현상에서 Boley[4]는 thermal stress에서 위의 에너지 감소율이 적어도 그에 대응되는 steady state의 라플라스 방정식보다도 빠름을 관찰하였다. Sigillito[20]의 연구에서 pseudo 포물형 방정식의 에너지의 공간적 감소가 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$임을 보여 준다. Horgan et al.[12]에서 실제로 고정된 t에 대하여 단면적 에너지가 $\int_{D_z} u^2 dA \le O(e^{-kz^2/t})$로 감소함으로써 라플라스 방정식 감소율 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$보다 훨씬 빠름을 볼 수 있다. 이와 함께 Payne et al.[18]은 radiation 조건의 비선형 열방정식에서 에너지 부등식이 $O(e^{-kz^2/t})$만큼 빠른 공간적 감소율을 얻지만 Song[26]은 변형된 열방정식(perturbed heat equation)의 공간 감소율은 $O(e^{-kz^2/t})$만큼 빠르게 감소하지 못한다는 결론, 즉 변형된 열방정식의 감소율은 Knowles[14]의 감소율 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$보다는 크고 Horgan et al.[12]의 감소율 $O(e^{-kz^2/t})$보다는 작음을 보이는 결과를 얻었다.

3. 파동방정식의 공간적 감소

파동방정식의 공간적 감소는 연구가 타원형이나 포물형의 방정식보다 비교적 덜 활발하다. 파동방정식의 성격상 특성방정식에 따라 에너지의 감소를 기술하여야 하므로 푸앵카레 상수와는 직접적인 관계는 없지만 본 논문의 완전함을 위하여 Song[26]의 발표될 논문의 결과를 인용한다.

$$\begin{aligned} \Delta u - \ddot{u} &= 0 \text{ in } R\times(0,t_0), \\ u(x,t) &= 0 \text{ on } (\partial R - D_0)\times(0,t_0), \\ u(x,0) &= 0, \quad \dot{u}(x,0) = 0 \text{ in } x\in R, \\ u(x_1, x_2, 0, t) &= f \text{ on } D_0\times(0,t_0) \end{aligned} \tag{12}$$

(12)의 에너지 부등식은 다음과 같다.

$$E(z,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_z} (\dot{u}^2 + |\nabla u|^2 dx d\eta = 0 \ \text{ for } t \le z,$$
$$E(z,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{R_z} (\dot{u}^2 + |\nabla u|^2 dx d\eta = E(0,t) e^{-z/t} \ \text{ for } 0 \le z < t \tag{13}$$

위의 에너지 부등식으로부터 라플라스나 열방정식의 감소율과 비교할 수 없지만 짧은 시간 동안에는 end effects가 빠르게 지수적 감소함을 알 수 있다. Quintanila[19]는 위의 연구 방법보다는 덜 transparent하지만 좀더 일반적 초기치와 경계치가 주어지 파동방정식의 공간적 감소를 연구하였다.

4. 연속체 물리에서의 공간적 감소

연속체 역학에서 가장 중요한 모델방정식 Navier-Stokes 방정식으로 기술되는 느린 steady state의 유한 파이프 내에서 점성 유체흐름을 생각한다. Horgan & Wheeler[13]는 점성유체의 laminar 흐름을 보장하는 한계 Reynolds 수가 푸앵카레 상수에 의하여 결정되고 에너지 감소율도 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$ 임을 보여주는 결과를 얻었다. 또한 2차원 channel 흐름에서 Horgan[7]은 유선 함수를 도입하여 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$의 감소결과를 나타내는 에너지 부등식과 한계 Reynolds 수를 구했다. Song[25]은 Navier-Stokes 방정식과 온도방정식(에너지 방정식)이 혼합된 entry data가 주어지고 측면에 homogeneous data가 주어진 반무한 실린더의 속도, 온도, 압력 (u_i, T, p)의 entry thermal flow의 문제를 연구하였다.

$$\begin{aligned} \nu \Delta u_i &= -p_{,i} + u_j u_{i,j} \ \text{ in } R, \\ u_{i,i} &= 0 \ \text{ in } R, \\ \varkappa \Delta T &= u_j T_{,j} \ \text{ in } R \end{aligned} \tag{14}$$

여기서 되풀이되는 첨자는 1에서 3까지 합산약속을 하고 첨자의 범위는 1에서 3이며 ν와 $\varkappa$는 동적 점성상수와 열적 확산상수를 나타낸다.

위의 Navier-Stokes 방정식과 에너지방정식의 spatial decay를 연구하기 위해서는 Sobolev 부등식, 그리고 압력항을 다루기 위한 Babusuka-Aziz 부등식 등이 필요하지만 위의 에너지의 공간적 감소율은 궁극적으로 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$임을 얻었다. 위의 경우는 모두 steady state의 경우이다. Time-dependent Navier-Stokes의 공간적 감소는 아직까지 풀려지지 않은 열려 있는 문제이다. Time-dependent Stokes 2차원 문제의 경우는 Lin[15]이, 3차원의 경우는 Ames et al.[1]이 에너지 부등식이 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$으로 지수적 감소함을 얻었다.

한편 Payne & Song[22, 23]은 다공성이 들어 있는 매질의 반무한 실린더 흐름을 지배하는 steady state 이중확산의 Brinkman & Darcy 모델방정식의 에너지 부등식도 이와 같은 지수적 감소 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$함을 얻었다. 더욱더 Payne & Song[24]은 다공성매질의 복잡한 모델방정식 transient Forchheimer 방정식의 지수적 감소를 entry mean flow의 평형을 이루는 경우와 그렇지 못한 경우에 각각에 대하여 재미있는 결과를 얻었다. Song[28]은 반무한 채널의 영역에서 알맞은 경계값과 초기치가 주어진 transient double diffusive Darcy 흐름의 모델방정식을 생각한다.

$$\begin{aligned} u_\alpha &= -p_{,\alpha} + g_\alpha T + h_\alpha C \text{ in } R, \\ u_{\alpha,\alpha} &= 0 \text{ in } R, \\ \Delta T &= \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha T_{,\alpha} \text{ in } R, \\ \Delta C &= \frac{\partial C}{\partial t} + u_\alpha C_{,\alpha} \text{ in } R \end{aligned} \tag{15}$$

여기서 Greek 첨자 α는 1에서 2까지 움직인다.

위에서 실린더에서 저장된 에너지 부등식이 푸앵카레 상수가 지배하는 지수적 감소가 $O(e^{-k\sqrt{\lambda_1}z})$을 얻었다.

또한 위의 다공성 매질속의 Darcy 방정식 지배하는 흐름과 Stokes 방정식의 느린 점성유체가 접하면서 흐르는 복잡한 interface 경계면을 갖는 복잡한 문제도 decay rate가 푸앵카레 상수에 의존함을 보이는 결과를 얻었다[3]. Song[27]은 마그네틱 장이 있는 Navier-Stokes 방정식의 푸앵카레 상수에 의존하는 공간적 감소를 보이는 것을 유도하였다.

마지막으로 Payne & Song[21]은 알맞은 왼쪽 끝단면 data와 경계 및 초기치로 주어진 일반적 열전도 방정식과 에너지 평형으로 구성된 다음 연립 포물형 방정식을 생각한다.

$$\begin{aligned} \tau u_{i,t} &= -u_{,i} - \varkappa T_{,i} + \mu \Delta u_i + \nu u_{j,ji} \text{ in } R, \\ cT_{,t} &= -u_{i,i} \text{ in } R \end{aligned} \tag{16}$$

위에서 τ, μ, ν, c는 물질 상수들이다. Phragmen-Lindelof 형의 alternative 결과 (증가 또는 감소) 에너지 부등식의 비슷한 연구 결과를 얻었다.

결론적으로 유계영역에서 Phragmen-Lindelof 형의 에너지 부등식 또는 spatial decay를 결정하는 Saint-Venant 형의 에너지 부등식을 구하기 위해서는 푸앵카레 상수가 매우 중요함을 알 수 있다.

참고 문헌

1. Ames, K.A. and L.E. Payne, "Decay estimates in steady pipe flow," *SIAM J. Math. Anal.* 20(1989), 789-815.
2. Ames, K.A., L.E. Payne and P.W. Schaefer, "Spatial decay estimates in time dependent Stokes flow," *SIAM J. Math. Anal.* 24(1993), 1395-1413.
3. Ames, K.A., L.E. Payne and J.C. Song, "Spatial decay in the pipe flow of a viscous fluid interfacing a porous medium," preprint.
4. Boley, B.A., "Some observations on Saint-Venant's principle," *Proc. 3rd U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, ASME, New York (1958), 259-264.
5. Horgan, C.O., "Recent developments concerning Saint-Venant's principle: an update," *Appl. Mech. Rev.* 42(1989), 295-303.
6. ________, "Recent developments concerning Saint-Venant's principle: a second update," *Appl. Mech. Rev.* 49(1996), 101-111.
7. ________, "Plane entry flows and energy estimates for the Navier-Stokes Equations," *Arch. Rational Mech. Anal.* 68(1978), 359-381.
8. ________, "Decay estimates for the biharmonic equation with applications to Saint-Venant's principle in plane elasticity and Stokes flows," *Quart. Appl. Math.* 47(1989), 147-157.
9. Horgan, C.O. and J.K. Knowles, "Recent developments concerning Saint-Venant's principle," in *Advances in Applied Mechanics*, T.Y. Wu and J.W. Hutchinson (eds), 23(1983), 179-269.
10. Horgan C.O. and L.E. Payne, "Phragmen-Lindelof type results for harmonic functions with nonlinear boundary conditions," *Arch. Rational Mech. Anal.* 122(1978), 123-144.
11. Horgan C.O. and L.E. Payne, "Saint-Venant's principle for a theory of non-linear plane elasticity," *Quart. Appl. Math.* 50(1992), 641-675.
12. Horgan, C.O., L.E. Payne and L.T. Wheeler, "Spatial decay estimates in transient heat conduction," *Quart. Appl. Math.* 42(1984), 119-127.
13. Horgan, C.O. and L.T. Wheeler, "Spatial decay estimate for the Navier-Stokes equations with application to the problem of entry flow," *SIAM J. Appl. Math.* 25(1978), 97-116.
14. Knowles, J.K., "On the spatial decay os solutions of the heat equation," *Z. angew. Math. Phys.* (ZAMP) 22(1971), 1050-1056.
15. Lin, C., "Spatial decay estimates and energy bounds for the Stokes flow equation," *SACCM* 2(1992), 249-264.
16. _____, "Energy estimates for the biharmonic equations in three dimensions," *Quart.*

Appl. Math. 52(1994), 649-663.

17. Payne, L.E., P.W. Schaefer and J.C. Song, "Bounds and decay results for some second-order semilinear elliptic problems," *Math. Meth. Appl. Sci.* 21(1998), 1571-1591.
18. Payne, L.E., P.W. Schaefer and J.C. Song, "Growth and decay results in heat conduction problems with nonlinear boundary conditions," *Nonlinear Analysis* 35(1999), 269-286.
19. Quintanilla, R., "A spatial decay estimate for the hyperbolic heat equation," *SIAM J. Math. Anal.* 27(1996), 78-91.
20. Sigillito, V.G., "Exponential decay of functionals of solutions of a peudoparabolic equation," *SIAM J. Math. Anal.* 5(1974), 581-585.
21. Payne L.E. and J.C. Song, "Phragmen-Lindelof and continuous dependence type results in generalized heat conduction," *Z. angew. Math. Phys.* (ZAMP) 47(1996), 527-538.
22. ________, "Spatial decay estimates for the Brinkman and Darcy flows in a semi-infinite cylinder," *Continuum Mech. Thermodyn.* 9(1997), 175-190.
23. ________, "Spatial decay for a model of double diffusive convection in Darcy and Brinkman flows," *Z. angew. Math. Phys.* (ZAMP), to appear.
24. ________, "Spatial decay bounds for the Forchheimer equations," preprint.
25. Song, J.C., "Decay estimates in steady semi-infinite thermal pipe flow," *J. Math. Anal. Appl.* 207(1997), 45-60.
26. _______, "Spatial decay for solutions of Cauchy problems for perturbed heat equations," *Math. Models Meth. Appl. Sci.*, to appear.
27. _______, "Decay estimates for steady magnetohydrodynamics equations in a semi-infinite cylinder," *J. Korean Math. Soc.*, to appear.
28. _______, "Spatial decay estimates in time-dependent double diffusive Darcy plane flow," preprint.
29. Song, J.C. and D.S. Yoon, "Phragmen-Lindelof and continuous dependence type results in generalized dissipative heat conduction," *J. Koran Math. Anal.* 35(1998), 945-960.
30. Vafeades, P. and C.O. Horgan, "Exponential decay estimates for solutions of the von Karman equations on a semi-infinite strip," *Arch. Rational Mech. Anal.* 104(1988), 1-25.