*Historia Mathematica Vol. 13, No. 2, 2000, 65-72*

# 함수 공간 적분에 관한 소고(II)

한양대학교 자연과학부 **장주섭**

## Abstract

In this paper we treat the Yeh-Wiener integral and the conditional Yeh-Wiener integral for vector-valued conditioning function which are examples of the function space integrals. Finally, we state the modified conditional Yeh-Wiener integral for vector-valued conditioning function.

## 0. 서론

독일의 수학자 리만(Riemann, 1826-1866)은 구간 $[a, b]$ 위에서 정의된 함수의 리만 합이 어떤 극한에 접근한다는 근사 과정 이론을 이용하여 리만 적분(Riemann integral)을 정의하였다. 1901년 프랑스의 수학자 르베그(Lebesgue, 1875-1941)는 함수의 정의역을 보다 큰 집합족까지 적용한 르베그 적분(Lebesgue integral)을 발표하였고, 이 적분은 현대 적분 이론 발달에 지대한 공헌을 하였다.

리만 적분과 르베그 적분은 모두 다 함수의 정의역이 실수를 바탕으로 형성되었다. 함수의 정의역이 실수가 아닌 함수 공간인 경우, 우리는 이 적분을 함수 공간 적분이라 하며, 가장 간단한 함수 공간 적분의 예가 위너 적분(Wiener integral)이다.

1827년에 영국의 식물학자 브라운(Brown)은 꽃가루의 수정 과정에서 아주 작은 입자가 빠르고 불규칙적으로 운동하는 모습을 관찰하였고, 우리는 이 운동을 브라운 운동(Brownian motion)이라고 명명하였다. 아인슈타인(Einstein)은 1905년부터 1908년까지 브라운 운동에 관한 연구를 통하여 5편의 논문을 발표하였다. 그는 이들 논문에서 브라운 운동에 대한 확산 방정식(diffusion equation)을 유도하였고, 브라운 입자가 주어진 입방체 안에 있을 확률을 얻었다.

1923년 미국 MIT 교수인 위너(Wiener)는 확률론과 물리학의 기본 이론을 이용하여, 가장 간단한 함수 공간인 위너 측도 공간(Wiener measure space)을 만들고, 이를 이용하여, 위너

적분(Wiener integral)을 정의하였다. 위너 측도 공간에서 다루는 함수는 1변수 함수이며, 이에 대해서는 위너 조건 적분(conditional Wiener integral)과 더불어 저자가 [11]에서 소개하였다.

본 논문에서는 2변수로 이루어진 함수 공간과 이 위에서 주어진 함수 공간 적분을 다루고자 한다. 좀더 구체적으로 말하면 예-위너 측도 공간(Yeh-Wiener measure space)과 예-위너 적분(Yeh-Wiener integral)을 소개하며, 또한 벡터값을 갖는 조건 함수가 주어진 경우의 예-위너 조건 적분(conditional Yeh-Wiener integral)과 변형된 예-위너 조건 적분(modified conditional Yeh-Wiener integral)도 소개한다.

## 1. 예-위너 적분

1923년에 위너는 시간이 0일 때, 원점을 출발한 입자가, 시간이 $t$일 때, 구간 $[\alpha, \beta]$ 안에 있을 확률 $P$가 다음과 같음을 보였다.

$$P=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left\{-\frac{w^2}{2t}\right\}dt \tag{1.1}$$

이 결과는 아인슈타인이 1905년에 얻은 결과의 특별한 경우이다[11].

이제 2변수 함수에 대하여 생각해 보자. 1951년 일본의 키다가와(Kitagawa)[6]는 사각형 $[0, 1]\times[0, 1]$ 위에서 주어진 연속함수들의 집합 $C([0,1]\times[0,1])$을 생각하고, 이 함수 공간 위에서의 여러 가지 성질들을 다루었으나, 수학적인 엄밀성이나 논리성은 부족하였다. 1960년 미국의 예(Yeh)[8]는 2변수 함수 공간에 대한 수학적 이론을 구축하였다.

사각형(rectangle) $Q=[a,b]\times[c,d]$에 대하여, 다음의 집합을 예-위너 공간(Yeh-Wiener space)이라고 한다.

$$C(Q)=\{f \mid f:\ Q\to R\text{는 연속함수, } f(a,\cdot)=f(\cdot,c)=0\} \tag{1.2}$$

$f\in C(Q)$에 대하여, 다음과 같이 놓으면, $\|\cdot\|$은 $C(Q)$에서 노름(Norm)이 된다.

$$\|f\|=\max\{|f(s,t)| : (s,t)\in Q\} \tag{1.3}$$

또, $(C(Q), \|\cdot\|)$은 무한 차원 바나흐 공간(Banach space)이며, 더욱이 가분(Seperable) 바나흐 공간이다.

$a=s_0<s_1<\cdots<s_m\le b$이고 $c=t_0<t_1<\cdots<t_n\le d$일 때, 다음과 같이 정의된 집합 $I$를 구간(interval)이라고 한다.

$$I=\{f\in C(Q) \mid (f(s_1,t_1),\cdots,f(s_m,t_n))\in E\} \tag{1.4}$$

여기서 다음과 같이 생각한다.

$$E=(\alpha_{11},\beta_{11}]\times\cdots\times(\alpha_{mn},\beta_{mn}] \tag{1.5}$$

$$-\infty\le\alpha_{ij}\le\beta_{ij}\le\infty \qquad (1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$$

$C(Q)$의 모든 구간들의 모임 $\mathcal{F}$는 준대수(Semi-algebra)이며, $\mathcal{F}$에 집합 함수 $m$을 다음과 같이 정의한다.

$$m(I)=\int_E W_{mn}(s,t;\ u)\,du \tag{1.6}$$

여기서 $I$는 (1.4)로 표시되는 구간이고, $u=(u_{11},\cdots,u_{mn})\in\mathbb{R}^{mn}$이며 $W_{mn}(s,t;\ u)$는 다음과 같다.

$$W_{mn}(s,t;u)\equiv\Pi_{i=1}^{m}\Pi_{j=1}^{n}\,[2\pi(s_i-s_{j-1})(t_j-t_{j-1})]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\exp\left\{-\frac{(u_{i,j}-u_{i-1,j}-u_{i,j-1}+u_{i-1,j-1})^2}{2(s_i-s_{i-1})(t_j-t_{j-1})}\right\}, \tag{1.7}$$
$$u_{0,0}=u_{o,j}=u_{i,0}=0 \quad (1\le i\le m, 1\le j\le n)$$

예가 얻은 (1.6)은 위너가 얻은 (1.1)과 외형적으로 비슷하다. 이 때, $m$은 $\mathcal{F}$에서 측도가 되며, 특히 $m(C(Q))=1$이 된다. $\mathcal{F}$에서 정의되는 측도 $m$은 $\sigma(\mathcal{F})$에서 정의되는 측도로 확장되며, 이 측도 공간은 다시 완전 측도 공간으로 확장된다. 이 때, 이 완전 측도 공간 $(C(Q),\mathscr{C},m)$을 예-위너 측도 공간이라고 한다. 이 때, $m$은 예-위너 측도, $\mathscr{C}$의 원소를 예-위너 측도 가능한 집합(Yeh-Wiener measurable set)이라 한다. 예-위너 측도 공간은 $m(C(Q))=1$이므로 확률 공간이다.

예-위너 측도 공간에서 정의된 측도 가능한 함수 $F$의 예-위너 측도에 관한 적분을 $F$의 예-위너 적분이라고 하고, 다음과 같이 표시한다.

$$E(F)=\int_{C(Q)}F(f)\,dm(f) \tag{1.8}$$

함수 $F: C(Q)\rightarrow\mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(f)=g(f(s_1,t_1),\ \cdots,\ f(s_m,t_n)) \tag{1.9}$$

함수가 르베그 측도 가능할 필요충분조건은 $F$가 예-위너 측도 가능할 때이다. 이 경우에, 다음이 성립한다.

$$\int_{C(Q)}F(f)\ dm(f)\ \doteq\ \int_{\mathbb{R}^{mn}}g(u)W_{mn}(s,t;u)du \tag{1.10}$$

여기서 $W_{mn}(s,t;u)$는 (1.7)인 확률 밀도 함수이고, $\doteq$은 강한 의미의 등식을 뜻한다. 즉, (1.10)의 어느 한 변이 존재하면(무한대인 경우도 포함) 다른 변도 존재하고 적분값은 같다.

식 (1.10)은 예-위너 적분을 르베그 적분으로 표시하는 공식으로서 이 식을 이용하면, 예-위너 적분을 계산할 수 있다. 예를 들어, $(s,t)\in Q$일 때, (1.10)과 변수 변환 공식을 이용하면, 다음을 얻을 수 있다.

$$\int_{C(Q)}(f(s,t))^{2k-1}dm(f)=0 \tag{1,11}$$

$$\int_{C(Q)}(f(s,t))^{2k}dm(f)=1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)(s-a)^k(t-c)^k \tag{1.12}$$

또한, $(s_1,t_1)$과 $(s_2,t_2)$가 $Q$에 속하는 임의의 점일 때, (1.10)과 변수 변환 정리를 이용하면, 다음이 된다.

$$\begin{aligned}E(f(s_1,t_1)f(s_2,t_2))&=\int_{C(Q)}f(s_1,t_1)f(s_2,t_2)dm(f)\\&=(min\{s_1,s_2\}-a)(min\{t_1,t_2\}-c)\end{aligned} \tag{1.13}$$

$X=\{X((s,t),\cdot):(s,t)\in Q\}$가 확률 과정(Stochastic process)일 때, $X$의 평균 함수(mean function) $m(s,t)$와 공분산 함수(covariance function) $V(s,t)$는 모든 $(s_1,t_1)$, $(s_2,t_2)\in Q$에 대하여, 다음과 같이 정의한다.

$$m(s,t)=E(X((s,t),\cdot)) \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}V((s_1,t_1),(s_2,t_2))=E\{&[X((s_1,t_1),\cdot)-E(X((s_1,t_1),\cdot))]\\&[X((s_2,t_2),\cdot)-E(X((s_2,t_2),\cdot))]\}\end{aligned} \tag{1.15}$$

함수 $Y: Q\times C(Q)\rightarrow\mathbb{R}$가 모든 $((s,t),f)\in Q\times C(Q)$에 대하여, 다음과 같이 정의될 때, $Y$를 예-위너 과정(Yeh-Wiener process)이라고 한다.

$$Y((s,t),f)=f(s,t) \tag{1.16}$$

예-위너 과정 $Y$는 연속 확률 과정으로서, 다음이 성립함을 (1.11)과 (1.13)으로부터 알 수 있다.

( i ) 모든 $(s,t)\in Q$에 대하여, 평균은 $m(s,t)=0$이다.

( ii ) 모든 $(s_1,t_1)$, $(s_2,t_2)\in Q$에 대하여 공분산은 다음과 같다.

$$V((s_1,t_1),(s_2,t_2))=(min\{s_1,s_2\}-a)(min\{t_1,t_2\}-c) \tag{1.17}$$

## 2. 예-위너 조건 적분

1975년 예(Yeh)[9]는 라돈-니코딤(Radon-Nikodym) 정리로부터 위너 조건 적분을 정의하였고 이를 이용하여 몇 개의 반전 공식(inversion formula)을 유도하였다. 또한 이 공식들을 이용하여 위너 조건 적분을 구하였다.

1983년 정(Chung)과 안(Ahn)[5]은 예-위너 조건 적분을 정의하고 이에 대한 여러 결과들을 얻었다. 1989년에 박(Park)과 스코그(Skoug)[7]는 조건 함수가 벡터값을 가질 때, 예-위너 조건 적분에 대한 대단히 유용하면서도 간단한 공식을 준다면체(quasi-polyhedric) 함수를 이용하여 구하였다. 이 공식은 예가 얻은 결과보다 훨씬 간편하면서도 다양하게 응용할 수 있는 좋은 결과이다.

이 절에서는 사각형 $\Omega$를 $[0, S]\times[0, T]$로 놓고 $C(\Omega)$를 (1.2)와 같은 예-위너 공간이라 하자. $\Omega$의 분할 $\tau=\tau_{mn}$을 다음과 같다고 하자.

$$0=s_0 < s_1 < \cdots < s_m \leq S, \quad 0=t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq T \tag{2.1}$$

분할 $\tau$에 대하여, 함수 $X : C(\Omega)\to\mathbb{R}^{mn}$을 다음과 같이 정의하자.

$$X(f)\equiv(f(s_1, t_1), \cdots, f(s_m, t_n)) \tag{2.2}$$

$B\in\mathbb{R}^{mn}$가 보렐(Borel) 집합일 때, 예-위너 적분 가능한 함수 $F(f)$에 대해서 다음을 만족시키는 함수 $g$가 라돈-니코딤 정리에 의하여 $P_X$ 영(null) 집합을 제외하고는 유일하게 존재한다.

$$\int_{X^{-1}(B)} F(f)dm(f)=\int_B g(\xi)dP_X(\xi) \tag{2.3}$$

함수 $g$의 동치족(equivalence class)을 주어진 $X$에 대한 함수 $F$의 예-위너 조건 적분(conditional Yeh-Wiener integral)이라 하고, 기호 $E(F\mid X)$로 쓰기로 한다. 여기서 동치관계(equivalence relation)는 $P_X-a.e.$에서 같은 관계를 말한다.

우리는 $E(F\mid X)$를 함수 $g$의 동치족에 속하는 특정한 함수로도 사용할 것이다. 따라서 $\mathbb{R}^{mn}$의 보렐 집합 $B$에 대해서 다음과 같다.

$$\int_{X^{-1}(B)} F(f)\ dm(f)=\int_B E(F\mid X)(\xi)\ dP_X(\xi) \tag{2.4}$$

여기서 $\xi\in\mathbb{R}^{mn}$이고 $P_X(B)$는 다음과 같다.

$$P_X(B)=m(X^{-1}(B)) \tag{2.5}$$

예-위너 조건 적분 $E(F \mid X)$는 $\xi$의 함수로서 보렐 측도 가능하고 보렐 측도-$a.e.$에서 유일하게 결정된다.

(2.1)의 분할 $\tau$에 대해서, 주어진 $f \in C(\Omega)$에 대한 준다면체(quasi-polyhedric) 함수 $[f] : \Omega \to \mathbb{R}$를 다음과 같이 정의하자. 먼저 $\Omega_{ij}$를 다음과 같이 놓자.

$$\Omega_{ij} \equiv (s_{i-1}, s_i] \times (t_{j-1}, t_j] \quad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n) \tag{2.6}$$

이제, $(s, t) \in \Omega_{ij}$일 때 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}[f](s,t) = f(s_{i-1}, t_{j-1}) &+ [(s - s_{i-1})/\Delta_i s](f(s_i, t_{j-1}) - f(s_{i-1}, t_{j-1})) \\ &+ [(t - t_{j-1})/\Delta_j t](f(s_{i-1}, t_j) - f(s_{i-1}, t_{j-1})) \\ &+ [(s - s_{i-1})(t - t_{j-1})/(\Delta_i s \, \Delta_j t)]\Delta_{ij} f(s,t).\end{aligned} \tag{2.7}$$

여기서 $\Delta_i s = s_i - s_{i-1}$이고 $\Delta_j t = t_j - t_{j-1}$이며 $\Delta_{ij} f(s,t)$는 다음과 같다.

$$\Delta_{ij} f(s, t) = f(s_i, t_j) - f(s_i, t_{j-1}) - f(s_{i-1}, t_j) + f(s_{i-1}, t_{j-1}) \tag{2.8}$$

비슷한 방법으로, $\xi = (\xi_{11}, \cdots, \xi_{mn}) \in \mathbb{R}^{mn}$에 대한 준다면체 함수 $[\xi] : \Omega \to \mathbb{R}$을 $(s, t) \in \Omega_{ij}$ 에 대하여 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}[\xi](s,t) = \xi_{i-1,j-1} &+ [(s - s_{i-1})/\Delta_i s](\xi_{i,j-1} - \xi_{i-1,j-1}) \\ &+ [(t - t_{j-1})/\Delta_j t](\xi_{i-1,j} - \xi_{i-1,j-1}) \\ &+ [(s - s_{i-1})(t - t_{j-1})/(\Delta_i s \, \Delta_j t)]\,\Delta_{ij}\xi\end{aligned} \tag{2.9}$$

여기서 $\Delta_{ij}\xi$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&\Delta_{ij}\xi = \xi_{i,j} - \xi_{i,j-1} - \xi_{i-1,j} + \xi_{i-1,j-1} \\ &\xi_{0,j} = \xi_{i,0} = 0,\ [\xi](s,t) = 0 \quad (st = 0\text{일 때})\end{aligned} \tag{2.10}$$

각 $f \in C(\Omega)$와 $\xi \in \mathbb{R}^{mn}$에 대하여, $[f]$와 $[\xi]$는 $C(\Omega)$에 속하고, 모든 $i, j$에 대하여 다음과 같다.

$$[f](s_i, t_j) = f(s_i, t_j), \quad [\xi](s_i, t_j) = \xi_{ij} \tag{2.11}$$

각 $\Omega_{ij}$에서 $[f](s,t)$, $[\xi](s,t)$는 두 변수 함수로서 이차함수이고, 한 변수를 고정했을 때는 다른 한 변수의 함수로서 선형함수이다.

함수 $F(f)$가 예-위너 적분 가능한 함수일 때, 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\int_{X^{-1}(B)} F(f)\, dm(f) = \int_B E[F(f-[f]+[\xi])]\, dP_X(\xi) \tag{2.12}$$

(2.4)와 (2.12)로부터 다음이 성립한다.

$$\int_B E(F \mid X)(\xi)\, dP_X(\xi) = \int_B E[F(f-[f]+[\xi])]\, dP_X(\xi) \tag{2.13}$$

식 (2.13)으로부터, $F(f)$가 예-위너 적분 가능한 함수이고, 보렐 측도 가능하면, 다음이 보렐 측도-a.e에서 성립한다.

$$E(F \mid X)(\xi) = E[F(f-[f]+[\xi])] \tag{2.14}$$

식 (2.14)는 예-위너 조건 적분에 대한 간단하지만 매우 유용한 공식으로 예-위너 조건 적분을 조건이 없는(nonconditional) 예- 위너 적분으로 바꾼다.

식 (2.14)를 이용하는 예(例)를 들어보자. $f \in C(\Omega)$에 대해서, 함수 $F(f)$가 다음과 같다고 하자.

$$F(f) = \int_\Omega f(s, t)\, ds\, dt \tag{2.15}$$

그리고 조건 함수 $X$가 (2.2)와 같이 주어졌을 때, $E(F \mid X)(\xi)$ ( $\xi \in \mathbb{R}^{mn}$)를 구해 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E(F \mid X)(\xi) &= E\left(\int_\Omega (f(s,t) - [f](s,t) + [\xi](s,t))\, ds\, dt\right) \\ &= \int_\Omega E[f(s,t) - [f](s,t) + [\xi](s,t)]\, ds\, dt \\ &= \int_\Omega [\xi](s,t)\, ds\, dt \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1} - \xi_{i-1,j} + \xi_{i,j})(\Delta_i s \Delta_j t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

(2.16)의 첫 번째 항등식은 (2.14)로부터, 그리고 두 번째 항등식은 푸비니(Fubini) 정리로부터 얻는다. $E([f]) = E(f) = 0$과 $E(1) = 1$이라는 사실과 준다면체 함수 $[\xi]$의 정의 (2.9)로부터 (2.16)의 마지막 결과를 얻는다.

가장 최근에 저자는 [2]에서 $\Omega$가 다양한 형태, 예를 들면 사각형이 아닌 삼각형(triangular region), 포물형(parabolic region), 원형(circular region) 등에 대한 연속함수들의 공간 $C(\Omega)$를 변형된 예-위너 공간(modified Yeh-Wiener space)이라 하고 이 때의 변형된 예-위너 측도 공간과 변형된 예-위너 적분을 다루었다.

또한, 새로운 준다면체 함수를 찾아 변형된 예-위너 조건 적분(modified conditional Yeh-Wiener integral)을 정의하였다. 그리고 다양한 $\Omega$에 대하여, $C(\Omega)$ 위에 정의된 함수 $F$가 $F(f)=\int_{\Omega} f(s,t)\,ds dt$이고, 조건 함수 $X$가 (2.2)로 주어진 경우, $\xi \in \mathbb{R}^{mn}$에 대한 변형된 예-위너 조건 적분 $E(F \mid X)(\xi)$를 구하였다.

2변수 함수에 대한 함수 공간 적분에서 함수의 정의역 $\Omega$, 조건 $X$ 그리고 $C(\Omega)$ 위에서 주어진 범함수 $F$에 대한 다양한 형태의 연구가 수행되어질 수 있으리라 생각된다. 뿐만 아니라 함수 공간 적분인 변형된 예-위너 조건 적분이 어떤 적분 방정식의 해로서 나타나는지를 살펴보는 것도 좋은 연구 과제라 하겠다. 마지막으로 박, 스코그와 저자[3]에 의하여 연구된 함수 공간의 미분도 앞으로의 연구 과제가 되리라 생각한다.

## 참고 문헌


1. Chang, J.S., "Evaluation of Conditional Wiener integral using Park and Skoug's formula," *Bull. Korean Math. Soc.* 36(1999), 441-450.
2. Chang, J.S., "Modified conditional Yeh-Winer integral with vector-valued conditioning function," to appear in *J. Korean Math. Soc.* (2001).
3. Chang, J.S., Park, C. and Skoug, D., "Fundamental theorem of Yeh-Wiener calculus," *Stochastic Anal. and Appl.* 9(1991), 245-262.
4. Chang, K.S., Ahn, J.M. and Chang, J,S., "An evaluation of the conditional Yeh-Wiener integral," *Pacific J. Math.* 124(1986), 107-117.
5. Chung, D.M. and Ahn, J.M., "Conditional Yeh-Wiener integrals," *J. Korean Math. Soc*, 20(1983), 209-221.
6. Kitagawa, T., "Analysis of variance applied to function spaces," *Mem. Fac. Sci, Kyusyu Univ. Ser. A* Vol Ⅵ(1951), 41-53.
7. Park, C. and Skoug, D., "Conditional Yeh-Wiener integrals with vector-valued conditioning function," *Proc. Amer. Math. Soc.* 105(1989), 450-461.
8. Yeh, J., "Wiener measure in a space of functions of two variables," *Trans. Amer. Math. Soc.* 95(1960), 438-450.
9. Yeh, J., "Inversion of conditional Wiener integrals," *Pacific J. Math.* 59(1975), 623-638.
10. 장건수, **위너적분론**, 민음사, 1998.
11. 장주섭, "함수 공간 적분에 대한 소고( I )," **한국수학사학회지** 제 12 권 제 2 호(1999), 41-46.