Historia Mathematica Vol. 13, No. 2, 2000, 41-48

M-아이디얼의 기원과 그의 신비성

한양대학교 수학과 **조충만**

Abstract

In this paper, we explore the origin of the notion of an M-ideal, and appreciate the richness of algebraic and geometric properties of an M-ideal.

0. 서론

1972년 Alfsen과 Effros[2]가 바나흐 공간 내에서 M-아이디얼의 개념을 소개한 이후 많은 학자들이 M-아이디얼을 연구해 왔으며, 그 결과 M-아이디얼은 바나흐 공간뿐만 아니라 최적이론(approximation theory), 조화해석, 작용소 공간(operator space) 등 수학의 여러 분야에서 유용하게 응용되고 있다. 따라서 M-아이디얼은 해석학 분야에서는 이제 더 이상 생소한 용어가 아니다. 그런데 M-아이디얼이라는 용어를 처음 듣는 사람들 중에는 자기 전공과 관계없이 많은 사람들이 M-아이디얼에 대한 호기심을 갖는다. M-아이디얼은 대수적 아이디얼(algebraic ideal)인지 또 M은 무엇을 의미하는지 궁금하게 여긴다.

수학의 어느 개념이 정의될 때와 마찬가지로 M-아이디얼이 정의될 때 M과 아이디얼이 결합된 충분한 근거가 있다. M-아이디얼이 정의된 지는 30년이 미쳐 못되지만 그의 근원은 50년 전인 1950년으로 거슬러 올라간다. 1950년 Dixmier[11]는 H가 separable Hilbert 공간일 때, H상의 콤팩트선형작용소들의 공간 $K(H)$는 H상의 연속선형작용소 공간 $L(H)$ 내에서 현재의 M-아이디얼 조건을 만족함을 증명하였다. 그 후 1960년대 중반이후부터 바나흐 공간 내에서 M-구조 이론이 활발히 연구된 과정에서 M-아이디얼의 개념이 자연스럽게 탄생하게 되었다. 한마디로 말하자면 M-구조 이론은 어떤 바나흐 공간이 CK-공간(콤팩트 하우스도르프 공간 K 상에서 스칼라체로의 연속함수공간)과 어느 정도 닮았는지를 측정하는 이론이며 CK-공간 내에서 M-아이디얼은 대수적 아이디얼이며 역으로 대수적 아이디얼은 M-아이디얼이다. 여기서 용어 M-아이디얼의 아이디얼 부분의 모습을 나타낸다. 그렇다면 M은 어디서 왔을까? M은 maximum norm에서 유래되었다고 한다.

이 논문에서는 M-아이디얼이 어떤 배경에서 정의되었는지 그 기원을 추적하고, M-아이디얼을 정의하고 이것을 기하학적으로 특징지은 Alfsen과 Effros의 직관이 어느 정도까지 정확했는지를 고찰하기로 한다. 그리고 M-아이디얼 J의 대수학적, 기하학적 성질을 탐험하기로 한다.

1. L-summand와 M-summand

J가 바나흐 공간 X의 폐부분 공간이며 X의 어떤 폐부분 공간 J'에 대하여 $X=J\oplus J'$ (대수적 직합)으로 표시되고, 모든 $j\in J$와 $j'\in J'$에 대하여 다음 노옴 조건을 만족할 때, J를 X의 L-summand라 부른다.

$$\|j+j'\| = \|j\| + \|j'\|$$

이 때, $X=J\oplus_1 J'$으로 표기한다. 그리고 $X=J\oplus J'$이며, 모든 $j\in J$와 $j'\in J'$에 대하여 다음 노옴 조건을 만족할 때 J를 X의 M-summand라 부른다.

$$\|j+j'\| = \max\{\|j\|, \|j'\|\}$$

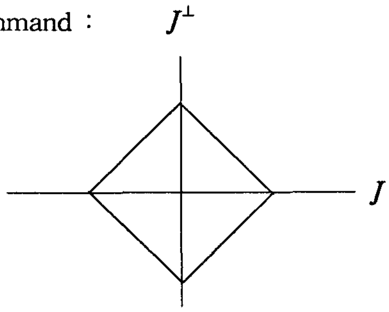
이 때, $X=J\oplus_\infty J'$으로 표기한다. J가 X의 L-summand(또는 M-summand)이면 J' 역시 X의 L-summand(또는 M-summand)임은 자명하다. $X=J\oplus_1 J'$ (또는 $X=J\oplus_\infty J'$) 이고 모든 $j\in J$와 $j'\in J'$에 대하여 $P(j+j')=j$로 정의된 함수 P는 X에서 J 위로의 사영이며 L-사영(또는 M-사영)이라고 말하는데 L-사영과 M-사영은 서로 쌍대 개념이다. 즉 P가 L-사영이면 P의 adjoint P^*는 M-사영이며 P가 M-사영이면 P^*는 L-사영이다. 이 사실은 X^*가 X의 쌍대 공간을 나타낼 때 등식 $(J\oplus_1 J')^* = J^*\oplus_\infty J'^*$, $(J\oplus_\infty J')^* = J^*\oplus_1 J'^*$로부터 알 수 있다.

L-summand와 M-summand의 간단한 예로서 2차원 실벡터공간 $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$: 실수체)에서 $J=\mathbb{R}\times\{0\}$, $J'=\{0\}\times\mathbb{R}$로 취하고 모든 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$에 대하여 다음과 같이 정의하자.

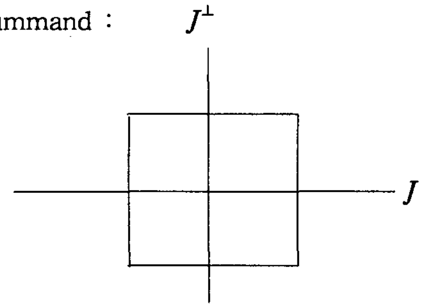
$$\|x\|_1 = |x_1|+|x_2| \ , \ \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

그러면 $\|\cdot\|_1$ 와 $\|\cdot\|_\infty$는 $\mathbb{R}^2$상의 노옴이며 J는 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$내의 L-summand이며 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$내의 M-summand가 된다. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ 과 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$의 기하학적 성질은 이들의 폐단위구 모양으로 나타낸다.

L-summand :



M-summand :



보다 일반적으로 (Ω, Σ, μ)가 측도 공간이고 $E \in \Sigma$일 때 $f|_E = 0$ 인 $f \in L_1(\mu)$ (또는 $f \in L_\infty(\mu)$)들로 형성된 부분공간은 $L_1(\mu)$ (또는 $L_\infty(\mu)$) 내의 L-summand(또는 M-summand)이다. 따라서 $L_1(\mu)$ (또는 $L_\infty(\mu)$)는 충분히 많은 L-summand(또는 M-summand)를 포함하고 있다. 앞에서 언급한 $\mathbb{R}^2$의 경우는 $\Omega = \mathbb{R}^2$이고 μ가 셈측도 (counting measure)인 특수한 경우이다. 그렇다면 L-summand나 M-summand를 다른 바나흐 공간 내에서도 흔히 볼 수 있는가? 이에 대한 대답은 부정적이다. 아주 구체적인 고전 바나흐 공간 $C_0(K)$의 경우를 살펴보자. 여기서 K는 locally compact Hausdorff 공간이고 $C_0(K)$는 K에서 스칼라체 F($\mathbb{R}$ 또는 $\mathbb{C}$)로의 연속함수 $f : K \to F$로서 ∞에서 0이 되는(즉, 임의의 $\varepsilon > 0$에 대하여 $x \in C$일 때 항상 $|f(x)| < \varepsilon$이 되는 compact set $C \subseteq K$가 존재함) 함수 전체의 바나흐 공간이다. 만일 E가 K의 clopen subset(폐집합이고 동시에 개집합)이면 $J_E = \{f \in C_0(K) : f|_E = 0\}$이 $C_0(K)$의 M-summand임은 자명하다. 역으로 $C_0(K)$ 내의 모든 M-summand는 어떤 K의 clopen subset에 대하여 J_E의 형태를 갖는다 [3, p. 40]. 그러므로 $C_0(K)$가 nontrivial M-summand를 갖느냐 하는 문제는 K가 nontrivial clopen subset을 갖느냐에 달려있다. K가 폐구간 [0, 1]일 경우에는 [0, 1]가 nontrivial clopen subset을 포함하고 있지 않기 때문에 $C_0([0,1])$는 nontrivial M-summand를 포함하지 못한다.

2. M-아이디얼

K가 compact Hausdorff 공간일 때 K에서 스칼라체 F로의 모든 연속함수들의 바나흐 공간 $C(K)$를 생각하자. 이러한 형태의 공간을 CK-공간이라 부른다. 이 경우에는 $C_0(K)$는 $C(K)$와 일치한다. $f, g \in C(K)$이고 $\omega \in K$일 때 $(fg)(\omega) = f(\omega)g(\omega)$에 의해 정의

되는 곱셈에 대하여 $C(K)$는 단위원을 갖는 가환 바나흐 대수를 이룬다.

앞에서 언급한 바와 같이 1960년대 중반 이후 M-구조 이론의 연구가 활발히 진행되면서 바나흐 공간이 어느 정도까지 CK-공간의 성질을 갖느냐를 측정할 수 있는 개념을 찾게 되었다. 이 시점에서는 M-summand가 유일한 후보자이겠지만 위에서 관찰했던 바와 같이 $C(K)$ 공간이 nontrivial M-summand를 갖지 못할 수도 있다. 즉 M-summand의 조건은 너무 강하다. 따라서 보다 약한 개념을 찾게 되었다. 바나흐 공간 이론에서 바나흐 공간 X의 어떤 성질은 그의 쌍대 공간 X^*의 성질들로부터 얻어낼 수 있다. J가 바나흐 공간 X의 부분공간일 때 J의 소멸자 $J^{\perp}=\{x^*\in X^*: x^*|_J=0\}$가 X^* 내에서 X의 M-summand M의 소멸자 $M^{\perp}$과 같은 기하학적 성질을 가진다면 J가 M-summand와 비슷한 성질을 가지리라 기대되었다. 이것은 X 내에서 L-projection과 M-projection의 쌍대성(동등하게 M-summand의 소멸자는 L-summand이고 L-summand의 소멸자는 M-summand)에 근거가 있다. 이런 배경에서 M-summand보다 약한 M-아이디얼의 개념을 다음과 같이 정의하였다.

정의. J가 바나흐 공간 X의 폐부분공간이라 하자. J의 소멸자 $J^{\perp}$이 X^* 내의 L- summand일 때 J를 X내의 M-아이디얼이라 부른다.

이제 다시 $C_0(K)$ 공간으로 돌아가자(K는 locally compact Hausdorff 공간). 이 경우에 $C_0(K)$ 내의 M-아이디얼은 K의 어떤 폐부분집합 C에 대하여 $J_C=\{f\in C_0(K): f|_C=0\}$인 형태를 취하며, 역으로 그런 형태의 부분공간은 M-아이디얼이다[3, p. 40]. 따라서 $C_0(K)$는 충분히 많은 M-아이디얼을 갖고 있다. 그리고 K가 compact Hausdorff 공간이면 $C(K)$ 내의 M-아이디얼은 대수적 아이디얼이며, 역으로 대수적 아이디얼은 M-아이디얼이다[3, p. 40]. 즉, $C(K)$ 내에서 아이디얼과 M-아이디얼은 일치한다. 1950년 Dixmier[11]는 H가 힐베르트 공간일 때 H에서의 콤팩트작용소 전체의 아이디얼 $K(H)$의 소멸자 $K(H)^{\perp}$은 H에서의 연속선형작용소 전체의 공간 $L(H)$의 쌍대 공간 $L(H)^*$ 내에서 L-summand임을 증명하였다. 이 사실이 M-아이디얼을 정의하는 계기가 되었다고 Effros는 말했다.

3. M-아이디얼의 신비성

바나흐 공간 X의 쌍대 공간 X^* 내에서 $J^{\perp}$의 성질에 의하여 정의된 M-아이디얼 J는 X 내에서 흥미로운 대수학적, 기하학적 성질을 가지고 있다.

대수학적 성질로 가환 바나흐 대수 $C(K)$ 내에서는 M-아이디얼과 아이디얼이 일치한다는 사실은 앞에서 이미 언급한 바 있다. 이 사실은 C^*-대수 내에서도 마찬가지이다. 즉 C^*-대수 내에서 M-아이디얼은 대수적 아이디얼이며, 역으로 대수적 아이디얼은 M-아이디얼이다[23]. 일반적으로 단위원을 갖는 복소 바나흐 대수 내에서 모든 M-아이디얼은 부분대수(subalgebra)이며 그 바나흐 대수가 가환이면 모든 M-아이디얼은 대수적 아이디얼이다[23]. 바나흐 대수 내의 M-아이디얼 연구 중에 특별한 흥미를 끌고 많이 연구 되어온 문제는 바나흐 공간 X상의 연속선형작용소들의 대수 $L(X)$ 내에서 콤팩트작용소들의 아이디얼이 M-아이디얼이 되는가를 밝히는 문제이며 현재 많은 연구결과가 나와 있다[5, 6, 8, 19, 20]. X가 힐베르트 공간이면 $K(X)$는 M-아이디얼이며 $L(X)$가 C^*-대수이므로 M-아이디얼과 아이디얼이 일치한다. 힐베르트 공간의 특성 중에는 그 공간의 단위구(unit ball)의 모양이 둥글둥글하다는 것과 힐베르트 공간의 쌍대 공간 역시 힐베르트 공간이라는 사실이다. 여기서부터 바나흐 공간 X의 단위구의 기하학적인 성질이 $L(X)$ 내의 M-아이디얼의 대수학적인 성질과 관계가 있으리라는 추측이 나왔었는데, 이 추측이 실제로 맞았다는 것이 판명되었다. 바나흐 공간 중에서 그의 단위구가 힐베르트 공간의 단위구와 제일 유사한 바나흐 공간은 uniformly convex 공간이다. X가 uniformly convex 바나흐 공간이면 $L(X)$ 내의 모든 M-아이디얼은 대수적 left ideal이며, X와 X^*가 uniformly convex 공간이면 $L(X)$ 내의 모든 M-아이디얼은 대수적 아이디얼이다[9].

이제 바나흐 공간 X 내의 M-아이디얼 J의 기하학적 성질을 관찰하기로 하자. Alfsen과 Effros는 M-아이디얼을 정의했던 그들의 original paper[2]에서 X 내의 M-아이디얼 J를 X 내에서 구의 교차 성질(intersection properties of balls)에 의하여 다음과 같이 특징지었다.

정의. 자연수 n에 대하여 바나흐 공간 X의 폐부분공간 J가 X 내에서 n-구 성질을 갖는다는 말은 중심이 x_i이고 반경이 r_i인 개구 $B(x_i, r_i)$ $(i=1,\cdots,n)$들이 $\bigcap_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ 이고 $J \cap B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ $(i=1,\cdots,n)$일 때는 항상 $J \cap (\bigcap_{i=1}^{n} B(x_i, r_i)) \neq \emptyset$ 임을 뜻한다.

정리[2] 바나흐 공간 X의 부분공간 J에 대하여 다음 명제는 동치이다.

(a) J는 X의 M-아이디얼이다.

(b) J는 X 내에서 3-구 성질을 갖는다.

(c) J는 X 내에서 모든 자연수 n에 대하여 n-구 성질을 갖는다.

신비스러운 것은 X의 기하학적인 성질이 $L(X)$ 내의 M-아이디얼의 대수학적인 성질로 이어지며, 또한 X^* 내에서 $J^\perp$의 대수학적, 해석학적 성질에 의해 정의된 M-아이디얼이 X 내에서 J의 기하학적 성질로 특징지어진다는 사실이다.

M-아이디얼의 기하학적 성질은 Approximation 문제에 대단히 강력한 도구로 사용된다 [19, 26]. 노옴 공간 X 내의 폐부분공간 J가 proximinal이라는 뜻은 임의의 $x \in X-J$에 대하여 다음을 만족하는 $j_0 \in J$이 존재함을 의미한다.

$$\|x-j_0\| = \inf\{\|x-j\| : j \in J\}$$

이 경우에 j_0을 x의 best approximant라 부른다. J가 X의 유한차원 부분공간이면 항상 proximinal이지만 무한차원 공간일 때에는 상황이 다르다. 모든 $x \in X-J$에 대하여 x의 best approximant j_0이 J 내에 유일하게 존재하는 부분공간을 Chebychev 부분공간이라 하는데 힐베르트 공간의 폐부분공간은 모두 Chebychev 공간이다. 흥미로운 것은 J가 바나흐 공간 X 내의 M-아이디얼이면 J는 proximinal임은 물론이고, 모든 $x \in X-J$에 대하여 x의 best approximant가 대단히 많이 존재한다는 사실이다. 보다 정확히 말하면, 모든 $x \in X-J$에 대하여 x의 best approximant들은 J를 span한다[16]. 이러한 성질은 바나흐 공간 내에서 찾아보기가 아주 드문 성질이다.

이 외에도 M-아이디얼 $J \subseteq X$는 J에서 정의된 모든 유계선형범함수 $f \in J^*$가 노옴을 보존하는 X 상의 선형범함수로 유일하게 확장되는 성질 등 여러 가지 다양한 성질들을 가지고 있는데, 그 이유는 M-아이디얼의 조건이 아직도 너무 강하기 때문이다.

참고 문헌

1. Alfsen, E.M. and E.G. Effros, "Structure in real Banach spaces I," *Ann. of Math. (2)* 96(1972), 98-128.
2. Alfsen, E.M. and E.G. Effros, "Structure in real Banach spaces II," *Ann. of Math. (2)* 96(1972), 129-173.
3. Behrends, E., *M-structure and the Banach-Stone Theorem,* Lecture Notes in Mathematics 736, Springer-Verlag (1979).
4. Cho, C.-M., "The metric approximation property and intersection properties of balls," *J. Kor. Math. Soc.* 31(1994), 467-475.
5. Cho, C.-M., "M-ideals of Compact Operators," *Pacific J. Math. (2)* 138(1989), 237-242.

6. Cho, C.-M., “A Note on M-ideals of Compact Operators,” *Canad. Math. Bull.* 32 (1989), 434-440.
7. Cho, C.-M., “Best Approximation by Compact Operators,” *Bull. Kor. Math. Soc. (2)* 25(1988), 267-273.
8. Cho, C.-M. and W.B. Johnson, “A Characterization of subspaces X of l_p for which $K(X)$ is an M-ideal in $L(X)$,“ *Proc. Amer. Math. Soc.* 93(1985), no 3, 466-470.
9. Cho, C.-M. and W.B. Johnson, “M-ideals and ideals in $L(X)$,” *J. Operator Theory* 16 (1986) no 2, 245-260.
10. Cho, C.-M. and W.S. Roh, “A Note on M-ideals in Certain Algebras of Operators,” *Interna. J. Math. and Math. Sci.* 23(2000), 681-685.
11. Dixmier, J., “Les fonctionnelles lineaires sur l'ensemble des operateurs bornes d'un espace de Hilbert,” *Ann. of Math.* 51(1950), 387-408.
12. Flinn, P.H., “A characterization of M-ideals in $B(l_p)$ for $1 < p < \infty$,” *Pacific J. Math.* 98(1982), no 1. 73-80.
13. Harmand, P. and A. Lima, “Banach spaces which are M-ideals in their biduals,” *Trans. Amer. Math. Soc.* 283(1983), 253-264.
14. Harmand, P., D. Werner and W. Werner, *M-ideals in Banach spaces and Banach Algebras,* Lecture Notes in Mathematics Vol. 1547, Springer Berlin-Heiderberg-New York (1993).
15. Holmes, R., *M-ideals in approximation theory,* Approximation theory II, Academic Press, (1976), 391-396.
16. Holmes, R., B. Scranton and J. D. Ward, “Approximation from the space of compact operators and other M-ideals,” *Duke Math. J.* 42(1975), 259-269.
17. Kalton, N.J., “M-ideals of compact operators,” *Illinois J. Math.* 37(1993), 147-169.
18. Kalton, N.J. and D. Werner, “The M-ideal structure of some algebra of bounded linear operators,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 125(1995), no. 3, 493-500.
19. Lima, A., “Intersection properties of balls and subspaces of Banach spaces,” *Trans. Amer. Math. Soc.* 227(1977), 1-62.
20. Lima, A., “M-ideals of compact operators in classical Banach spaces,” *Math. Scand.* 44(1979), 207-217.
21. Lima, A., “On M-ideals and best approximation,” *Indiana Univ. Math. J.* 31(1982), 27 -36.
22. Lima, A., “Uniqueness of Hahn-Banach extensions and liftings of linear dependences,” *Math. Scand.* 53(1983), 97-113.
23. Smith, R.R. and J. D. Ward, “M-ideal structure in Banach algebras,” *J. Funct. Anal.* 27(1978), 337-349.

24. Smith, R.R. and J. D. Ward, "Applications of convexity and M-ideal theory to quotient Banach algebras," *Quart. J. Math. Oxford (2)* 30(1979), no. 119, 365-384.
25. Werner, D., "M-ideals and the 'basic inequality'," *J. Approx. Theory* 76(1994), no. 1, 21-30.
26. Yost, D.T., "Best approximation and intersection of balls in Banach spaces," *Bull. Austral. Math. Soc.* 20 (1979), 285-300.