*Historia Mathematica Vol. 13, No. 1, 2000, 63-76*

# 피보나치 수열에 관한 고찰

제주대학교 수학과 **양영오**


## Abstract

In this paper we survey the main properties of a Fibonacci sequence, and find out examples of Fibonacci sequence in our nature and daily life.


## 0. 서론

피보나치 수열의 개념은 1202년에 간행된 피보나치(Leonadro Fibonacci)의 유명한 저서 산반서(算盤書, Liber abaci)의 문제에서 파생된 것인데, '피보나치 수열'이란 용어는 19세기 프랑스 수학자 에두아르뤼카가 처음으로 사용했다. 산반서에 제시된 피보나치 수열의 문제는 다음과 같다.

> 새로 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 들판에 있다고 하자. 이 토끼들은 한 달이면 성장해서 어미토끼가 되고 짝을 지어 두 번째 달부터 매월 한 달에 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다. 그리고 태어난 새끼 토끼도 생후 1개월이 되면 어미 토끼가 되어 생후 2개월이 될 때부터 매월 암수 한 쌍씩의 새끼를 계속해서 낳는다고 가정할 때, 일 년이 되면 한 쌍의 토끼로부터 몇 쌍의 토끼가 생기는가?(단, 질병 등으로 죽는 일은 없다고 가정하자.)

이 문제는 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 문제 중 하나이며 수학의 아름다움을 추구하는 대상이 되고 있다. 또한 고등학교 수학 교과서에서 사고력과 문제해결 능력을 신장시키기 위하여 피보나치 수열이 연구과제 또는 수학산책 난에 단편적으로 소개되고 있는 실정이다.

이 글에서는 피보나치 수열의 중요한 성질들을 살펴보고, 이 수열이 자연현상(꽃잎 · 가지 · 줄기 · 꽃씨의 배열, 솔방울, 수벌의 혈통 등)이나 음악, 증권시장, 실생활 등의 분야에서 어떻게 나타나고 응용되고 있는가를 조사하고자 한다.

## 1. 피보나치의 생애와 업적

(1) 피보나치(Leonardo Pisano, 본명은 Leonardo Fibonacci, 1170 피사(?)~1240이후)는 피사 상인인 아버지 굴리엘모의 아들로 피사의 상업 중심지에서 태어났다. 그의 아버지는 그곳에서 상업과 관련된 일에 종사하고 있었다. 소년 시절, 레오나드로는 그의 아버지가 관세 지배인으로 근무했던, 아프리카의 북부 연안에 위치한 보우기(Bougie, 지금의 알제리아 베자이아)에서 교육을 받았고 함께 생활하게 되었다. 아버지의 직업 영향을 받은 레오나드로는 소년 시절부터 산술에 흥미를 느끼기 시작했다. 그 이후 이집트, 시칠리아, 그리스, 시리아 등으로 여행을 하면서 동부와 아라비아의 수학을 접하게 되었다. 인도-아라비아의 계산술의 실용적 우수성을 확신하게 된 피보나치는 1202년에 고향으로 돌아와서 마침내 그의 유명한 저서 **산반서**를 출간하였다. 특히 1220년에 출간된 피보나치의 **실용기하학**(Practica geometriae)은 유클리드적 엄밀함과 약간의 독창성을 가지고 능숙하게 기하학과 삼각법을 다룬 방대한 자료집이다. 그는 또한 1225년경에는 **제곱근서**(Liber quadratorum)를 저술하였는데, 이 저서는 부정해석학에 대한 매우 독창적인 이론을 제시하고 있는 저서로서, 피보나치로 하여금 이 분야에서 디오판토스와 페르마 사이의 가장 뛰어난 수학자로 명성을 떨치게 됐다. 그의 저서들은 모두 당대 학자들의 능력을 훨씬 뛰어넘는 작품이었다[8].

(2) 저서 **산반서**는 우리에게도 잘 알려진 책으로 산술과 초등대수에 관하여 쓰여졌고 인도·아라비아숫자를 유럽으로 소개하는 데 큰 역할을 하였다. 15장으로 된 이 책은 새로운 숫자를 읽고 쓰는 방법, 정수와 분수를 계산하는 방법, 제곱근과 세제곱근을 구하는 방법, 임시위치법과 대수적 과정에 의한 1차 및 2차 방정식의 해법 등을 설명하고 있다. 그러나 방정식의 음근과 허근이 인정되지 않았고 그의 대수는 수사적이었다. 대부분의 응용이 교역, 합자경영, 혼합법, 측량기하 등에 관한 것으로 이 책에는 많은 문제가 실려 있는데 이것은 수세기 동안 그 이후의 저술가들에게 수학 문제의 보고(寶庫)가 되었다. 이 책에 실려 있는 문제 중에는 그보다 훨씬 이전, 린드 파피루스에 나온 문제를 변형시킨 듯한 것도 있다. 다음은 **산반서**에 나오는 토끼번식의 문제이다[8].

> 새로 태어난 암수 한 쌍의 토끼가 들판에 있다고 하자. 이 토끼들은 한 달이면 성장해서 어미토끼가 되고 짝을 지어 두 번째 달부터 매월 한 달에 암수 한 쌍의 새끼를 낳는다. 그리고 태어난 새끼 토끼도 생후 1개월이 되면 어미 토끼가 되어 생후 2개월이 될 때부터 매월 암수 한 쌍씩의 새끼를 계속해서 낳는다고 가정할 때, 일 년이 되면 한 쌍의 토끼로부터 몇 쌍의 토끼가 생기는가?(단, 질병 등으로 죽는 일은 없다고 가정하자.)

첫 번째 달 말에는 토끼는 짝을 짓는다. 하지만 여전히 한 쌍의 토끼만이 있다. 두 번째 달 말에는 암컷이 새로운 한 쌍을 낳는다. 그래서 들판에는 두 쌍의 토끼가 있다. 세 번째 달 말에는 처음의 암컷이 두 번째 쌍의 토끼를 낳아서 들판에는 모두 세 쌍의 토끼가 있게 된다. 네 번째 달 말에는 처음의 암컷이 또 다른 쌍의 토끼를 낳고, 두 달 전에 태어난 암컷

이 처음으로 한 쌍의 토끼를 낳게 된다. 그래서 모두 다섯 쌍의 토끼가 들판에 있다. 이런 식으로 계산하여 나가면, 들판에 있는 토끼 쌍의 수는 매달 초에 1, 1, 2, 3, 5, 8, …이다. 이 수열이 어떻게 형성되었는지, 그리고 어떻게 계속될지 알 수 있는가? 이 토끼의 문제는 현실적인가? 이 문제에서는 오누이가 짝을 짓고 있다. 유전학적으로 문제를 일으킬지도 모른다. 각 쌍의 암컷은 어떤 수컷과도 짝을 지을 수 있고 자식을 낳을 수 있다고 가정함으로써 이 문제를 피해갈 수 있다. 실제와는 다른 또 하나의 문제는 정확히 두 마리씩, 하나는 수컷, 하나는 암컷을 낳는다는 점이다. 다음의 표는 월별 토끼집단의 번식표이다.

**[표 1] 토끼 집단의 번식표**

| 달 | 성인 토끼(쌍) | 어린 토끼(쌍) | 전체 쌍의 수 |
|---|---|---|---|
| 1월 | | 1 | 1 |
| 2월 | 1 | | 1 |
| 3월 | 1 | 1 | 2 |
| 4월 | 2 | 1 | 3 |
| 5월 | 3 | 2 | 5 |
| 6월 | 5 | 3 | 8 |
| 7월 | 8 | 5 | 13 |
| 8월 | 13 | 8 | 21 |
| 9월 | 21 | 13 | 34 |
| 10월 | 34 | 21 | 55 |
| 11월 | 55 | 34 | 89 |
| 12월 | 89 | 55 | 144 |

## 2. 피보나치 수열의 특성

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …에서 항의 형성 규칙을 보면 임의의 항은 앞의 두 개의 항의 합과 같다. 이 수열의 항들을 $F_1$, $F_2$, $F_3$, $F_4$, …으로 나타내면 세 연속되는 피보나치 수들은 다음과 같은 점화식을 가지고 있다.

$$F_1 = F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

위의 점화식을 이용하여 비네(J. P. M. Binet, 1786-1856)가 1843년에 발견한 다음 공식을 유도할 수도 있다.

**성질 1(비네의 공식).**

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \qquad \left( \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

**증명.** $n=1$일 때 (우변)$=(\alpha-\beta)/\sqrt{5}=1=F_1=$(좌변). 따라서 주어진 등식은 $n=1$일 때 성립한다. $n=k+1$일 때 주어진 등식이 성립한다고 가정하자. 이때 $n=k+1$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}F_{k+1}=F_k+F_{k-1}&=\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^{k-1}-\beta^{k-1}}{\sqrt{5}}\\&=\frac{(\alpha^k+\alpha^{k-1})-(\beta^k+\beta^{k-1})}{\sqrt{5}}\\&=\frac{\alpha^{k-1}(\alpha+1)-\beta^{k-1}(\beta+1)}{\sqrt{5}}\\&=\frac{\alpha^{k-1}\cdot\alpha^2-\beta^{k-1}\cdot\beta^2}{\sqrt{5}}\\&=\frac{\alpha^{k+1}-\beta^{k+1}}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

따라서 귀납법에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 $n$에 대하여 성립한다. ▲

피보나치 수열 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, …에서 이웃하는 항의 비로 구성되는 다음 수열의 극한은 비네의 공식에 의하여 $\lim_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n=(\sqrt{5}+1)/2$임을 알 수 있다. 이것은 이른바 황금비라 한다.

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1.5,\ \frac{5}{3}=1.66,\ \frac{8}{5}=1.60,\ \frac{13}{8}=1.625,\ \cdots$$

첨수가 증가함에 따라 피보나치 수는 얼마나 빨리 커지는가? 라는 질문이 당연하게 나온다. 위의 비네의 공식은 이런 질문에 대해서도 완벽한 해답을 제시한다.

**성질 2.** 피보나치 수 $F_n$은 초항이 $\alpha/\sqrt{5}$, 공비가 $\alpha$인 등비수열의 제$n$항 $a_n$과 가장 가까운 정수이다.

**증명.** $F_n$과 $a_n$의 차의 절대값이 항상 1/2보다 작다는 것을 보여주면 충분하다. 그런데

$$|F_n-a_n|=\left|\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right|=\left|\frac{\alpha^n-\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right|=\frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}$$

이고, $\beta=-0.618\cdots$이므로 $|\beta|<1$이다. 따라서 임의의 자연수 $n$에 대하여 $|\beta|^n<1$이고 $\sqrt{5}>2$이므로 $|\beta|^n/\sqrt{5}<1/2$이다. 따라서 정리의 증명은 끝난다. ▲

비네의 공식에 의하여 다음 결과를 얻을 수 있다.

성질 3(Cartalan, 1886). 임의의 자연수 $n$과 $r \le n$에 대하여 다음이 성립한다.

$$F_{n-r}F_{n+r}+(-1)^{n-r}F_r^2=F_n^2$$

성질 4. $F_{n+1}={}_nC_0+{}_{n-1}C_1+{}_{n-2}C_2+\cdots$

증명. 주어진 등식은 명백히 $n=1$, 2에 대하여 성립한다. $n=k-1$과 $n=k$에 대하여 주어진 등식이 성립한다고 가정한다면 다음을 얻는다.

$$F_{k+1}={}_kC_0+{}_{k-1}C_1+{}_{k-2}C_2+\cdots,\quad F_k={}_{k-1}C_0+{}_{k-2}C_1+{}_{k-3}C_2+\cdots$$

두 식의 변변을 더하면 다음을 얻을 수 있다.

$$F_{k+1}+F_k={}_kC_0+({}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1)+({}_{k-2}C_1+{}_{k-2}C_2)+\cdots$$

그런데 ${}_kC_0={}_{k+1}C_0$, ${}_{k-1}C_0+{}_{k-1}C_1={}_kC_1$이므로 위의 식은 다음과 같이 된다.

$$F_{k+2}={}_{k+1}C_0+{}_kC_1+{}_{k-1}C_2+\cdots$$

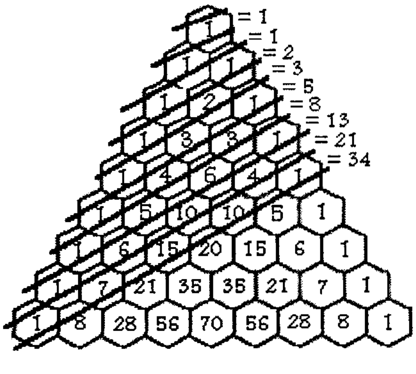
즉, 주어진 등식은 $n=k+1$에 대하여 성립한다 따라서 수학적 귀납법에 의하여 주어진 등식은 자연수 $n$에 대하여 성립한다. ▲

파스칼의 삼각형에서 피보나치 수를 찾을 수 있는가? 해답은 성질 4에 의하여 다음의 공식을 얻는다.

$$F_n=Fib(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k-1}{k}$$

여기서 기호 ( )는 파스칼의 삼각형에 나타나는 $n-k-1$번째 행, $k$번째 열의 수이다(그림 1 참조).

수학적 귀납법을 이용하여 다음의 결과들을 얻을 수 있다.



[그림 7] 파스칼의 삼각형

성질 5. $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n$ (단, $n\ge 2$)

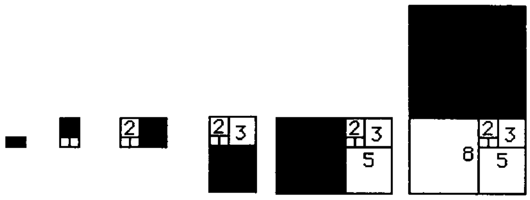
성질 6. $F_{m+n}=F_{m-1}F_n+F_mF_{n+1}$

각 직사각형은 이전의 정사각형들로 만들어져 직사각형을 만드는 조각그림 맞추기 놀이를 살펴보자. 모든 정사각형과 직사각형들은 길이가 피보나치 수인 변을 갖는다. 이런 정사각형과 직사각형들의 형태에서 보여지는 수학적인 관계는 무엇인가? 직사각형의 넓이는 이를 구성하는 모든 정사각형의 넓이들의 총합으로 표현할 수 있다. 그림 2에서 보듯이 다음이 성립한다.

$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2+13^2=13\times 21$$

또 작은 직사각형들의 면적도 다음과 같다.

$$1^2+1^2=1\times 2$$
$$1^2+1^2+2^2=2\times 3$$
$$1^2+1^2+2^2+3^2=3\times 5$$
$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=5\times 8$$
$$1^2+1^2+2^2+3^2+5^2+8^2=8\times 13$$




[그림 8] 직사각형의 면적

이 그림은 실제로, 피보나치 수의 제곱을 얼마만큼이든지 더할 때에도 성립한다는 사실을 보여주고 있다. 그것은 항상 제곱의 합에 쓰여진 가장 큰 피보나치 수에 다음 피보나치 수를 곱한 값이다. 이 관계를 수학적인 언어로 표현하면 다음의 성질을 얻을 수 있다.

**성질 7.** $F_1^2+F_2^2+\cdots+F_n^2=F_nF_{n+1}$

**성질 8.** 연속하는 피보나치 수 $F_n$과 $F_{n+1}$은 서로 소이다.

**증명.** $d$는 $F_n$과 $F_{n+1}$을 나누는 1보다 큰 자연수라 하자. 이때 $F_{n-1}(=F_{n+1}-F_n)$도 $d$로 나누어진다. 이 사실과 $F_n-F_{n-1}=F_{n-2}$로부터 $F_{n-2}$도 $d$로 나누어진다. 이런 과정을 계속하여 반복하면 $d|F_{n-3}$ , $d|F_{n-4}$, $\cdots$이고 결국 $d$는 $F_1$도 나눈다. 그러나 $F_1=1$이므로 이것은 어떠한 자연수 $d>1$로 나눌 수 없다. 이는 모순이 되므로 $d=1$이다. 따라서 $(F_n, F_{n+1})=1$이다. ▲

$\gcd(F_{n+2}, F_{n+1})$를 구하기 위하여 유클리드 알고리즘을 적용한다.

$$F_{n+2}=1\cdot F_{n+1}+F_n,$$
$$F_{n+1}=1\cdot F_n+F_{n-1},$$
$$\vdots$$
$$F_4=1\cdot F_3+F_2,$$
$$F_3=2\cdot F_2+0$$

분명히 나누는 횟수는 정확히 $n$이다. 따라서 유클리드 알고리즘에 의하여 $\gcd(F_{n+2}, F_{n+1})$

$=F_2=1$이다. 이는 연속하는 피보나치 수들은 서로 소임을 의미한다.

다음 성질은 성질 6과 수학적 귀납법에 의하여 증명될 수 있다.

**성질 9.** $m, n \geq 1$에 대하여 $F_{mn}$은 $F_m$에 의하여 나누어진다.

$2=F_3$이므로 위의 성질로부터 피보나치 수들은 $F_3, F_6, F_9, \cdots, F_{3k}$이다. 다시 말하면, 피보나치 수는 세 번에 한 번씩 2의 배수가 된다. 마찬가지로 피보나치 수는 네 번에 한번씩 3의 배수, 다섯 번에 한 번씩 $F_5=5$의 배수, 여섯 번에 한 번씩 $F_6=8$의 배수가 된다. 따라서 위의 성질로부터 피보나치 수는 $k$번에 한 번씩 $F_k$의 배수가 된다.

**성질 10.** 만약 $m=qn+r$이면, $\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_r, F_n)$이다.

**증명.** 성질 6에 의하여 $F_m=F_{qn+r}=F_{qn-1}F_r+F_{qn}F_{r+1}$이다.

$$\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_{qn-1}F_r+F_{qn}F_{r+1}, F_n)=\gcd(F_{qn-1}F_r, F_n)$$

이제 $\gcd(F_{qn-1}, F_n)=1$임을 보이기 위하여 $d=\gcd(F_{qn-1}, F_n)$이라 하자. 그러면 $d\,|F_n$이고 $d\,|F_{qn-1}$이다. 또한 성질 9에 의하여 $d\,|F_{qn}$이다. 따라서 $d$는 연속하는 항 $F_{qn-1}$과 $F_{qn}$의 공약수이다. 연속하는 피보나치 수는 서로 소이므로 $d=1$이다. $\gcd(a, b)=1$일 때마다 $\gcd(a, bc)=\gcd(a, b)$이다. 따라서 이를 이용하여 $\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_r, F_n)$이 성립한다. ▲

피보나치 수열의 놀랄 만한 특징 중 하나는 두 피보나치 수들의 최대공약수도 또한 피보나치 수가 된다는 것이다.

**성질 11.** 두 피보나치 수들의 최대공약수는 또한 피보나치 수이다.

$\gcd(F_m, F_n)=F_d$ (단, $d=\gcd(m, n)$이다.)

**증명.** $m \geq n$이라고 가정하자. $m$과 $n$에 유클리드의 알고리즘을 적용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{array}{ll}
m=q_1n+r_1 & 0<r_1<n \\
n=q_2r_1+r_2 & 0<r_2<r_1 \\
r_1=q_3r_2+r_3 & 0<r_3<r_2 \\
\vdots & \vdots \\
r_{n-2}=q_nr_{n-1}+r_n & 0<r_n<r_{n-1} \\
r_{n-1}=q_{n+1}r_n+0 &
\end{array}$$

$F_m$과 $F_n$의 최대공약수(gcd)를 구해 보면 다음과 같다.

$$\gcd(F_m, F_n)=\gcd(F_n, F_{r_1})=\gcd(F_{r_1}, F_{r_2})=\cdots=\gcd(F_{r_{n-1}}, F_{r_n})$$

한편 $r_n | r_{n-1}$이므로 성질 9에 의하여 $F_{r_n} | F_{r_{n-1}}$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\gcd(F_m, F_n) = \gcd(F_{r_{n-1}}, F_{r_n}) = F_{r_n} = F_{\gcd(m, n)}. \ \blacktriangle$$

성질 12. $m \geq 2$에 대하여 $F_m | F_n$이 되기 위한 필요충분조건은 $m | n$이다.

**증명.** 만약 $m | n$이라 하면 성질 9에 의하여 $F_m | F_n$이다.

역으로, $F_m | F_n$, 즉 $F_n$이 $F_m$으로 나누어진다면, $\gcd(F_m, F_n) = F_m$이 된다. 이제 $n = qm + r$ (단, $0 \leq r < m$)로 놓으면 다음이 성립한다.

$$F_m = \gcd(F_m, F_n) = \gcd(F_m, F_{qm+r}) = \gcd(F_m, F_r)$$

따라서 $r = 0$이고 $m | n$이다. ▲

위에 제시한 성질 외에 이미 잘 알려져 있는 피보나치 수의 주기 패턴이 있다. 끝 자리의 수(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, …)는 $n=60$에서부터 반복되는 주기가 있다. 아래 표에 의하여 피보나치 수의 단위 자리는 주기 60을 갖는 주기적(cyclic)이다. 즉, 단위 자리는 $F_{60}$의 단위 자리와 같고 또한 $F_{120}$의 단위 자리와 같다. 이는 $F_1$, $F_{61}$과 $F_{121}$의 단위 자리에 대해서도 성립한다. 이 주기는 무한히 계속된다. 또한 주기가 훨씬 길지라도 10의 자리로 주기가 있다. 마찬가지로 보다 긴 주기를 갖는 100의 자리에 대해서도 마찬가지이다[7].

| $n$ | $F_n$ | $F_{n+60}$ | $F_{n+120}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | **0** | 154800875592**0** | 5358359254990966640871184**0** |
| 1 | **1** | 250473078196**1** | 8670007398507948658051921 |
| 2 | **1** | 405273953788**1** | 14028366653498915298923761 |
| 3 | **2** | 655747031984**2** | 22698374052006863956975682 |
| 4 | **3** | 1061020652442**3** | 36726740705505779255899443 |
| 5 | **5** | 1716768017756**5** | 59425114757512643212875125 |

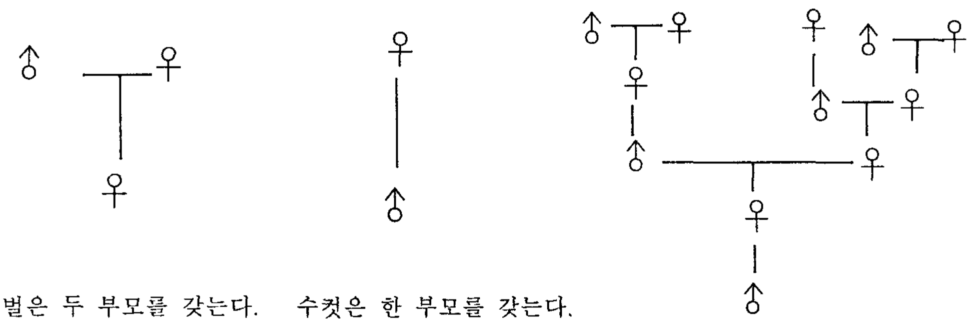
## 3. 피보나치 수열과 자연 현상

### 1) 꿀벌 가계도

꿀벌의 가계도에서 피보나치 수들이 나타난다. 꿀벌은 다음과 같은 몇 가지 특징을 가지고 있다. 꿀벌 모두가 두 명의 부모를 갖는 것은 아니다. 벌떼 중에는 여왕이라 불리는 특별한 암컷이 있다. 암컷이기는 하지만 여왕벌과는 다른 많은 일벌들이 있다. 그들은 알은 낳지

못한다. 일을 하지 않는 수벌들이 있다. 수벌들은 여왕의 수정되지 않은 알에서 태어난다. 그래서 수벌은 어미만 있고 아비는 없다. 모든 암벌은 여왕이 수벌과 짝을 지었을 때 태어난다. 그래서 두 명의 부모를 갖는다. 암벌은 보통 일벌이 되나, 몇몇은 '로얄제리'라 불리는 특별한 물질로 키워져서 여왕벌로 자라게 된다. 그들은 집을 떠나 새 보금자리를 지을 장소를 찾아 새로운 벌떼를 이루게 된다. 그러므로 암벌은 2명의 부모, 즉 수벌과 암벌 부모를 갖는 데 반하여, 수벌은 단지 한 명의 암벌 부모만을 갖는다.

일하지 않는 한 수벌의 조상을 가계도(족보)를 조사해보자. ① 그는 1명의 암컷 부모를 갖는다. ② 그는 2명의 조부모를 갖는다. 왜냐하면 그의 어미는 2명의 부모, 암컷과 수컷 부모를 갖기 때문이다. ③ 그는 3명의 증조부모를 갖는다. 그의 할머니가 2명의 부모를 가져야 하고, 그의 할아버지는 1명의 부모만을 가져야 한다. ④ 그는 얼마나 많은 고조부모를 가지는가?([5], [7])



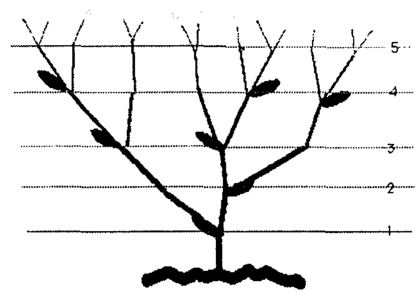
여왕벌은 두 부모를 갖는다. 수컷은 한 부모를 갖는다.

[그림 3] 꿀벌의 가계도

**2) 피보나치 수와 생물**

(1) 식물이 새로운 가지를 뻗을 때 그 가지는 두 달을 자라야 분지를 지탱할 만큼 충분히 강해진다고 가정하자. 그 후로는 매달 생장점에서 가지를 뻗는다고 가정하면, 여기에서 보여지는 것과 같은 그림 4를 얻게 된다.

처음에 한 가지가 두 개로 나뉘어진다. 이들 두 가지 중 새로 자라난 가지가 다시 두 개로 나뉘어지는 동안 다른 가지는 나뉘어지지 않고 있다. 하나가 가지를 나누면 다른 가지는 쉬는, 이러한 현상은 각 가지가 생길 때마다 반복된다. 이때 수평 방향에 있는 가지의 수는 피보나치 수를 이루고 있다. 이와 매우 비슷하게 자라는 식물이 'sneezewort(Achillea ptarmica)'이다.




[그림 4] 식물의 가지

(2) 많은 꽃들은 그들의 싹이나 씨뿐만 아니라 꽃잎의 수, 잎의 배열과 회전마다 잎의 수

에 있어서도 피보나치 수를 보여주고 있다. 솔잎은 종류에 따라 2개, 3개, 또는 5개의 솔잎으로 된 송이로 자라는 경향이 있다. 백합과 붓꽃은 3개의 꽃잎이 있고 미나리아재비는 5개의 꽃잎을 가진다. 참제비고깔은 8개의 꽃잎, 금잔화는 13개의 꽃잎을 가지며, 애스터는 21개의 꽃잎을 가진다. 데이지는 13개, 21개 또는 34개, 55개 또는 89개의 꽃잎을 가지고 있는 것을 볼 수 있다.

많은 식물들의 줄기 주위에 있는 잎들의 배치에서도 피보나치 수를 발견할 수 있다. 예를 들어, 줄기 위의 잎 하나를 택하여 숫자 0을 할당하고 다음에 그 잎과 일직선이 되는 잎 사이에 있는 잎의 수를 세어보면 잎의 총수는 피보나치 수를 이루고, 바로 위의 잎에 닿을 때까지 줄기 주위를 돌아가는 나선의 회전수도 피보나치 수가 나타난다.

(3) 꽃씨의 배열을 통하여서도 피보나치 수를 볼 수 있다. 성숙한 해바라기꽃씨의 배열을 중앙을 기준으로  살펴보면, 씨들의 다른 두 나선형을 분명히 볼 수 있다. 하나는 시계 방향으로 89개의 나선형, 다른 하나는 시계 반대 방향으로 55개의 나선형을 형성하고 있다. 물론 이런 모든 수들은 인접한 피보나치 수들이다. 가끔씩 예외가 나타나기도 하지만 조사 결과들은 해바라기의 나선형의 수가 압도적으로 피보나치 수들로 나타나고 있음을 보여주고 있다.

(4) 솔방울에서 완경사·급경사에 따른 나선형의 수는 항상 피보나치 수열에 나타난 수들과 거의 근접하므로 때때로 피보나치 수를 '솔방울 수'라고 말한다. 어떤 솔방울들은 3개의 완만한 나선형과 5개의 급한 나선형을 가지고 있다. 다른 것들은 5개의 완만한 나선형과 8개의 급한 나선형을 가지고 있거나, 또는 완만한 것 8개와 급한 것 13개를 가진 것들도 있다. 이처럼 세 가지의 서로 다른 나선형을 가진 솔방울들은 모두 피보나치의 수와 밀접한 관계를 가지고 있음을 보여주고 있다. 많은 연구 결과, 솔방울들의 나선형 수에서 99% 정도는 피보나치 수로 나타난다는 사실이 밝혀지고 있다.

육각형 모양의 얇은 파인애플 껍데기들에 의해 형성된다는 나선의 수에서도 피보나치 수가 나타난다. 또한 앵무조개(Nautilus)에서도 피보나치 수열을 찾아볼 수 있다. 또한, 우리의 주변에서 자주 접하게 되는 소용돌이 무늬에서 피보나치 수열의 이웃하는 두 항이 흔히 발견되기도 한다.

## 4. 피보나치 수열의 응용

**1) (음악)** 피보나치 수열과 음악 사이의 명백한 관계는 피아노의 건반에서 가장 잘 나타난다. 피아노 건반에서 한 옥타브는 8개의 흰 키와 5개의 검은 키로 이루어져 있다. 검은 키는 2개 또는 3개의 묶음으로 이루어져 있다. 한 옥타브에는 모두 13개의 키들이 있는데, 이것들을 종합해 보면 피보나치 수가 나타남을 알 수 있다.

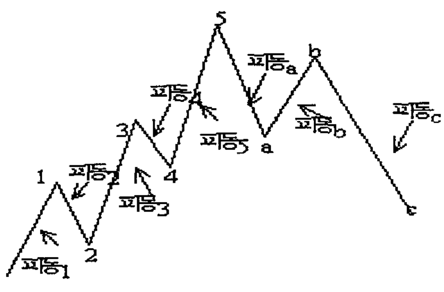
여러 다른 음계들이 존재하지만 5음계 (5), 온음계(8), 그리고 반음계(13)는 서양 음악의

발전 과정에서 대부분을 차지하고 있다. 많은 사람들에게 기분 좋게 들리는 음정은 장6도와 단6도로 알려져 있다. 장6도 음정의 예를 들면, 1초에 약 264번 진동하는 C음과 1초에 약 440번 진동하는 A음으로 이루어진다. 264/440의 비를 약분하면, 피보나치 수의 비인 3/5이 된다. 단6도 음정의 한 예는 1초에 약 330번 진동하는 E음과 1초에 약 528번 진동하는 C음이 있는데, 330/528의 비를 약분하면 그 다음 피보나치의 비인 5/8가 된다. 어떤 6도 음정의 진동수의 비도 비슷한 비로 약분이 된다.

1930년에 콜롬비아 대학의 수학 교수이자 음악 교수였던 조셉 실링거(Joseph Shillinger)는, 피보나치 수열로 음정이 이루어진 멜로디는 마치 해바라기 씨앗이나 줄기에 붙은 나뭇잎의 성장 모형처럼 자연스럽다고 믿었다. 그리고 작곡 체계는, 한 멜로디의 연속적인 음이 그 이전의 음보다 피보나치 수만큼 높거나 낮은 음 또는 피보나치 수의 색다른 변형 음정으로 이루어진다고 주장하였다[4].

**2) (토큰 교환)** 피보나치 수를 찾기 어려울 것 같은 오락실에서, 오락을 위한 토큰을 파는 기계를 가정해 보자. 그 기계는 50원짜리나 100원짜리 동전만 넣을 수 있고, 거스름돈 없이 정확한 가격으로 50원짜리 토큰을 판매한다고 가정하면, 다음과 같이 지불할 수 있는 경우의 수를 생각할 수 있다. ① 토큰 1개를 사기 위해 돈을 지불할 수 있는 방법은 1가지가 있다: 50원짜리 동전 1개 (a) ②토큰 2개를 사기 위해 돈을 지불할 수 있는 방법은 2가지가 있다: 50원짜리 동전 2개 (aa), 100원짜리 동전 1개 (b) ③ 토큰 3개를 사기 위해 돈을 지불할 수 있는 방법은 3가지가 있다: 50원짜리 동전 3개 (aaa), 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 1개 (ba), 50원짜리 동전 1개와 100원짜리 동전 1개 (ab) ④ 4개의 토큰을 사기 위해 돈을 지불할 수 있는 방법은 5가지 (aaaa) (bb) (aba) (baa) (aab)가 있다. ⑤ 토큰을 5개 사려면 8가지 방법 (baaa) (bba) (abaa) (aaab) (aaba) (bab) (abb) (aaaaa)가 있다. ⑥ 토큰을 6개 사면 13가지 방법 (aaaaaa) (bbaa) (baba) (abab) (aaaab) (aaaba) (aabaa) (abaaa) (baaaa) (baab) (abba) (aabb) (bbb)가 있다. ⑦ 토큰 7개를 사기 위해 돈을 지불할 수 있는 방법은 21가지가 된다. … 종합해보면 피보나치 수가 나타남을 알 수 있다[2].

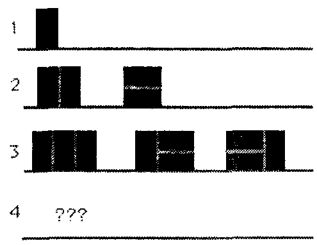
**3) (증권파동)** 피보나치 수열로 나타나는 흥미로운 예 중의 하나는 주식 시장의 변화이다. 1930년대 중반 미국이 대공황에서 빠져나가기 시작할 무렵, 랄프 넬슨 엘리엇(Ralph Nelson Elliot)은 다우존스 주가지수의 역사와 변화를 연구하였는데, 주식 시장은 어떤 규칙을 가지고 움직이는 경향이 있다는 것에 대해 동의했다. 일반적으로 주식 시장의 변화는 인간의 낙천주의와 비관주의의 일정한 변화에 의해 생긴다고 생각된다. 어떻게 보면 산업 주기는 인간의 행동 기능이다. 그것은 원형을 따르는 경향이 있고 이 원형들은 결국에는 증권 시장에서 반영된다.




[그림 11] 엘리엇 파동

'엘리엇 파동(Elliot Wove) 원리'는 오늘날 투자 산업에서 증권 시장의 변화를 예측하는데 이용되는 원리 중의 하나이다. 엘리엇은 시장이 [그림 5]와 같이 8개의 파동으로 완전한 주기를 형성하면서 전개된다는 것을 알아챘다. 그 주기는 대체로 5개의 파동이 올라가고, 3개의 파동이 내려가는 기초 원형을 따른다. 번호를 매긴, 올라가는 5개의 파동들은 실제로 내려가는 파동을 2개 포함하는데, 올라가는 파동들은 경기 호황(낙천주의)이며 내려가는 파동들은 조정 국면(비관주의)이다.

파동은 더 세분될 수 있거나 더 큰 파동의 부분이 될 수 있다. 파동은 늘어나거나 줄어들 수 있다. 그리고 그것은 다양한 변칙들로 앞에 있는 것을 뒤집어엎기도 한다. 그러나 기초가 되는 원형은 일정하다. 다양한 파동의 밀도를 분석하면 모든 단계에서 피보나치 수로 나타난다. 이러한 원형과 그것이 나타내는 피보나치 수들은 무한정으로 계속된다[2].




4) **(벽돌벽 쌓기)** 보통 크기의 벽돌을 이용하여 벽을 쌓는 데에도 피보나치 수가 나타남을 알 수 있다. 벽돌의 길이가 높이의 두 배가 되는 벽돌을 이용하여 2 단위의 높이를 가지는 벽돌벽을 쌓는다고 가정하자. 우리가 원하는 길이의 벽쌓기에 따라 벽의 많은 유형을 만들 수 있다(그림 참조).

· 하나의 벽돌을 세워서 벽의 길이가 1 단위인 하나의 벽이 있다.

· 길이가 2 단위인 벽을 쌓는 데에는 2가지 형태가  있다(두 개의 벽돌을 붙여 세워 놓은 경우와 눕힌 경우)

· 길이가 3단위인 벽을 쌓는 데에는 3가지 형태가 있다(세 개의 벽을 연속적으로 붙여 세워 놓은 경우, 세운 하나의 벽돌과 두 개의 벽돌을 붙여 눕힌 경우, 두 개의 벽돌을 붙여 눕이고 이에 한 벽돌을 세워 붙인 경우)

· 길이가 4, 5, 6, … 단위인 벽에는 몇 가지의 형태가 있는가?[12]

5) **(일렬로 의자 배열)** 여러분은 선생님들과 모여 있을 때 선생님들은 언제나 학교에 관하여 이야기를 나누는 것을 알 수 있다. 어느 두 선생님도 의자의 한 열을 따라 서로 이웃하게 앉지 않도록 한다. $n$명의 사람들이 앉을 수 있는 방법은 몇 가지인가? 선생님이면 T, 선생님이 아니면 N으로 나타낸다.

의자 1:  T 또는  N (2가지)

의자 2: TN, NT, NN (3가지. TT는 허락하지 않으므로)

의자 3: TNT, TNN, NTN, NNT, NNN (5가지, 이번에는 TTN, NTT, TTT는 허락하지 않는다).

의자 4: N+ 의자 3일 경우의 위치, TN+의자 2일 경우의 위치(8가지), …

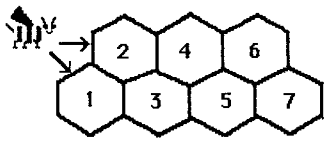
따라서 자리배열의 수는 항상 피보나치 수열이다[12].

6)**(레오나르도(Leonardo)의 계단 오르기)** 요즈음 가벼운 운동을 하고자 할 때 아파트의

엘리베이터보다 계단을 이용한다. 만약 내가 서두르면 한 번에 두 계단씩을 오르고 그렇지 않으면 보통 한번에 한 계단씩 오른다. 만약 이런 종류의 행위를 섞어한다면 즉, 바로 다음 계단을 밟거나 아니면 다음 계단을 뛰어넘어 또 다음 계단으로 오른다면 $n$번째 계단까지 올라가는데 몇 가지 방법이 있는가?([7], [12])

일반적으로 한 아파트는 $n$개의 계단으로 구성되어 있고 한 번에 한 계단씩 오르거나 두 계단씩 오른다고 하면 이 아파트를 오르는 다른 방법의 수 $S_n$을 결정하자. 만약 $n=1$이면 해는 간단하므로 $S_1=1$이다. 만약 $n=2$이면 두 가지 방법 즉, 한 계단씩 두 번 오르는 방법과 한번에 두 계단을 오르는 방법(1+1 또는 2)이 있다. $n=3$인 경우는 1+2, 2+1 또는 1+1+1로 3가지 방법이 있다. 이 수열은 $n>2$에 대하여 다음과 같이 일반화될 수 있다. 만약 처음 한 계단을 오르면 나머지 남는 계단은 $n-1$개이고 이 계단을 오르는 방법의 수는 $S_{n-1}$이다. 만약 처음에 두 계단을 오르면 나머지 남는 계단은 $n-2$개이고 이 계단을 오르는 방법의 수는 $S_{n-2}$이다. 따라서 $n$개의 계단을 갖는 아파트에 오르는 방법의 수는 $S_{n-1}$과 $S_{n-2}$의 합 $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$와 같다. 이 점화식은 피보나치 점화식 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$와 같다. 또한 $S_n$의 값들은 $S_n=F_{n+1}$인 피보나치 수임을 알 수 있다.

7) **(벌의 이동 경로)** 그림과 같은 벌집에서 벌이 벌집 1이나 벌집 2를 출발점으로 오른쪽 방향으로만 이동하고 한 번 온 길로 되돌아가지 않는다고 가정하여 벌이 각 벌집으로 가는 방법은 몇 가지가 있는지 알아보자(그림 참조).




① 벌이 벌집 1로 가는 방법은 1가지 (1)이다. ② 벌이 벌집 2로 가는 방법은 2가지로 벌집 1를 경유하여 벌집 2로 가거나(12) 벌집 2로 직접 가는 방법 (2)이다. ③ 벌이 벌집 3으로 가는 방법은 3가지로 이들은 벌집 2→ 벌집 3 (23), 벌집 1→벌집 3 (13) 또는 벌집 1→벌집 2→벌집 3의 방법 (123)이다. ④ 벌이 벌집 4로 가는 방법은 5가지 (1234), (234), (134), (124), (24)이고, 벌이 벌집 5로 가는 방법은 (123), (23), (13)에서 벌집 5로 들어가는 경우 즉, (1235), (235), (135)와 (1234), (234), (134), (124), (24)에서 벌집 5로 들어가는 경우 즉, (12345), (2345), (1345), (1245), (245)의 총합 8가지이다… ⑤ 출발점에서 벌집 $n$으로 가는 길은 몇 가지가 있는가? 결국 언젠가는 임의의 벌집으로 가는 방법의 수는 그 벌집 바로 앞에 이웃하는 벌집들로 가는 방법 수의 합과 같다는 것이 명백해진다. 각 벌집 바로 앞에 이웃하는 벌집이 2개이고, 처음 숫자가 1과 2였으므로, 그들의 합을 나타내는 수는 항상 피보나치 수가 된다([2], [12]).

8) **(그 밖의 예)** 동전 쌓기, 징검다리 건너기, 고정과 한자리 이동, 표면과 이면 세기(표면이 두 번 나타날 때까지), 빛의 반사, 카드, 사진, 책자, 황금사각형, 심리학 등의 다양한 실례에서 피보나치 수를 만들어 낼 수 있다.

## 5. 결론

피보나치 수열의 수많은 성질 가운데, 독특하고 기하학적 의미를 갖는 몇 가지 성질을 살펴보았고, 이들의 논리적이고 기하학적인 증명을 통하여 이 수열은 가장 간단하고 단순하면서도 심오한 이론을 가진 수열임을 알 수 있었다. 또한 꿀벌의 가계도, 조개의 나선형, 식물 등과 같은 자연 현상과 음악, 토큰 교환, 증권, 계단 오르기, 벽쌓기, 벌의 이동경로, 의자 배열 등의 분야와 피보나치 수열의 관계 등에 관하여 조사·분석은 수학이 재미있고 실생활에 밀접하게 관련이 있음을 보여준다.

피보나치 수열은 고등학교 수학 I 교과서나 참고서의 수학산책이나 연구과제 코너에서 단편적인 개념만 다뤄지고 있는 실정이다. 따라서 재미있고 많은 분야에 응용되고 있는 이 수열에 대하여 많은 내용의 소개를 통해 수학에 대한 흥미의 유발과 수학의 중요성을 인식하게 할 필요가 있다. 특히 수학의 창의적 사고력과 문제해결능력을 신장시키기 위하여 기하학적 또는 직관적으로 의미가 있는 성질을 소개할 필요가 있다.

황금비는 아름다움(美)의 표현 대상이며, 피보나치 수열과 황금비의 관계, 황금비의 개념과 특성, 건축과 예술분야에서 황금비 등의 조사를 통하여 수학이 문화예술 분야의 역사적 발전에 커다란 영향을 주고 밀접하게 관련이 있음을 체계적으로 조사할 필요가 있다.

## 참고 문헌

1. 박한식, **수학 I**, 지학사, 1996.
2. 고등부 세미나팀, "다양한 피보나치 수의 예를 찾아서," **수학사랑** 12(1998), 20-24.
3. 고등부 세미나팀, "예술과 건축에 숨어있는 피보나치 수열," **수학사랑** 11(1998), 18-27.
4. 고등부 세미나팀, "음악과 피보나치 수열," **수학사랑** 13호(1998), 16-20.
5. 고등부 세미나팀, "피보나치 수열(1)," **수학사랑** 10호(1997), 22-29.
6. D. M. Burton, *Elementary number theory*, Allyn & Bacon Inc. 1980.
7. R. A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers,* World Scientific, 1997.
8. H. Eves/이우영·신항균 옮김, **수학사**, 경문사, 1996.
9. S. E. Ganis, "Notes on the Fibonacci Sequence," *Amer. Math. Soc. Monthly,* 66 (1959), 129-130.
10. K. S. Rao, "Some Properties of Fibonacci Numbers," *Amer. Math. Soc. Monthly,* 60 (1953), 680-684.
11. K. H. Rosen, *Elementary Number Theory and its Applications*, Addison-Wesley Publ. Co. 1993
12. http://www.ee.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fipuzzles.html