*Historia Mathematica Vol. 13, No. 1, 2000, 49-62*

# 역사 발생적 원리와 구성주의*

관동대학교 수학교육과 **김종명**

## Abstract

In this paper we analyzed the histo-genetic principle and constructivism on the mathematics education. This study is tried to suggest teacher's a role in mathematics learning and to find out the teacher's mathematical beliefs on the mathematics education be based on the histo-genetic principle and constructivism.

## 0. 머리말

산업사회에서 지식기반 산업사회로의 변화는 새로운 교육이 요구되는 시대가 되었다. 지식과 정보가 넘쳐 나는 시대에 정보를 어떻게 통합하고 정리하여 활용할 수 있는지 하는 창의력이 중요한 시대가 된 것이다.

학생들에게 지식을 전달하고 전수하는 방법으로 지식을 주입시키는 훈련과 같은 교육에서 문제를 스스로 만들고 해결하며 지식을 창안해 가는 교육으로 변화되어야 한다. 창의력이란 과거의 누적된 정보와 현재에 주어진 여건을 토대를 종합해서 미래의 방향을 예측하며, 도전적으로 탐구하여 보다 유용하고 새로운 것을 만들어내는 능력이다. 따라서 창의력이 있는 사람은 항상 탐구정신으로 훈련과 배움으로 자신의 잠재력을 개발시키는 노력을 하게 된다. 이러한 인간을 기르기 위해서는 생각하도록 강요하는 것이 아니라 생각하는 즐거움을 주는 학습으로 학생 스스로 생각하여 해결할 수 있도록 생각하는 방법을 교육하여야 한다.

수학교과의 특성상 수학교과서의 내용이 너무나 형식적이고 연역적인 논리로 체계화 되어 있기 때문에 대부분 학생들은 수학이 무미건조하고 어렵다고 생각하게 된다. 이러한 완성된 체계의 교과서를 중심으로 지도할 때 학습활동의 결점을 해결하기 위해서는 수학의 발달과정에 따라 수학의 개념을 폭 넓게 이해할 수 있도록 교재를 재구성하는 학습지도 방법이 역사 발생적 원리이다. 역사 발생적 원리와 구성주의적 교육은 수학의 개념과 구성된 이론들의 발전과정을 알려줌으로서 수학은 인류의 끊임없는 상상과 창조의 노력으로 이루어진 것

* 본 논문은 2000학년도 관동대학교 학술연구비 지원에 의한 결과임.

이라고 생각할 수 있게 한다. 또한, 학생들이 스스로 개념들을 만들고 구성해 볼 수 있는 수학적 사고활동으로 창의적이고 역동적인 학습 분위기를 연출할 수 있어야 한다.

본 글에서는 역사 발생적 원리와 구성주의에 대한 관계를 조사하여 이들이 수학교육에 주는 중요성과 필요성을 논의하고자 한다. 또한, 역사 발생적 원리와 구성주의 수학교육을 통하여 수학에 관한 철학과 교육관을 이해하여 현재 우리의 수학교육의 과제와 문제점을 발견하여 미래의 수학교육의 방향을 모색하고자 한다.

## 1. 지식기반사회에서 수학교육

수학은 정보화시대에 과학과 지식기술의 기본으로 정보산업기술 개발에 밀접한 관계가 있다. 현대는 공장이나 부동산, 천연자원 등의 장치기술산업에서 사고력과 창의력 그리고 인적 자원이 중심이 되는 지식기술산업이 경제를 이끌어갈 것이다. 과학과 정보기술의 개발과 혁신 없이는 국제경쟁의 시대에서 살아 남을 수가 없기 때문에, 창의력의 원천인 수학적 사고력의 중요성이 강조되고 있다.

수학자들이 컴퓨터를 논리적이고 실제적인 구조로 만들었으며, 계속 연구하여 발전시키고 있다. 수학은 논리적인 정신활동이며 과학의 언어이다. 또한 자연현상의 본질을 탐구하고 보편적 진리를 다루는 학문이다. 전반적인 과학기술의 발달로 인하여 수학에서 응용되지 않는 분야는 더 이상 존재하지 않는다.

지식정보산업사회에서 논리적이고 수학적인 사고와 창의력과 문제해결력을 길러주는 수학교육의 중요성은 아무리 강조하여도 지나치지 않다. 학생들의 장점과 개성을 최대한 개발하고 학생들의 상상력과 잠재력을 발휘하도록 하는 수학교육이 요구되고 있다.

수학의 역사를 뒤돌아보면 수학의 발견과 창조는 인류의 삶 속에서 필요성과 유용성 때문에 생각과 상상 속에서 태어났으며, 인간의 삶과 광범위한 분야에 영향을 주고받으면서 변화하고 확대되어 왔다. 수학은 오랜 역사를 통해 많은 수학자들에 의해 창조되어 왔으며 직관적인 추측으로 이론들을 만들어 증명하고, 검토와 검증의 과정을 거쳐 수학적 이론들이 체계적으로 정리되어 발전하고 있으며, 또한 지금도 그렇게 창안되고 있다.

수학은 현대의 실생활에서 항상 활용되는 과학의 언어로 누구나 배울 수 있는 보편성과 수월성의 교과이며, 꼭 배워야하는 인류의 자산이다. 그렇지만 학교에서 수학은 연역적으로 구성하여 완성된 체계로서 수학 교과서를 가르치게 된다. 이런 교재관을 가지고 학생들에게 교육하게 된다면 진정한 수학을 알려 주지 못하고 피상적인 수학을 공부하게 되고 수학 학습에 있어서 흥미와 활력이 떨어지고 수학을 골동품처럼 생각하게 될 것이다.

수학교과의 특성상 내용이 전형(典刑)적이고 논리적 이론으로 전개되어 있어서, 수학이 실제생활에 응용할 수 있다는 유용성과 인간 삶의 광범위한 분야에서 활용할 수 있다는 언급이 없게된다. 따라서 학생들은 수학의 매력이나 호기심이 없이 딱딱하고 지루한 교과로만 생각하게 된다. 시험이라는 수학의 현실적인 필요성 때문에 끈기와 인내심을 가지고 공부하

고 있는 학생들을 제외하고는 수학을 멀리하게 된다.

20세기 초까지 수학 교과서로서 유클리드(Euclid)의 기하학의 원론(Elements, Stoicheia)은 고정되고 완전한 진리 체계로서 학생들에게 가르쳐졌다. 유클리드의 원론은 추론과정의 논리적 엄밀성을 훈련하는 정신 도야재로서 확고한 권위를 지니고 있었다.

전통적으로 수학의 이론은 엄밀한 논리체계를 이루며, 변할 수 없는 진리로 완전한 이론의 논리체계로 본다. 따라서 수학의 이론들은 수학 교과서에서 완전하게 전개되며 그 안에서만 완전한 이론으로 존재한다[3].

이러한 학문주의의 수학교육의 전통은 수학교육의 개혁운동(1901)과 기초회복운동(1970년대)의 노력에도 불구하고 오늘날까지도 그대로 지속되고 있다. 또한 절대적 학문주의의 철학과 수학을 중시하는 전통은 그리스의 플라톤주의 정신에 의해서 유럽에 계승되었다. 서양의 합리적이고 논리적인 철학과 과학의 전통은 그리스의 정신에서 찾을 수 있다.

동양에서는 수학을 단지 실용적인 계산기술로 생각하였다. 그러나 그리스의 자연철학자들은 "신은 수학적으로 사고한다."고 생각하고 신의 뜻에 따라 선(善)의 이데아로 참과 진리를 추구하였기 때문에 절대진리인 수학의 소양이 매우 중요시되었다. 그 후 근대서양에서는 "자연을 수학적으로 설명하고 분석할 수 있다."고 생각하고 수학으로 세상의 모든 문제를 밝혀내어 해결할 수 있다는 수학 지상주의 사고가 있었다. 그러나 20세기에 '수학은 가설'이라는 생각으로 수학을 연구하게 되었다.

이제, 수학은 자유로운 상상과 창의력으로 만들어 가는 사고의 체계가 되었다. 수학의 발전으로 양적 팽창과 수학연구의 컴퓨터 응용 등 다양한 연구방법으로 수학의 정의도 변하게 되었다. 수학은 수, 형태, 운동, 변화, 공간에 대한 연구라는 정의로부터 대상의 본질적인 성질과 구조를 파악하는 '양식'(樣式, Pattern)의 과학이라는 정의가 나왔다.

양식의 과학인 수학은 인간의 끊임없는 노력의 역사 속에서 문화와 철학의 정신적 산물이다. 우리가 살고 있는 물리적, 생물학적, 사회학적인 세계와 우리의 정신적인 세계 등 모두를 관찰하여 본질적인 성질과 원리를 찾아내고 새로운 세계를 만들어 가는 학문이 된 것이다. 따라서 수학은 강력한 유용성과 응용성을 가진 지식인 것이다.

수학은 현대과학의 발달로 현대의 지식정보산업 사회에서 인간의 삶에 필요하고 다양한 분야에 영향을 주는 교과로서 인간성과 인간정신의 도야재로서 인류문화의 자산이 되었다.

## 2. 역사 발생적 원리

르네상스이후 수학이 발전하고 변화하면서 기하학의 교과서로서 유클리드 원론은 교육학적 측면에서 비판을 받기 시작하였다. 프랑스의 클레로는 최초로 유클리드 원론을 수학의 역사발달에 의한 역사 발생적 원리를 활용하여 기하학의 교과서로 기하학의 원론(1741)을 저술하였다. 이 책은 기하학을 역사적인 순서에 따라 기하학의 이론을 연구하여 발견된 동기와 방법을 접하게 함으로써 창의적인 발견적 사고력을 가질 수 있도록 하기 위해서 쓰여

졌다. 클레로는 자명한 정의, 공리, 명제 등을 일일이 쓰지 않았다. 그는 "간단한 상식으로 즉시 알 수 있는 것을 일일이 추론해 간다는 것은 오늘날에는 시간낭비에 지나지 않는다. 그것은 진리를 알 수 없게 만들고 독자로 하여금 싫증나게 할 다름이다."라고 했다. 그는 기하학의 이론을 실생활에 응용한 예를 들어 무미건조함을 극복하려고 노력하였다[13]. 그의 이러한 저술의 노력은 역사 발생적 원리라 불리게 되었다.

발생적 수학교육의 원리는 19세기에 린드너(Lindner)에 의해서 역사 발생적 원리로 정의되었다. 그의 정의는 "소재를 자연스런 순서에 따라 다루어서, 단순한 것으로부터 합성된 것으로, 원인으로부터 결과에, … 쉬운 것에서부터 어려운 것으로 나아가되 하나 하나의 동인을 아주 주의해서 서로 결합하는 것이다"라고 했다. 그는 개인의 수학적 사고 발달과 지식 교육은 인류의 지식발달과 같은 과정을 따라야 한다고 주장했다[6].

그 후 수학교육 근대화운동의 선구자인 페리(Perry, 1901)는 유클리드의 엄정한 기하학 교육에서 탈피하고 진정한 수학교육이 이루어져야 국가가 번영할 수 있다고 주장했다. 클라인(Klein)은 "유클리드의 원론은 아동을 위해서 쓴 것이 아니고 성인을 위해서 쓴 것이다."라고 하면서 수학교육은 아동의 심리에 적합하도록 해야한다고 주장했다. 그는 연설에서 "소년의 자연적인 소질과 연결시켜 인류 전체가 그 순진한 원시 상태로부터 보다 높은 인식에 다다른 그 길을 따라 천천히 높은 곳으로, 마지막에 추상적인 형식화에 이르러야한다. … 모든 수학적 개념이 처음에 얼마나 더디게 발생했으며, 그것은 처음에는 거의 항상 예언적인 형태로 나타나 오랜 발전을 거친 후 비로소 굳건한 결정 형태의 체계적 표현을 취하는가를 알게 될 것이다."라고 했다. 또한 푸앵카레(Poincare)는 동물의 태아의 형성과정에서 진화의 역사를 보여주는 것처럼, 인간의 정신 발달도 조상이 거쳐온 과정을 빠르게 통과할 때 학생을 잘 지도할 수 있다고 보았다.

Toeplitz는 "창조되던 당시에는 불타는 의문에 대한 해답이었음에 틀림없다. 우리가 이들의 사고의 근원으로 되돌아간다면 틀에 박힌 무미건조한 사실로 활기 없는 형태는 없어지고 생생하고 힘찬 생명이 되살아날 것이다."라 했다. 그는 수학의 문제와 개념의 발생에서 결정적인 계기를 극화하거나 학습의 자료로 활용하여야 한다고 했다[1].

역사 발생적 원리는 프로이덴탈(Freudental), 라카토스(Lacatos), 폴리아(Polya) 등에 의해서 연구되고 주장되었다. 수학교육자 폴리아와 프로이덴탈은 수학은 체계적이고 연역적인 발생상태의 수학과, 창조되고 구성되어 발명 중에 있는 수학으로 나누고, 발명되던 그 방식 그대로 다시 한번 재 발명 과정을 수학지도에서 보여주고 학생들 자신이 스스로 재 발명하도록 도와줄 때 가장 잘 배울 수 있다고 보았다.

## 3. 구성주의

구성주의(constructivism) 수학교육관은 학생들이 스스로 생각하여 자신의 학습에 대하여 주도적인 역할을 하면서 학습에 대한 책임을 가지고 적극적이고 능동적으로 학습할 수

있도록 하는 교육관이다. 학생들이 적극적으로 수업에 참여하여 스스로 공부하는 습관을 기를 수 있다. 따라서 학생의 무한한 가능성과 잠재력을 확대하고 신장시킬 수 있다.

구성주의는 동기유발에 의해서 흥미와 즐거움을 갖도록 하게 함으로 수업에 직접 참여하도록 하고 수학적 이론을 구성하게 하여 자신의 이론을 발표하고, 이론에 대한 대화와 토론으로 정당성을 점검하도록 교육하는 것이다. 구성주의는 수학의 이론을 다른 사람으로부터 전수 받는 것이 아니고 각 개인이 찾아내어 생각하고 행동하므로 깨달아 가는 교육이다. 수학의 이론들을 학생들이 스스로 발견하고 창안하여 그것을 증명하고 적용함으로 지식을 구성할 수 있다는 교육관이다.

변화하는 정보화시대를 살아가기 위해서는 흥미와 즐거움을 가지고 스스로 배우려는 의욕과 주체적인 학습으로 평생 공부를 해야하는 시대이다. 구성주의는 평생동안 자신의 의지와 노력으로 지속적인 학습을 할 수 있도록 자신의 방법으로 탐구하여 자발적인 학습이 이루어지도록 하려는 입장이다.

수학교육에서 구성주의의 기본입장으로는 "지식은 수동적으로 받아들여지는 것이 아니고 학습자의 능동적인 활동으로 지식이 구성되어진다. 다른 사람의 지식이나 경험은 개인적인 모델을 구성하는 데 도움을 줄 뿐이고, 전적으로 학습자 자신의 경험과 지식 등을 조직하고 적응해 가는 구성과정으로 지식을 알게된다[3]."는 것이다.

구성주의는 과거의 교사의 지도(instruction)중심에서 학생중심 학습(learning)으로 바라보는 관점으로, 인간이 지식을 형성하고 습득하는 과정은 개인적인 인지적 작용의 결과로 보는 상대주의적 인식론이다. 지식전달의 주입식 교육에서 학습자가 학습의 의미를 깨닫고 학습자 스스로 자신의 학습에 대하여 주도적인 역할을 하고 동시에 학습에 대한 책임을 지면서 능동적이고 적극적으로 학습활 수 있는 환경을 만들어야 한다[8].

피아제(Piaget)는 학생들이 서로 다른 사회적, 문화적 배경을 통해 서로 다른 인지적 구조와 지식구조를 갖고 있기 때문에 학습자가 주도적인 활동을 해야한다고 했다. 학습자가 의미 있는 이해와 지식이 구성되기까지 지속적으로 자신과 다른 학습자들과 대화하여 깊이 있는 생각을 끌어내어야 한다. 이 과정에서 학습자는 기존의 지식구조의 변화와 수정이 이루어지는 것이다. 학습과 지식구성이 이루어지기까지는 처음부터 끝까지 학습자 스스로의 인지적, 정서적인 자율활동을 하는 것이며, 많은 인지적 성찰이 있어야한다.

수학에 대한 흥미와 관심을 갖게 하기 위해서는 보고 느낄 수 있는 체험적인 학습환경을 조성하여야 한다. 실제생활에서 경험할 수 있는 수학적 상황을 만들어 수학의 학습재료로 활용하여 학생들이 현실적인 필요성과 의미를 알 수 있도록 한다. 수학적 활동에서 문제에 직면했을 때 자신감을 가지고 자신이 이미 알고있는 지식과 경험 등의 관련성을 가지고 조사하여 추측, 추론, 창안하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 기를 수 있도록 도와주는 것이다.

구성주의 학습법은 교사가 보다 잘 가르칠 수 있는 방법을 발견하는 데 있지 않고 학습자가 지식을 보다 잘 구성(construct)할 수 있는 기회를 제공하는데 있다.

학생들에게 어떤 수업이 가장 인상에 남느냐는 질문에, 대부분의 경우, 자신들이 스스로

활동하여 적극적으로 학습환경에 참여했던 수업이라고 공통적으로 답변하고 있다.

학생 자신들이 창안한 절차에 따라 지식을 조직하고 구성하여 학습한다고 볼 때, 교사들의 수업방법은 달라져야만 한다. 교사들은 학생들의 호기심과 상상력을 자극하여 잠재력을 발휘할 수 있는 학습환경을 만들어야 한다. 이런 환경을 만들기 위해서 몇 가지를 생각해보자.

먼저 학습자의 흥미와 목적에 맞는 학습과제를 제시하여 동기유발을 이끌어 내야한다. 실질적이고 구체적인 생활 속에서 찾을 수 있는 수학적인 문제를 연결하여 활용 가능한 수학적 지식을 구성해 가도록 해야 한다.

교사는 지식의 전달자가 아니고 학습자와 동등한 관계로 함께 배우면서 도움을 주며, 학생 스스로 이끌어 가도록 하는 협조자이다.

학생들은 스스로 조사하고, 기록하고, 토론하고 협력하여 발표하는 등 활동에 의해서 학습한다. 수동적으로 듣고 보기보다는 스스로 새로운 의미를 창출하면서 직접 생각하면서 학습활동에 참여할 수 있어야한다. 지식이 아이들에 의해서 활발하게 구성되어진다면, 교육은 이러한 구성적인 과정을 활발하게 할 수 있는 창조적인 활동들을 전념할 수 있도록 기회를 제공해 주어야한다. 개인적인 인지적 작용의 변화도 중요하지만 협력과 토론학습으로 보다 넓은 인간관계와 보다 확실한 구성적 지식을 학습할 수 있도록 해야한다. 이러한 활동은 사회생활에서 다양한 시각과 자신이 구성한 지식의 타당성을 검토 받을 수 있다.

끝으로 학습자들이 어떻게 수학적 지식을 구성하고 이해하고 있는지 학생들의 발표와 기록을 참고로 오류를 수정하고 반성과 검토를 통하여 새로운 학습활동 구성과정을 준비해야 한다.

지식의 형성은 학습자 개개인의 인지구조에 따라 개별적으로 다르게 반응하며 서로 다른 방법으로 구성하여 조직하게된다. 따라서 학습자의 성취도는 개별적인 외적 지식과 내적 변화의 양적인 측면과 질적인 측면의 변화도 고려해야 한다.

평가는 성취도뿐만 아니라 학습자의 인지구조, 학습 전이력, 학습 동기유발, 지식의 생존 가능성 등 과제의 수행과정에서 연속적으로 이루어져야 한다.

그러나 다음과 같이 비판적인 시각도 있다. "모든 지식을 학생 스스로 자신의 지식을 바탕으로 구성하기란 어렵다. 지식을 스스로 구성하는 과정에서 시간이 많이 걸려서 비효과적인 학습방법이다.

학습자의 자발성을 너무 강조되어 교사 등 외적 동기가 무시될 수 있다.

학생 수가 많거나 이해 수준이 서로 다른 집단에서는 오히려 혼란을 일으킬 수 있다. 수학적 이론이나 개념이 학생들이 이미 가지고 있는 지식의 구조와 연결되지 않을 때와 재구성 된 지식의 방향이 잘못될 경우에는 학습에서 실패하게 된다.

높은 수준의 수학적 이론은 추상적, 언어적 이해에 바탕을 둔 교육을 하여야 하므로 구성주의 학습보다는 수학적 지식을 전달하는 학습이 좋을 것이다[4]."

또한, 인류문화의 유산인 수학을 활용하여 수학적 사고력과 문제해결력을 높이기 위해서는 이미 창안된 방법들을 접하여 모방하는 훈련이 필요하다. 이러한 비판에도 불구하고 구

성주의 학습법을 강조하는 것은 수학교육의 본질을 더 잘 살릴 수 있기 때문이다.

결론적으로 구성주의 수학교육은 학생들에게 지식을 수동적으로 주입시키는 일이 아니고 학생이 능동적인 활동으로 스스로 생각하여 진리를 깨달을 수 있도록 도와주는 것이다. 소에게 물을 먹이기 위해서 소를 물가로 가도록 할 수는 있어도 먹게는 할 수 없다. 따라서 학습자가 스스로 생각하여 지식을 구성하기 위해서는 학습에 흥미를 느끼게 하여야한다. 발견학습, 협력학습과 토론학습 등 학생의 자발적인 행동과 독자적인 활동으로 상상력과 잠재력을 일깨워 학습자가 내외적인 발전적 변화를 가져오도록 해야한다. 문제를 풀 때 처음 떠오르는 수학적 아이디어와 풀이법의 발견은 학생 스스로 감격을 느낄 수 있어야한다. 이런 수업을 위해서 교사는 수업을 주도적으로 이끌어야하며 지식의 전달자가 아니고 학습해야할 내용을 구성할 수 있도록 촉진하고 도와주어야 할 중심 역할자로서 학습자료와 학습내용을 재구성하는 면밀하고 철저한 준비가 필요하다.

## 4. 역사 발생적 원리와 구성주의

우리 나라의 교육현실은 단순한 지식을 전달하는 주입식 교육으로 시험준비를 위한 문제풀이 중심으로 많은 수업시간을 할애한다. 전달된 지식을 그대로 받아들여서 축적하여 비슷한 문제들을 일정한 시간 안에 빠르게 해결해야하는 기능적 교육이 계속되었다. 이러한 결과 많은 학생들이 수학은 어렵고 따분한 존재로 생각하는 학생이 많다. 이런 문제점을 해결하기 위해서 역사 발생적 원리를 이용하여 구성주의 학습법을 활용할 수 있다.

구성주의 학습으로 조사, 탐구, 발표 등 학습활동으로 깊이 생각하여 문제를 이해하고 풀어 가는 재미와 즐거움을 느끼면서 보내는 시간이 되도록 만들어야한다. 수학적 사고력과 창의력을 기르기 위해서는 충분한 시간을 가지고 스스로 집중하여 생각하는 훈련이 필요하다. 수학에 열중하기 위해서는 자신감을 가지고 무엇인가를 자신의 생각을 표현할 수 있고 누구나 할 수 있다는 느낌을 가지도록 여유 있게 가르쳐야 할 것이다.

학습자들은 새로운 것을 조금씩 축적함으로써 배우기보다는 오히려 기존의 아이디어들을 수정함으로써 학습한다(피아제)는 것이 구성주의 학습이다. 구성주의 교육에서는 지식은 환경으로부터 수동적으로 받는 것이 아닌 인지하는 주체에 의해 활동적으로 구성되며, 학습은 학습자 자신의 세계를 조직하는 적응 과정이지 학습자의 외부에 이미 존재해 있는 세계를 발견하는 것이 아니라고 생각한다. 따라서 수학적 개념들을 역사 발생적 단계별로 조직하고 구성하여 학생들 스스로 탐구하여 발견하도록 학습하는 방법을 개발하고 발전시켜야 한다.

1960년대 새 수학운동은 모든 사람에게 문제를 해결할 수 있는 능력이 있다고 생각하며, 각 개인의 능력을 찾아내어 개발할 수 있다고 보았다. 이 운동의 배경이 되는 교육학자 브루너(Bruner)의 이론은 "지식의 구조를 학습한다는 것은 그 지식을 이해, 기억, 적용할 수 있도록 학습하는 것을 의미하고, 구조를 파악하면 이해가 잘되고, 기억하기 쉽고, 전이효과가 있고, 고등지식과 초보적 지식 사이의 간격을 좁혀준다[2]."고 주장하면서 학문의 구조가

되는 기본원리들을 가르쳐야 한다고 하였다. 수학교육에서는 행동에 의한 수학지식의 획득 과정으로는 먼저 구체적으로 행동할 수 있는 학습목표를 제시하고, 다음 기본개념 등 학습 내용을 단계와 순서별로 기본구조의 점진적, 위계적, 나선적(螺線的) 배열로 논리적 체계로 구성된 학습자료를 만들어 반복적 학습을 통하여 수학의 추상성과 구조성을 이해하도록 하고, 기억하여 적용하도록 한다. 학생들에게 의욕과 흥미를 위하여 다양한 학습방법의 기법과 전략을 개발하고, 교육보조재료를 적극 활용하고 되먹임(feed back)을 통한 학습평가와 행동 변화를 관찰하므로 써 학습내용과 지도방법을 고쳐나갈 수 있다.

이러한 수학지식의 획득과정으로 학생들은 수학적 기본개념과 지식을 전수 받아 반복적인 연습과 창의적 활동을 통해서 수학적 지식을 획득하고 만들 수 있다는 관점이다.

새 수학운동의 결과로 현대화를 위한 실험교과서를 출판하여 학문중심교육을 실시하게 되었다. 교과서는 집합개념과 수학의 구조(structure), 논리적 엄밀성, 발견적 학습, 나선식배열 등 학문중심교육으로 통합화와 구조화를 강조하였으며 수학의 내용이 추상화와 일반화가 되어 학생들에게 수학이 어렵다는 인상을 주었다.

그러나 이러한 과정에 의한 수학지식의 획득과정은 교사의 입장을 강조하고 학습자 각 개인의 입장을 간과한 외형적이고 관찰 가능한 교육으로 많은 한계점과 반성이 필요함이 지적되었다.

새 수학운동의 결과로는 영재교육에 관심이 많아지고 수학교육의 내용이 풍부해지고 교수법이 개발되며 일부 우수한 학생들의 학업 성취도가 높아졌다. 그러나 많은 학생들의 계산 능력이 떨어지고 성적이 하락하여 실패하였다는 평가와 비판을 받게 되었다[2].

새 수학운동의 반성으로 1970년대 기초 회복운동이 나왔고, 역사 발생적 원리의 활용이 부각되었다. 이 원리와 구성주의를 활용하여 수준 높은 수학교육을 할 수 있을 것이다.

페스탈로치(Pestalozzi, 1746-1827)는 인간 지식의 원천이 직관에 있다고 생각하고, 그 기초가 되는 것으로 "혼돈의 세계에서 개념적 정리의 개념을 수, 형태, 언어에 의해서 분류하고 인간 이성발달의 토대가 되는 참된 도야재로서 수학교육을 강조하였고, 정신체조로서 수학은 인간성 자체의 본성에 들어맞으며 모든 인식의 기초가 된다"고 생각하였고, "각 개인은 전 인류가 과학을 창조하였던 유사한 경로를 밟아서 지식에 도달하지 않으면 안 된다." 한편, "먼저 실물 계산을 가르치고 구체적인 실험으로 여러 가지 수속을 발견토록 한 다음에 비로소 추상적인 법칙이나 추상적인 과제를 주지 않으면 안 된다[13]."는 아동에 대한 애정 어린 교육사상을 주장했다.

수학은 다양한 사람들이 배울 수 있는 보편성과 수월성의 교과이며, 수학을 배울 때 수학적 지식은 전수 받는 것이 아니고 자신의 지식과 탐구로 새로운 지식을 스스로 구성하여 배우게 된다는 것이다.

인간은 지적 호기심만 자극한다면 자발적으로 학습도하고 노동도 한다고 한다. 수학시간에 문제 중에서 수학의 이야기, 퍼즐문제, 정보화 시대에 수학의 필요성과 컴퓨터의 발전으로 교과서 문제들의 시각화 등은 수학의 흥미를 끌어 낼 수 있는 양념 역할을 할 수 있다.

구성주의 학습의 방법으로는 첫째, 교사는 수업의 전체적인 목표만을 제시하고 구체적이

고 세부적인 학습 목표를 가지고, 학습에 대한 동기유발을 갖게 하여 학생들 스스로 수업을 참여해 나가면서 자신의 흥미와 관심, 그리고 수준 등을 고려하면서 수업을 진행한다.

둘째, 학습 환경에 있어서 협동적 분위기를 형성함으로써 사람들마다 얼마나 다양한 생각과 견해를 가지고 있는지를 배우게 한다.

셋째, 구체적인 상황을 배경으로 하여 지식을 제공함으로써 자신의 생각을 명확히 할 수 있고 추상적으로 지식을 제공하는 수업에 비하여 주어진 과제에 대한 근본적인 이해를 도울 수 있다.

넷째, 학생들의 학습에 대한 주인 의식을 갖게 하여 적극적이고 자율적인 학생들의 생각과 지식, 능력을 적극 발휘시킬 수 있는 분위기를 조성한다. 지식을 학습자 스스로 구성한다고 보고, 교사가 학생들의 사고에 깊은 통찰력을 가지고 있을 때 의미 있는 학습이 가능한 학생 중심의 학습이어야 한다.

끝으로 창안한 자신의 생각을 다양하게 적용하여 학습한 후 형성된 자신의 지식이나 개념을 다른 사람과 논의도 필요하다.

교사는 학생들에게 학습자료의 제공자와 안내자로서 수학시간에 깊은 사고력을 불러일으킬 수 있는 분위기와 수학에 대한 호기심과 매력을 느끼도록 만들어야할 것이다. 약간의 긴장 속에서 즐거움과 희열을 가질 수 있는 과목이 되게 해야 한다.

학생 스스로 배우려는 의욕과 자신감을 가지고 능동적인 탐구와 자신의 학습방법을 가지고 수학적 활동을 통하여 스스로 발견할 수 있도록 도와주어야 한다.

구성주의 발견학습에서는 수학을 배울 때 수학적 지식은 전수 받는 것이 아니고 자신의 활동으로 탐구하여 새로운 지식을 스스로 구성하여 배우게됨으로 논리성과 창의성을 배울 수 있다. 학생중심의 수학교육은 학생의 입장에서 수학의 내용을 선택하고 수업을 실행하고 평가하여야 한다.

수학교육에서 수학의 역사에 나타난 다양한 추측과 직관 그리고 증명과 반박을 통하여 수학적 개념이 발달하였고, 발달과정에 따라 수학의 내용을 바라봄으로서 적극적이고 능동적인 개념의 파악과 창의적인 학습으로 수학 학습에서 생각하며 알아 가는 기쁨을 주는 활동적인 수학교실이 되어야 한다.

그러나 수학교육에서 수학의 역사 발생적 원리와 구성주의 학습법을 적용해야 한다는 주장에도 불구하고 실제 수업에서 활용하기 어려운 이유는 입학시험이나 교육환경 때문이기도 하지만 가장 큰 장애는 수학학습에 활용할 수 있는 구체적인 학습 보조자료의 부족에 있다고 조사되었다[11]. 역사 발생적 원리의 적용의 어려운 점은 수학 이론이 창안 될 때에 그 수학자의 내외적인 동기 등 자세한 역사를 알 수 없다는 것이다. 또한, 역사의 발전에 따라 중요한 수학적 개념에 대한 역사의 연구가 거의 없다. 따라서 고대로부터 현대까지 동서양의 다양한 수학적 연구물의 내용을 조사하고 적용하여 구성주의 학습법을 수업에 적용할 수 있도록 교육재료를 만들어야 하는 어려움이 있다.

그러나 정보화 시대에 이런 조사와 연구는 우리들에게 남겨진 과제라 본다. 수업에서 직접 활용할 수 있는 학습자료의 개발이 조직적이고 철저한 연구에 의해서 이루어져야 한다.

## 5. 수업에서 활용의 실제

역사 발생적 원리와 구성주의 학습법에 따라 수학수업을 하려면, 수학적 지식을 완성된 결과가 아니라 수학화의 과정으로 다루어야 한다. 역사 발생적 원리에 따라 수학적 개념의 발생과 이론들이 확장되고 발달하는 과정을 학생들이 쉽게 이해할 수 있도록 교육재료를 재구성해야 한다. 이러한 재구성은 수업에서 학습내용의 수학적 개념을 폭넓고 깊이 있게 이해할 수 있도록 세심한 배려가 요구된다.

구성주의 학습에서 개인의 부담을 덜어주고 깊은 사고와 학습을 위해서는 당면 문제에 대해 공동의 해결과정을 권장한다. 교사와 학생이 함께 생각하고, 학생들 스스로의 상호작용을 통해 지식을 사회적으로 구성해 나간다.

수학의 모든 분야에서 역사 발생적 원리와 구성주의 학습법을 활용할 수 있을 것이다. 고급수학의 내용이나 현대수학의 내용일지라도 역사 발생적 순서에 따라 흥미 있게 조사하여 탐구하고 생각하여 학생들이 수학적 개념을 쉽게 구성할 수 있도록 지도할 수 있을 것이다.

### 1) 함수의 지도

함수를 확실히 알기 위해서는 함수의 발생과정의 역사와 지도방법을 구체적으로 제시되어야 한다. 함수는 언제부터 어떻게 시작되었고, 어떻게 함수란 개념을 만들게되었으며, 왜 함수라 불렀으며, 어떻게 사용되었고 현재는 어떻게 활용되고 있는지를 학생들의 호기심을 자극하며 학습을 진행하면 흥미 있는 수업이 되고, 학생들이 함수의 개념을 폭 넓게 이해하게 될 것이다.

함수의 개념을 현대적 정의로 두 집합 사이에서 임의의 $X$의 원소가 $Y$의 원소에 하나씩만 대응한다는 방법으로 함수 개념을 도입할 경우 학생들은 고정된 집합의 원소들 사이의 대응 관계로만 머리 속에 기억하게 된다. 따라서 학생들은 진정한 함수의 개념을 파악하지 못하고 수학적 사고력을 확장하기도 어렵게 된다.

함수 개념의 시작은 물건의 개수의 세기를 시작하면서 일대일 대응을 생각하고 숫자를 표시하였다. 고대 바빌로니아의 천문학 연구에서 별들의 운동에서 주기성을 발견하고 기록한 수표가 있다. 그리스인들도 천체의 운동을 삼각함수로 표현하였다. 이것이 비례관계의 단계이다.

오일러(Euler)는 "해석학은 변수와 이들 함수 사이의 과학이다."라고 하며 함수를 $f$로 표시하였다. 그는 함수를 "변량의 함수는 변량이나 수, 일정량들 사이의 관계 혹은 규칙을 나타내는 해석적 표현이다(1748)."라고 했다. 그 후 그는 함수를 해석적 표현을 사용하지 않고 종속관계로 함수를 정의하기에 이르렀다(1755).

물체의 운동을 연구하면서 함수의 개념화가 시작되었고, 이때 양의 가변성과 종속성이 함수관계로 표현되었다.

18세기 후반 편미분 방정식과 푸리에 급수 등 수학의 발전으로 코시(Cauchy)는 독립변량

의 값에 따라 정해지는 대응관계의 종속변량을 함수라 생각하게 되었다. 19세기 초에 디리클레(Dirichlet)는 대응으로서의 엄밀한 함수를 정의하였다. 그는 식으로 나타낼 수 없는 함수관계도 발견하였다.

수학화 과정에 대한 경험을 생략하고 공리적이고 구조적인 방법으로 정의된 함수의 정의를 추상적으로만 배우게된다면 함수의 개념을 피상적이고 추상적인 지식의 개념으로만 알게 될 것이다. 그러나 발생적 원리와 구성주의 학습법에 따라 지도할 경우 함수의 개념에서 많은 것을 경험하고 배우게 될 것이다.

### 2) 로그의 지도

로그(logarithm)는 네이피어(Napier)에 의해서 발명(1614)되었다. 로그의 용어는 그리스어의 Logos(比)와 arithmos(수)의 복합어이다.

로그의 이론적 기초는 그리스의 아르키메데스로부터 시작된다. 그는 지수의 공식을 설명하고 다루었다.

지수함수의 단계에서는 학생들에게 구체적인 지수함수의 수열을 제시한다. 예를 들면 미생물 한 마리가 1시간마다 분열하여 2배씩 불어난다면 경과된 시간과 미생물의 수를 수표로 만든다.

슈티펠(Stifel)의 **산술총서**(1544)에서 등차수열에서 덧셈이 등비수열의 곱셈에 대응한다는 점을 발견하였다. 등비수열의 항을 지수로 표현이 되며 분수의 지수와 음의 지수를 도입하였다. 그후 계산을 간단히 하기 위해서 지수와 어떤 수에 대한 거듭 제곱의 수열을 대비한 수표를 작성하였다.

수학자 네이피어는 등차수열의 항을 등비수열의 대응되는 항을 로그(log)로 불러서 로그를 창안했다. 그의 로그의 발견은 삼각함수의 곱의 공식에서 착상하여 기하학적으로 얻은 계산에서 곱셈을 덧셈으로 바꿀 수 있는 계산을 생각해 낸 것이다.

이듬해(1615)에 브리그스(Briggs)는 네이피어와 함께 상용로그를 만들었다. 그 후 브리그스는 상용로그표를 출판하였다.

그 당시 천문학, 항해, 무역, 전쟁 등에서 수치계산이 좀더 빠르고 정확하게 수행되어야 하는 분야가 많아졌다. 이러한 계산의 필요성에 따른 로그의 창안으로 로그를 활발히 연구하게 되었다[5].

라플라스(Laplace)는 "로그의 발명으로 일거리가 줄어서 천문학자의 수명이 배로 연장되었다."라고 말했던 것처럼 아주 중요한 수학적 성과였다.

자연로그가 최초에 나타난 것은 네이피어의 *Descriptio*(1618)의 부록이고 보간법의 설명이 있다. 스페이델은 **새로운 로그**(1622)에서 1에서 1000까지 수의 자연로그의 수표를 발표했다. 자연로그라는 용어는 자연세계에서 일어나는 변화를 설명할 수 있는 함수이기 때문에 붙여진 이름이다.

### 3) 집합의 지도

칸토어(Cantor)는 1872년 함수의 삼각급수의 표현의 유일성을 무한개의 불연속 점을 가진 구간 위에서 일반화하였다. 이때 그는 연속성의 연구에서 실수의 비가산(nondenumerable)성을 발견하였다. 그는 집합을 창안하고 완성된 무한집합의 존재를 인정하여 무한을 체계적으로 연구한 것이 집합론의 시작이다.

수학적 개념을 지도할 때 학생들에게 처음에는 구체적이고 직관적인 상징을 수반하는 정의가 제시되어야 한다. 초기의 직관적인 개념에서 수학적 사고가 발전하면서 초기의 정의의 문제점과 의문점을 스스로 발견하도록 하면서 보다 엄밀하고 완전한 정의를 만들어 가도록 해야한다. 집합의 정의의 발전과정에서도 수많은 논쟁과 토론이 있었다.

제논(Zenon, BC 495-435)의 무한에 관한 역설(Paradoxe, 逆說)은 운동에 관해서 이분법(二分法)이 있다, 아리스토텔레스는 무한은 현실적이거나 완결된 것이 아니고 잠재적(potential)으로 존재한다고 했다. 잠재적 무한이란 자연수열과 같이 언제까지나 계속 나아가는 무한이다. 그 후 무한은 신의 속성으로 취급되어 중세에는 신학과 결부되었다. 갈릴레오는 자연수와 자연수의 일부인 제곱수와 일대일 대응한다는 것을 알고 전체와 부분이 같다는 역리를 발견하였다.

칸토어는 그 후 '완결된 집합'(1874)이라는 개념을 도입하여 초한수에 의한 순서수의 체계를 세우고, 기수를 도입하여 연구하였다. 그가 창안한 실무한(actual)은 완성된 형태로 현실적인 무한이다. 따라서 무한을 집합으로 전체를 묶어서 유한처럼 취급할 수 있게되었다.

신의 영역에 있었던 무한에 대한 연구는 수학을 '무한을 연구하는 학문'으로 영역을 확장하게 하였다.

러셀(Russell, 1902)은 집합론에 대한 역설을 발표하였다. 그의 역설은 "모든 집합의 집합은 존재하지 않는다."는 것이다. 이러한 모순을 극복하기 위해서 집합과 원소를 무정의 용어로 하는 공리론적 집합론을 다양하게 구성하여 만들었다. 지금도 완전한 집합론은 만들기 위해서 많은 수학자들이 노력하고있다.

## 6. 맺는 말

수학교육을 통해서 각 개인이 건강한 꿈을 키우고 자신감과 자존심을 키워주는 교육이 되어야하고, 학생들의 다양한 소질과 특기 등 개성과 적성에 맞는 교육을 지향해야할 것이다.

새 천년 지식기반산업과 문화의 사회에서는 지식의 축적이 중요한 것이 아니라, 지식과 정보 등을 판단하고 관리하여 창조하는 창의력이 중요하다. 폭넓게 경험하고 깊이 있게 사고하고 합리적인 판단과 행동하는 적극적이고 창의적인 인간을 길러내는 일은 국가경쟁력 차원에서도 매우 중요하다.

수학교육에서 학생들이 실제생활에서 경험할 수 있고 필요한 수학적 상황과 수학의 역사에서 수학적 개념의 발생과 그 발달 과정을 고찰하여 학생들이 보다 잘 이해할 수 있도록

역사 발생적 원리에 따라 교재를 재구성하여 구성주의 학습을 활용하여야 한다. 학생들의 호기심과 흥미를 자극하여 자신의 학습의 목표가 확실한 가운데 수학적 활동으로 깊은 사고력과 상상력으로 형식화와 추상적인 수학의 이론도 이끌 수 있도록 하여야 한다.

구성주의는 학습에서 과거의 교사중심의 주입식 교육에서 학생중심의 학습으로 전환하여 학생 스스로 적극 참여하여 스스로 공부하는 습관을 가지게 한다. 정보화 지식기반사회에 적응하기 위해서는 적극적이고 능동적인 개인과 주관적 경험을 중요시하는 구성주의적 수학교육이 요구되고있다.

학생들이 스스로 탐구하여 수학적 이론과 문제에 도전하여 해결하는 평생 공부하는 삶을 살도록 해야한다. 주어진 과제를 능동적이고 자율적으로 조사 연구하여 해결하는 창의력과 끈기를 최대한 길러주는 교육이 되어야 한다. 따라서 공부와 탐구정신이 몸에 배어서 습관이 되고 평생동안 도전과 탐험을 즐기고 항상 새로운 생동력이 넘치는 삶이 되어야 할 것이다.

## 참고 문헌


1. 김응태, 박한식, 우정호, **수학교육학개론**, 서울대학교 출판부, 1984.
2. 김종명, "수학사에서 수학의 패러다임 형성과 수학교육관," *J. Historia Mathematica,* Vol. 10, No. 2(1997), 53-63.
3. 남승인, "수학교육과 교사의 수학관," *Proceedings of Math. Education,* Vol. 3, The 18th National Meeting of Math. Education(1995), 185-193.
4. 남승인, "교사의 數學觀과 구성주의," **한국수학교육학회지** 시리즈 C: <초등수학교육> Vol. 2, No. 1(1998), 15-26.
5. 민세영, "역사 발생적 원리에 따른 로그단원의 지도에 관한 연구," **대한수학교육학회 논문집** Vol. Ⅶ, No. 2(1997), 381-396.
6. 박문환, **수학교육의 철학적 기초에 대하여**, 서울대학교 대학원 석사논문, 1989.
7. 박영배, "수학 교수·학습의 구성주의적 전개," *Math Festival Proceeding,* 제1집 (1999), 9-23.
8, 박인우, "학교교육에 있어서 구성주의 교수원리의 실현 매체로서 인터넷 고찰," **교육공학 연구** Vol. 12, No. 2(1996), 81-103.
9. 유연주, 임재훈, "급진적·사회적 구성주의와 포스트 모더니즘," **대한수학교육학회 논문집** Vol. Ⅶ, No. 2(1997), 359-380.
10. 임재훈, "플라톤주의, 듀이주의, 구성주의 수학교육철학," *Math Festival Proceeding,* 제1집(1999), 212-231.
11. 우정호, **학교 수학의 교육적 기초**, 서울대학교 출판부, 1998.
12. 정영옥, "수리철학의 변화와 수학교육에의 시사점," **대한수학교육학회 논문집** Vol. Ⅶ,

No. 1(1997), 295-316.
13. Cajori(정지호역), **수학의 역사**, 창원사, 1977.
14, Eves(이우영, 신항균 역), **수학사**, 경문사, 1995.
15. J. Kilpatrick,"What Constructivism Might Be in Mathematics Education," *PME-XI* (1987), 3-27.