Historia Mathematica Vol. 13, No. 1, 2000, 33-48

수학 교육에 활용할 옛 문제 연구*

광운대학교 수학과 **허 민**

Abstract

In this paper we collect the mathematical problems from the past which can be used in classroom instruction. These problems can show the cultural value and the utility of mathematics, and encourage learning and illuminate the concept being taught.

0. 머리말

수학은 다른 어떠한 학문보다 더 오래되었고, 다른 학문과 달리 수천 년 전에 창조된 수학의 대부분은 오늘날에도 여전히 유효하다. 수학의 존재 가치와 중요성을 대변하는 수학의 이런 장구한 역사 속에는 수학 교육에 활용할 만한 소재가 풍부하게 간직되어 있다.

절대적인 것으로 여겨지는 현재의 정리들은 과거의 문제에 대한 답으로 존재한다. 사실, 해결해야 할 문제가 없었다면 수학 지식은 결코 형성되지 못했을 것이다. 인식론자 바슐라르(G. Bachelard)는 다음과 같이 썼다[5, p. 17].

> 과학의 견지에서, 모든 지식은 문제에 대한 응답이다. 만약 어떠한 문제도 없었다면, 과학 지식을 얻을 수 없었을 것이다. 스스로 나타나는 것은 없다. 주어진 것도 없다. 모든 것은 구성된다.

수학사는 수학 개념과 이론들이 문제를 해결하기 위해 구성되고 수정되며 확장되었음을 보여준다. 그러므로 역사를 통해 수학 교수와 학습을 풍요롭게 하기 위한 좀더 직접적인 접근 방법은 학생들로 하여금 옛 수학자들에게 흥미 있었던 문제 몇 개를 풀어보게 하는 것이다. 옛 문제는 학생들을 문제가 제시된 시대와 접할 수 있게 하며, 그 시대의 수학적 관심사를 예시한다. 이를 통해 학습 동기를 유발시킬 수 있으며, 수세기 전에 유래된 문제를 해결하는 과정에서 짜릿한 전율과 만족감을 얻을 수도 있다.

옛 문제를 도입하기 위해 별도의 시간을 할애할 필요는 없다. 이는 수업의 일부로서 짧은

* 이 논문은 1999년도 광운대학교 교내학술연구비에 의하여 연구되었음.

시간 동안, 가르치고 있는 주제와 직접 관련된 옛 문제를 제시하고 학생들이 직접 풀어보게 하면 충분하다. 기존의 연습 문제와 상충되지 않으며 오히려 보완하는 효과가 있다. 본 글에서는 중등학교 수학과 관련된 몇 가지 옛 문제를 소개하겠다.

1. 수학의 문화적 가치를 보여주는 옛 문제

과거에 등장했지만 현재도 똑같은 형태로 제시되는 문제가 많이 있다. 그리고 서로 다른 문명 사회에서 서로 다른 시기에 거의 같은 문제를 다룬 예도 쉽게 찾아볼 수 있다. 이런 문제들은 수학의 뿌리를 알려주고 수학의 보편성을 보여주며 수학의 문화적 가치를 보여주기에 충분하다.

직각 삼각형의 중요성은 고대부터 인식되었다. 고대 이집트에서는 밧줄로 3-4-5 직각 삼각형을 만들어 피라미드 건설에 이용했다. 그리고 피타고라스의 정리는 그리스 이외의 사회에서도 피타고라스의 시대 이전에 이미 발견되고 이용되었음을 다음 문제들로부터 확인할 수 있다[15, p. 27]. 이런 일련의 문제는 학생들에게 어떤 수학 이론이 유일하게 발견되었다는 잘못된 생각을 없애줄 수 있다.

<u>문제 1</u>. 길이가 30피트인 막대가 벽에 기대어 서 있다. 위쪽 끝은 6피트만큼 미끄러져 내려왔다. 아래쪽 끝은 얼마만큼 움직였는가? (바빌로니아, 기원전 1800년경) (답: 18피트)

<u>문제 2</u>. 높이 1장의 담이 있다. 통나무가 담에 기대어 서 있다. 통나무 윗끝은 담장의 높이와 정확히 만나고 있다. 나무의 아래 끝을 끌어당겨 1척을 내리면 그 나무는 담에서 땅으로 떨어진다. 그렇다면 나무의 길이는 얼마인가? (중국, 기원전 300년) (답 : 5장 5척) [3, p. 162]

<u>문제 3</u>. 30피트의 사다리가 30피트의 탑에 기대어 서 있다. 사다리의 아래 끝이 탑의 밑으로부터 18피트 떨어지게 하면, 탑의 꼭대기로부터 사다리의 위 끝까지는 얼마인가? (이탈리아, 서기 1300년)

외접하고 내접하는 도형 사이에 존재하는 관계를 묻는 다음과 같은 문제들이 있다.

<u>문제 4</u>. (1) 각 변의 길이가 50, 50, 60인 이등변 삼각형이 내접하고 있는 원의 반지름을 구하라[15, p. 31]. (바빌로니아, 기원전 2000년경) (그림 1 (a))
(2) 각 변의 길이가 12인 정삼각형에 외접하는 원의 넓이를 구하라[15, p. 31]. (이집트, 서기 150년경) (그림 1 (b))

문제 5. (1) 지름이 10자인 원에 내접하는 정오각형의 각 변의 길이와 넓이를 구하라[그림 2].

(2) 한 변이 12자인 정사각형을 3개의 품(品)자 꼴로 내접시키는 원의 지름을 구하라.

(3) 지름 40자의 원에 정사각형을 품자 꼴로 내접시킬 때, 한 변의 길이를 구하라[그림 3].

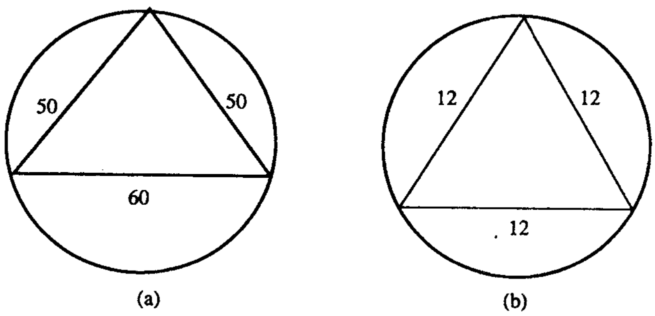


그림 1. 내접하는 삼각형과 관련된 고대의 문제

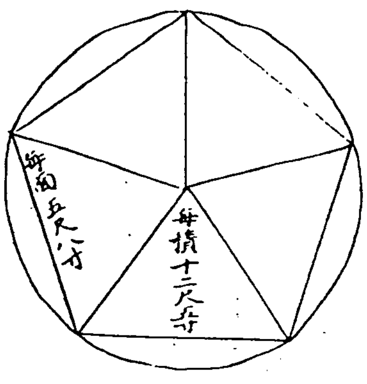


그림 2. 원에 내접하는 정오각형

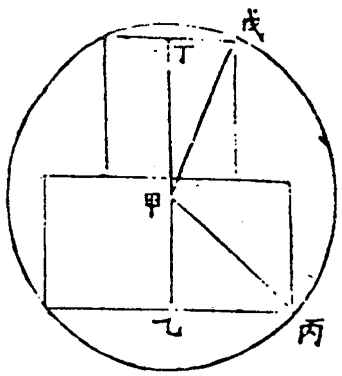


그림 3. 원에 내접하는 品자 꼴의 도형

문제 5의 (1)은 조선의 중인출신 산학자 홍정하(洪正夏)의 **구일집**(九一集) 제9장에 그림 2와 함께 등장한다[2, 제2권, 해제 四]. (2)와 (3)은 조선말 중인출신 산학자 이상혁(李尙爀)의 **산술관견**(算術管見) 제2장에 그림 3과 함께 등장한다[2, 제4권, 해제 三].

문제 6. (1) 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a와 b이고 빗변의 길이가 c인 직각 삼각형에 내접하는 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이는 얼마인가?(그림 4)

(2) 직각을 낀 두 변의 길이가 각각 a와 b이고 빗변의 길이가 c인 직각 삼각형에 내접하는 원의 반지름은 얼마인가?(그림 5)

문제 6의 (1)은 중국 수학의 고전 **구장산술**(九章算術) 제9장의 15번째 문제와 일치하고, (2)는 16번 문제와 일치한다([3, p. 169]와 [15, pp. 25-26]을 보라).

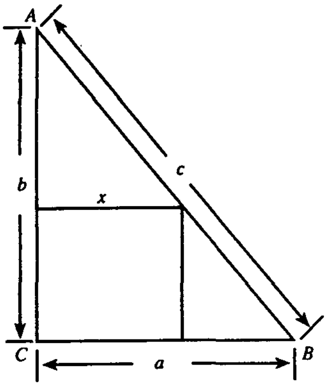


그림 4. 직각 삼각형에 내접하는 정사각형 $x=ab/(a+b)$

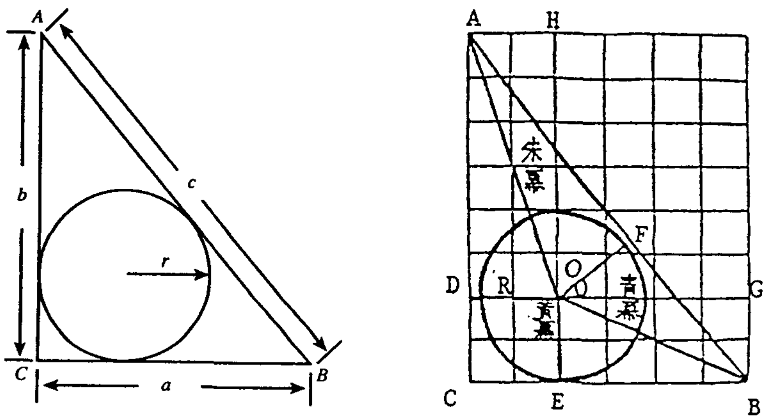


그림 5. 직각 삼각형에 내접하는 원 $r=ab/(a+b+c)$

<u>문제 7</u>. 밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 $2r$인 원기둥의 겉넓이와 이에 내접하는 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이를 비교하라. 또, 이 도형의 부피를 비교하라.

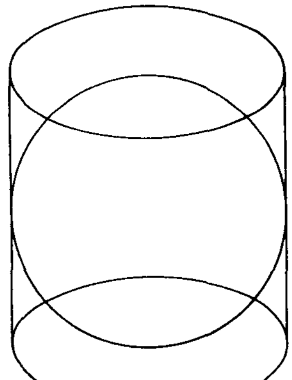


그림 6. 구와 원기둥

중학교 수학에서 입체도형에 관한 문제로 등장하는 이것은 역사적으로 유명한 아르키메데스의 구와 원기둥 문제이다(그림 6). 원기둥과 구의 겉넓이의 비와 부피의 비가 모두 3 : 2이다. 적분을 연구했던 아르키메데스는 이 결과를 매우 자랑스럽게 생각해서 자신의 묘비에 새겨달라고 요청할 정도였다[13, 강의 9]. 이런 문제는 도형 사이에 존재하는 멋진 관계를 통해 수학의 아름다움을 보여준다.

2. 수학의 실용성을 보여주는 옛 문제

현재 중등학교에서 가르치고 배우는 문제 중에는 아주 오래 전부터 등장해서 연습 문제로 활용되고 있는 것이 많이 있다. 그런데 과거에는 의미 있던 문제가 시간이 지나면서 심하게 변형되어 의미를 잃고 '문제를 위한 문제'로 전락하는 경우가 있다. 다음은 이런 예를 보여준다[12, pp. 139-140].

초등 대수학에는 오랜 역사를 가진 똑같은 유형의 문제가 많이 있다. 이런 유형의 문제로 이른바 '물통 문제'가 있는데, 원래 주어진 유출 속도를 가진 몇 개의 파이프를 이용해서 물통을 채우는 문제를 고려했다.

물통 문제는 명확한 형태로 100년경 헤론의 측정론에 처음으로 등장한 것으로 보인다. 그 뒤 275년경 디오판토스의 책들과 500년경 메트로도로스가 쓴 그리스의 풍자시에서 찾아볼 수 있다. 그 뒤 곧 이 문제는 동양과 서양 모두에서 공통적으로 등장했다. 인도의 고전 바스카라의 릴라바티(1150년경)에 실린 알큐인(800년경)의 문제 목록과 그 뒤의 아라비아 산술 책들에서 이 문제를 찾아볼 수 있다. 책이 인쇄되기 시작했을 때, 톤스톨(1522), 프리시우스(1540), 레코드(1540년경)와 같은 초기의 저자들은 이것을 주요한 문제로 다루었다.

원래, 물통 문제는 일상 생활의 관찰 결과를 반영했다. 지중해 연안에 살고 있던 사람들은 여러 가지 지름을 가진 파이프로 채워지는 물통을 봤다. 그런데 교과서 저자들 사이에는 흥미로운 법칙이 있다. 즉 형식적으로 베일을 씌우면 거의 어떠한 양심의 가책도 느끼지 않고 다른 사람의 책 내용을 서로 훔치는 것을 매우 당연하게 생각한다. 이에 따라, 물통 문제는 여러 가지 변형된 형태로 등장했다.

예를 들면, 15세기에서 출발해서, 양을 잡아먹는 사자, 개, 이리, 또는 다른 짐승이 관련된 변형들을 찾아볼 수 있다. 16세기에는 다음과 같은 형태의 담을 쌓거나 집을 짓는 사람들이 관련된 또 다른 변형을 찾아볼 수 있다. "A는 이 작업을 4일만에 할 수 있고 B는 3일만에 할 수 있다. 두 사람이 함께 일하면 얼마나 걸리겠는가?"

프리시우스의 책에서 이것은 다음과 같이 우스꽝스러운 음주 문제가 되었다. "어떤 사람은 포도주 한 통을 20일 동안에 마실 수 있지만, 아내와 함께 마시면 14일만에 마실 수 있다. 아내 혼자 마신다면 얼마나 걸리겠는가?" 무역 거래의 증가와 함께, 세 개의 돛을 단 배의 경우로 변형된 문제를 볼 수 있다. 즉 "가장 큰 돛을 달면 2주일, 다음으로 큰 돛을 달면 3주일, 가장 작은 돛을 달면 4주일만에 항해를 마칠 수 있을 때, 돛 세 개를 모두 달면 얼마나 걸리겠는가?" 그래서 원래의 물통 문제는 실제적인 면이 있었지만 여기에 이르면 비현실적인 상황에 이른다. 항해 문제의 경우, 돛 사이에 서로 방해하는 요인과 배의 속도는 돛의 넓이에 비례하지 않는다는 사실을 무시하고 있다. 아마도 이런 불합리한 점은 다음과 같은 문제에 이르면 최고점에 도달할 것이다. "한 사제는 5시간 기도를 들여 연옥에 있는 한 명의 영혼을 빼올 수 있고 다른 사제는 8시간이 걸릴 때, 두 사제가 함께 기도하면 얼마가 걸리겠는가?"

물통 문제와 같은 유형의 문제를 현재도 많이 다루고 있다. 위의 글은 역사적 고찰을 통해 이런 문제의 의미를 찾아줄 수 있음을 보여준다.

학습 내용을 의미 있게 하고 수학의 실용성을 보여주는 몇 가지 문제를 제시하겠다. 먼저 삼각형의 합동을 이용하는 예를 보자.

예 1. 그림 7과 같이 해변으로부터 배까지의 거리를 사분의를 이용해서 구하는 탈레스의 방법이 있다[5, p. 18].

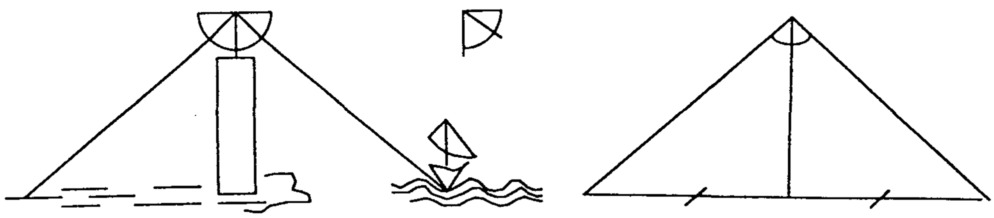


그림 7. 삼각형의 합동을 이용한 거리 측정

이것은 직각 삼각형의 합동을 이용하는 방법으로, 직관적으로 쉽게 이해되기 때문에 일반적인 삼각형의 합동을 가르치기 전에 소개할 수 있다. 컴퍼스를 이용해서 강의 폭과 같은 거리를 측정하는 데 이 방법을 활용할 수 있다.

다음은 직각 삼각형의 닮음을 이용해서 도달할 수 없는 거리까지의 길이와 높이를 구하는 예들이다.

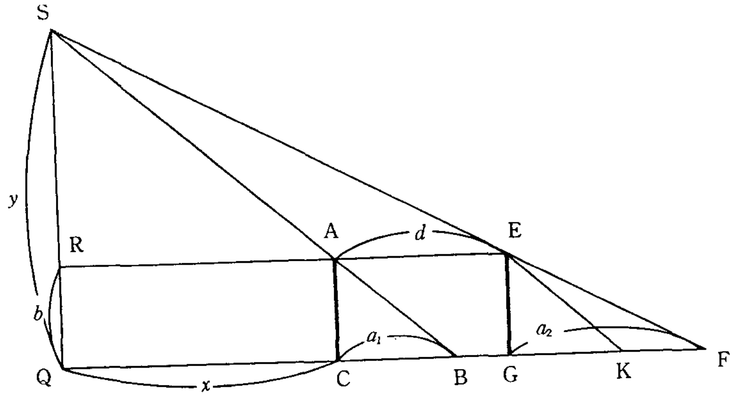
예 2. 홍명희의 **林巨正**에는 다음과 같은 구절이 등장한다[4, p. 50].

> 서림이가 김억석이와 실없는 수작을 하는 동안에 황천왕동이와 길막봉이는 매로바위 밑에 와서 바위를 치어다보며 서너 길 되느니 못 되느니 눈어림을 다투고 있었다. 서림이가 와서 치어다보고
> "이 바위 높이쯤은 긴 바지랭대두루 잴 수가 있을지 모르지만 잴 수 없다구 치더래두 망해도(望海闘) 법만 알면 대번 바위 높이를 알 수가 있소. 그 아는 법은 조그만 나무때기를 바위와 같은 방향으로 세우구 그림자 길이를 재어보구 그 다음에 바위의 그림자 길이만 재어보면 바위 높이는 자연 알게 되우. 지금 가령 한 자 되는 나무때기의 그림자가 두 자가 되었는데 바위 그림자는 스무 자라구 하면 바위 높이는 열 자가 아니겠소."
> 수리(數理)를 알거냥하고 한바탕 잘 지껄이었다.

여기서 직각 삼각형의 닮음과 그림자를 이용해서 바위의 높이를 간단하게 측정하는 예를 볼 수 있다. 실제로, 고대부터 해와 달의 높이와 거리를 땅에 수직으로 세운 그노몬(gnomon, 작은 막대)의 그림자를 이용해서 측정했다. 이집트와 인도의 성직자는 태양의 그림자 길이로 결정되는 태양의 위치에 따라 종교 의식 일정을 정했으며, 나중에 회교 사회에서는 그림자의 길이에 근거해서 기도 시간을 결정했다[14, p. 57].

중국에서도 직각 삼각형의 닮음과 그림자를 이용한 측정 방법이 활용되었다. 피타고라스 정리의 증명이 등장하는 수리 천문학에 관한 중국의 고전 **주비산경**(周髀算經, 기원전 300년 경)에는 태양의 그림자를 측정하는 도구인 '비'(髀=gnomon)의 사용법, 높이와 거리의 측정법에 관한 대화가 있다. 이를 통해 하지와 동지 등을 결정했는데, 이는 농업을 위한 중요한 결정 사항이었다. 그리고 비의 변형으로 L자 모양의 곡자가 이용되었는데, 이것은 수직의 비와 그림자의 길이를 재는 밑변을 가진 도구이다. 곡자를 이용해서 정사각형과 원을 그리고, 직각 삼각형(구고, 句股)의 닮음을 활용해서 멀리 있는 사물까지의 거리와 높이 및 깊이 등을 간접적으로 잴 수 있었다[1, pp. 120-133].

예 3. 유휘(劉徽)의 **해도산경**(海島算經)에는 직각 삼각형의 닮음을 이용한 측정법이 등장한다. 이 책은 직각 삼각형의 응용 문제를 다룬 **구장산술** 구고장의 부록 형식으로 썼으며 중차(重差)라고 불렸으나 나중에 독립된 책으로 엮어졌다. 중차는 태양의 고도와 거리를 측정하는 방법으로 유휘 이전부터 알려진 방법이다. 이 책의 첫째 문제가 바다에 외따로 떨어져 있는 섬까지의 거리와 높이를 산출하는 측략상의 문제이며, 예 2에서 인용한 문장에 등장하는 망해도법의 예이다. 이 방법은 그림 8과 같이 길이가 같은 두 개의 비를 세우고 두 가지 직각 삼각형의 닮음을 이용해서 섬까지의 거리와 높이를 산출한다 [1, pp. 137, pp. 147-150].



$$y = \frac{bd}{a_2 - a_1} + b$$

$$x = \frac{a_1 d}{a_2 - a_1}$$

그림 8. 망해도법

예 4. 탈레스는 이집트를 방문했을 때 피라미드의 높이를 그림자를 이용해서 측정해서 칭찬과 존경을 받았다고 한다. 그림 9는 탈레스가 서로 다른 시간에 피라미드의 그림자를 측정하고 직각 삼각형의 닮음을 이용해서 피라미드의 높이를 정한 방법을 예시한다[9, p. 24-25].

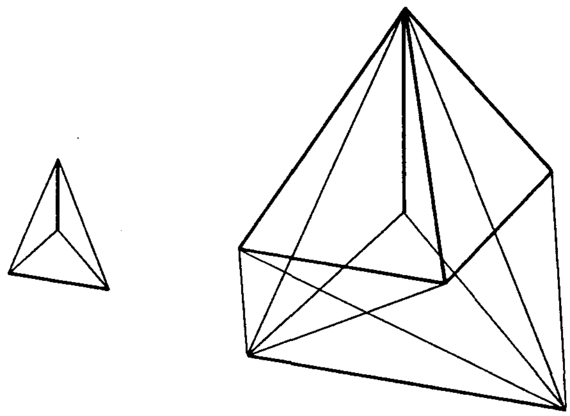


그림 9. 탈레스의 피라미드 높이 측정법

현재 우리가 가르치고 있는 삼각형의 닮음에 관한 내용을 이런 관찰과 응용으로부터 형식화되고 발전되었을 것이다. 그러므로 삼각형의 닮음을 가르칠 때 위의 예를 참고하면, 수학의 뿌리를 확인할 수 있고 이의 응용을 알려줄 수 있을 것이다.

다음은 작도 문제의 응용에 관한 예이다.

예 5. [16]에서는 바르톨루스(Bartolus)가 1355년에 쓴 논문에 나타난 대로 강기슭에 새로 형성된 충적지를 분할하는 문제를 다루었다. "새로운 땅은 가장 인접한 땅의 소유주가 차지한다."는 원칙에 따라 충적지를 분할하는 과정은 수선, 각의 이등분선, 원호의 중심 등과 같은 기본적인 작도를 응용한 예이다.

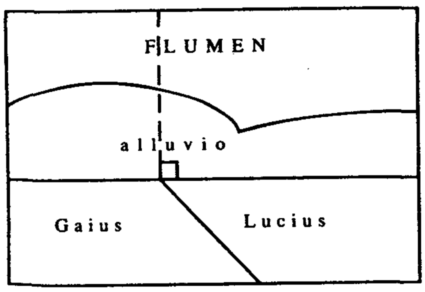


그림 10. 수선 작도

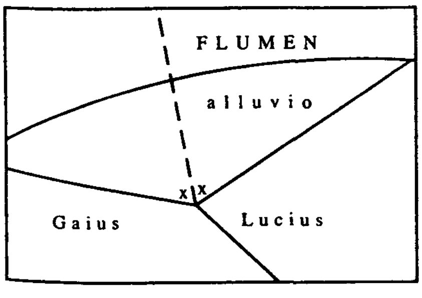


그림 11. 각의 이등분선 작도

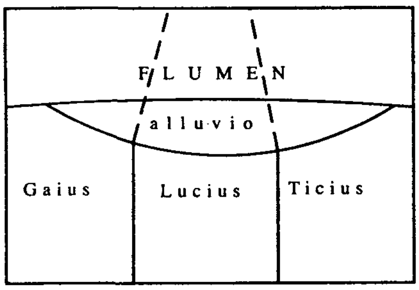


그림 12. 원호의 중심 작도

그림 10, 11, 12는 강기슭이 직선이거나 각을 이루거나 원호인 경우 새로운 형성된 충적지를 분할하는 방법을 예시하고 있다. 이런 문제는 작도의 필요성을 인식시키고 작도의 응용을 보여주는 예로 활용할 수 있다.

다음은 측량과 관련되어 직각삼각형의 닮음과 비례식 및 이차 방정식을 응용하고 있다.

예 6. 한 변의 길이를 알 수 없는 정사각형의 마을이 있다. 그 마을의 네 개의 성벽 중앙에는 문이 나 있다. 북문을 나와 20보가 되는 지점에 나무가 한 그루 서 있다. 남문을 나와 14보라 걸은 다음에 방향을 바꾸어 서쪽으로 1775보를 갔더니 그 나무가 보였다. 그렇다면 마을의 한 변의 길이는 얼마인가?[3, p. 170]

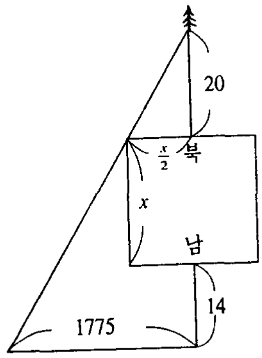


그림 13. 정사각형의 한 변 구하기

$$(x+34) : 1775 = 20 : x/2$$

$$x(x+34)=71000$$

$$x=250$$

3. 학습 내용을 명확하게 이해시켜주는 옛 문제

옛 문제를 이용해서 학습한 개념을 명확하게 보여줄 수도 있다.

예 7. 십진 기수법을 가르칠 때, 십진법을 이용한 중국, 이집트, 로마의 수 체계를 소개하고 (그림 14, 15), 이를 통해 자리의 값과 자리잡기의 원리를 명확하게 설명하고 인도-아라비아 수 체계의 장점과 유용성을 강조할 수 있다.

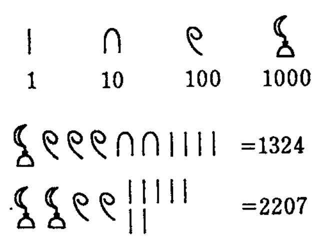


그림 14. 이집트의 수 체계

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

MCCXXXVII =1237

MMDCLXVI =2666

그림 15. 로마의 수 체계

예 8. 수를 기하학적으로 나타낸 피타고라스 학파의 다각수는 대수학과 기하학 사이의 관계를 보여주고, 시각적인 관찰을 통해 직관적인 이해를 도울 수 있다[13, pp, 132-133].

문제 8. 임의의 정사각수는 두 개의 연속한 두 삼각수의 합이다(그림 16).

문제 9. 1부터 시작하는 연속한 홀수의 합은 정사각수이다(그림 17).

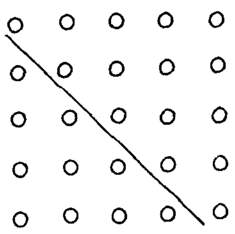


그림 16. $n^2=\frac{(n-1)n}{2}+\frac{n(n+1)}{2}$

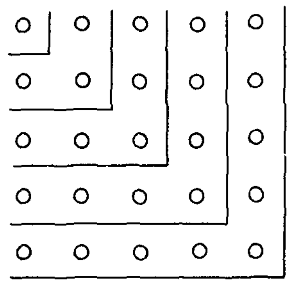


그림 17. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

영어의 square가 정사각형과 제곱수(평방수)를 모두 뜻하는 이유를 다각수를 통해 이해시킬 수 있다.

예 9. 이차 방정식을 가르칠 때 '완전 제곱에 의한 풀이'(completing the square)를 이해시키기 위해 그림 18에 예시한 알콰리즈미의 기하학적 접근 방법을 이용할 수 있다[15, p. 28]. 이런 접근 방법은 완전제곱에 의한 풀이를 명확하게 이해시킬 수 있으며, 대수학과 기하학 사이의 밀접한 관계를 강조할 수 있다.

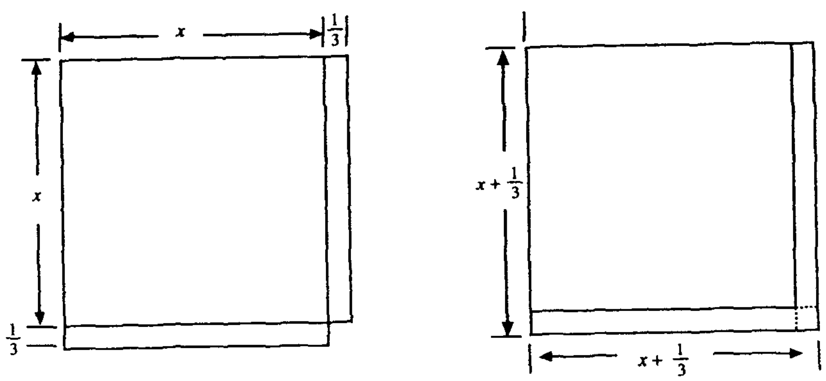


그림 18. $x^2+\frac{2}{3}x=\frac{35}{60}$ $\quad\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{35}{60}+\frac{1}{9}$

4. 수학의 흥미를 줄 수 있는 옛 문제

수업을 흥미롭고 활기 있게 하기 위해 다음과 같은 옛 문제를 활용할 수 있다.

예 10. 약수와 배수를 가르칠 때 우애수의 쌍을 소개할 수 있다.

220의 자신을 제외한 진약수는 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110인데, 이들의 합은 284이다. 또, 284의 진약수는 1, 2, 4, 71, 142인데, 이들의 합은 220이다. 이렇게 두 수의 진약수들의 합이 각각 다른 수와 같을 때 그 두 수를 '우애수의 쌍'이라 한다. 우애수의 쌍에 대한 자세한 설명은 [8, 78장]과 [13, pp. 128-129]를 보라.

학생들에게 우애수의 쌍을 제시하고 약수를 찾아보게 하며 더해서 위와 같은 결과를 찾아보게 하는 것 자체도 매우 흥미로운 학습이 될 것이다. 그리고 또 다른 우애수의 쌍을 찾아 볼 수 있게 할 수 있다. 다음은 이와 관련된 문제이다.

<u>문제 10</u>. 자연수 $n \geq 2$에 대해 다음과 같이 정의된 p, q, r이 모두 소수이면 $2^n pq$와 $2^n r$은 우애수의 쌍이다[13, p. 140].

$$p=3 \cdot 2^n-1, \quad q=3 \cdot 2^{n-1}-1, \quad r=9 \cdot 2^{2n-1}-1$$

중학생은 구체적인 경우, 이를테면 $n=2$와 $n=4$ 등을 대입해서 이를 확인할 수 있으며, 등비 급수를 배운 고등학생은 이를 증명할 수 있다.

예 11. 약수와 배수를 가르칠 때 완전수, 결핍수, 과잉수도 도입할 수 있다.

어떤 수의 모든 진약수의 합이 원래의 수와 같을 때 그 수를 '완전수'라 하고, 원래의 수보다 작을 때를 '결핍수'라 하며, 원래의 수보다 클 때 '과잉수'라고 한다. $6=1+2+3$이므로 6은 완전수이고, 그 다음 완전수는 28과 496이다. 그리고 8은 $1+2+4$보다 크므로 결핍수이다. 10과 100 사이에는 단지 21개의 과잉수가 있는데, 이것들은 모두 짝수이다. $945=3^3 \cdot 5 \cdot 7$은 최초의 홀수인 과잉수이다.

작은 자연수의 약수를 찾아 이들을 완전수, 결핍수, 과잉수로 분류해 보는 것은 중학생에게 흥미로운 연습 문제가 될 것이다. 다음 문제는 유클리드의 **원론** 제IX권의 마지막 정리인데, 등비급수를 배운 고등학생은 이를 증명할 수 있다.

<u>문제 11</u>. 자연수 n에 대해 2^n-1이 소수이면, $2^{n-1}(2^n-1)$은 완전수이다.

유클리드의 공식으로 얻는 완전수는 모두 짝수인데, 오일러는 짝수인 모든 완전수가 반드

시 이런 꼴이라는 사실을 밝혔다. 그래서 짝수인 완전수에 대한 연구는 2^n-1 꼴의 소수에 대한 연구로 귀결되었다. 이런 소수를 '메르센 소수'라고 부른다. 완전수에 관한 자세한 내용은 [8, 138장]과 [13, pp. 129-130]을 보라. 이런 책에는 완전수에 관한 몇 가지 성질이 제시되어 있다. 완전수와 결핍수에 관한 다음과 같은 문제도 있다.

문제 12. 완전수의 모든 약수의 역수의 합은 2이다.

문제 13. 소수 p에 대해 p^n은 결핍수이다.

예 12. 소수를 가르칠 때 메르센 소수를 도입할 수 있다.

자연수 $n=1, 2, 3, \ldots$에 대해 2^n-1 꼴의 수를 '메르센 수'라고 한다. 메르센 수는 두 가지 이유에서 관심을 끈다. 현재까지 알려진 가장 큰 소수는 메르센 수이며, 위에서 지적한 대로 소수인 메르센 수, 즉 메르센 소수의 도움으로 완전수를 발견할 수 있다. 메르센 소수와 관련된 내용은 [7, pp. 17-23], [8, 2 · 4 · 8 · 10 · 63 · 105장]을 보라.

문제 14. 자연수 n에 대해 2^n-1이 소수이면, n은 소수이다.

예 13. 소수와 관련해서 역사적으로 유명한 페르마 수를 소개할 수 있다.

n째 '페르마 수'는 $F_n=2^{2^n}+1$ 꼴의 수이다. 예를 들면, $F_0=3$, $F_1=5$, $F_2=17$, $F_3=257$, $F_4=2^{16}+1=65537$ 등이다. 페르마는 1640년 메르센에게 쓴 편지에서 F_0부터 F_4까지의 모든 수가 소수라는 사실을 지적한 뒤에 다음과 같이 덧붙였다. "나는 $2^{2^n}+1$ 꼴의 수가 모두 소수라는 사실을 발견했으며, 오랫동안 이 정리의 진실성을 수학자들에게 알려왔다." 그런데 1732년 오일러는 $F_4=4{,}294{,}967{,}297$이 합성수임을 밝혔다. 페르마 수에 관한 자세한 내용은 [7, pp. 28-33]과 [8, 139장]을 보라. 가우스는 자와 컴퍼스를 이용한 작도와 페르마 소수 사이의 놀라운 관계를 발견했다. 그는 19세 때 n개의 변을 갖는 정다각형을 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있는 필요 충분 조건은 어떤 수 k에 대해 $n=2^k$이거나 또는 서로 다른 페르마 소수 $p_1, p_2, \ldots, p_n$에 대해서 $n=2^k p_1 p_2 \ldots p_n$이 된다는 사실을 증명했다. 특히, 임의의 페르마 소수 p에 대해 p개의 변을 갖는 정다각형을 작도할 수 있다. 가우스는 이 발견을 대단히 자랑스럽게 생각했기 때문에, 수학자가 되기로 결심했으며, 그의 비석에 정17각형을 새겨달라고 요청할 정도였다[7, pp. 33-34].

문제 15. 자연수 n에 대해 2^n+1이 소수이면, n은 2의 거듭제곱이다.

예 14. 아르키메데스의 **보조 정리집**(Book of Lemmas)에 등장하는 다음 두 문제는 원의 넓이를 이용해서 간단하게 해결할 수 있는 문제로, 이것들도 도형 사이의 관계를 보여주는 흥미로운 문제이다[6, pp. 147-148].

<u>문제 16</u>. 그림 19와 같이 서로 접하고 세 개의 반원으로 이루어진 도형을 '구두 수선공의 칼'(arbelos)이라고 한다. 그러면 반원 AC와 CB의 호의 길이의 합은 반원 AB의 호의 길이와 서로 같음을 증명하라. 또, CD가 AB와 수직일 때, 지름이 CD인 원의 넓이는 구두 수선공의 칼의 넓이와 서로 같음을 증명하라.

<u>문제 17</u>. 그림 20에서 AD=EB이고 선분 AB, AD, DE, EB를 지름으로 하는 반원으로 둘러싸인 도형인 '소금 지하 저장실'(salinon)의 넓이는 이 도형의 대칭 축 FOC를 지름으로 하는 원의 넓이와 같음을 증명하라.

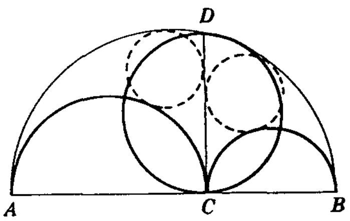


그림 19. 구두 수선공의 칼

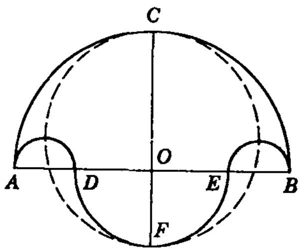


그림 20. 소금 지하 저장실

예 15. 일차 방정식을 가르칠 때는 이집트의 임시 위치법을 소개할 수 있고, 삼차 방정식을 다룰 때는 바빌로니아 사람들이 n^3+n^2에 대한 수표를 사용해서 풀 수 있었던 형태의 방정식에 대해 조사할 수 있다. 그리고 연립방정식 또는 일차방정식을 가르칠 때 다음과 같은 동양 수학 문제를 소개할 수 있다.

難法歌	난법가
一百饅頭一百僧	만두 백 개와 스님 백 명이 있다.
大僧三箇更無爭	큰 스님은 한 사람이 세 개씩
小僧三人分一箇	작은 스님은 세 사람이 한 개씩 먹어야 다툼이 없다.
幾是大僧幾小僧	큰 스님은 몇 명이고, 작은 스님은 몇 명인가?

이 문제는 조선 시대의 산학자 황윤석(黃胤錫)의 **이수신편**(理藪新編) 제21권과 22권에 실린 수학서 **산학입문**(算學入門)에 실려 있다[2, 제3권, p. 64]. 수학 문제를 시로 제시한 멋과 낭만을 엿볼 수 있으며, 문제 설정의 유머를 느낄 수 있다. 당시에는 기호 없이 문제를 풀었기 때문에, 제목이 알려주듯이 이는 매우 어려운 문제였다.

예 16. 수열과 수학적 귀납법을 다룰 때 다음과 같은 바빌로니아의 합을 학생에게 보여주고 [13, p. 328], 학생들에게 이것의 일반적인 공식을 찾게 하고 증명하게 할 수 있다.

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2=\left[1\left(\frac{1}{3}\right)+10\left(\frac{2}{3}\right)\right]55=385$$

예 17. 수학적 귀납법을 '하노이의 탑'이라 부르는 놀이에 응용할 수도 있다. 이 놀이는 판자와 그 위에 수직으로 세운 나무 막대 세 개로 이루어져 있다. 놀이가 시작될 때에는, 지름이 서로 다른 똬리쇠 모양의 여러 개의 원판이 나무 막대 중 하나에 원판의 크기 순서대로, 가장 큰 원판이 바닥에 놓이고 다음으로 큰 원판이 그 위에 놓이며 가장 작은 원판이 가장 위에 놓이는 방법으로 꽂혀있다(그림 21). 문제는 원판을 원래 꽂혀있던 나무 막대에서 다른 나무 막대로 모두 이동시키는 것인데, 한 번에 단 하나의 원판을 이동해야 하고 이동하는 도중 작은 원판 위에 그것보다 더 큰 원판이 놓이면 안 된다. 여기에서 세 개의 모든 나무 막대를 이용할 수 있다[10, p. 20].

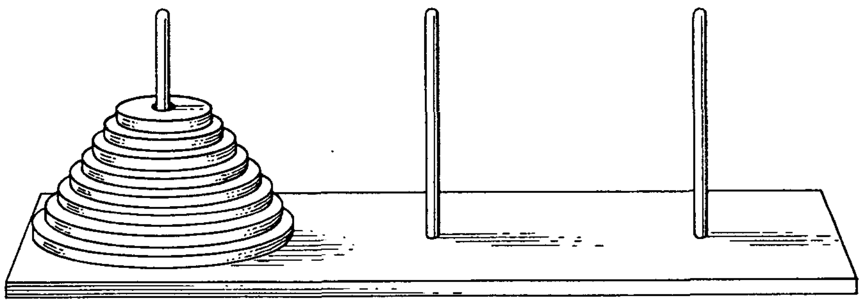


그림 21. 하노이의 탑

문제 18. 하노이의 탑에 n개의 원판이 있을 때 적어도 2^n-1번의 이동이 필요함을 증명하라.

5. 해결되지 않은 옛 문제

수학은 완성된 과목이고 더 이상 발전할 소지가 없다는 나쁜 인상을 가진 학생이 있다. 이런 생각을 없애는 훌륭한 방법으로 학생들에게 그들이 이해할 수 있는 몇 개의 미해결 문제를 제시할 수 있다. 페르마의 마지막 정리를 증명한 와일스(A. Wiles)는 열 살 때 동네 도서관에서 빌린 수학 책에서 페르마의 마지막 정리를 처음 보고 이를 풀겠다고 결심했다는 이야기가 있다. 이와 같이 미해결 문제의 제시는 학생들에게 건전한 자극을 줄 수 있다.

다음은 몇 가지 미해결 문제의 예이다.

문제 19. 우애수의 쌍은 무수히 많이 존재하는가?

릴레(H.J.J. te Riele)는 임의로 정한 한계까지의 모든 우애수의 쌍을 계산할 수 있는 방법을 발견했고, 100억보다 작은 1,427가지의 우애수의 쌍을 찾았다[8, p. 298].

문제 20. 완전수는 무수히 많이 존재할까? 즉 메르센 소수는 무수히 많이 존재할까?

1999년 6월 현재까지 38개의 메르센 소수가 발견되었다. 따라서 38개의 짝수인 완전수가 발견되었다.

문제 21. 홀수인 완전수가 존재할까?

브렌트(R. Brent)와 코헨(G. Cohen)은 '홀수인 완전수는 적어도 300자리의 수가 되어야 한다'는 사실을 증명했다[8, p. 516].

문제 22. 페르마 소수는 무수히 많은가?

현재 5 이상의 모든 n에 대해서 F_n이 합성수일 것이라고 추측되고 있다.

문제 23. 3과 5, 5와 7, 11과 13, 17과 19, ..., 10006427과 10006429, $835335\times 2^{39014}\pm 1$과 같이 차이가 2인 '쌍둥이 소수'는 무수히 많은가?

문제 24. 2보다 큰 모든 짝수는 두 소수의 합으로 표현될 수 있는가?

이는 골드바흐의 추측으로 현재 4000억까지 컴퓨터를 통해 참으로 확인되었다[7, p. 11].

6. 맺음말

앞에서 제시한 예와 문제 중 일부는 기존의 수학 책에서도 찾아볼 수 있다. 그런데 이런 책에서 문제의 역사에 대해서는 거의 언급하지 않는다. 긴 역사를 자랑하는 수학은 과거에 발견된 결과를 보완하고 체계화하면서 누적되고 발전하는 학문이다. 과거에 등장한 문제는 시간이 지나서도 여전히 유효하고 그 가치도 전혀 줄어들지 않는다. 현재 다루고 있는 문제의 유래와 기원을 알려주고 관련된 수학자를 소개하면, 그 문제의 의미를 좀더 명확하게 인식시킬 수 있고 수학에 대한 흥미를 증가시킬 수 있을 것이다. 그리고 이런 배경 지식은 많

은 학생에게 학습을 위한 건전하고 논리적인 자극을 제공할 수 있다.

참고 문헌

1. 김용운 · 김용국, **중국수학사**, 대우학술총서 자연과학 109, 민음사, 1996
2. 김용운 편, **韓國科學技術史資料大系** 數學篇, 여광출판사, 1985.
3. 유휘 편/김혜영 · 윤주영 역, **동양 최고의 수학서 구장산술**, 한국과학문화재단 과학고전 시리즈 5, 서해문집, 1998.
4. 홍명희, **林巨正**, 화적편 2(제8권), 사계절.
5. Barbin, Evelyne, "The Role of Problems in the History and Teaching of Mathematics" in *Vita Mathematica*, ed. by R. Calinger, MAA, 1996, 17-25.
6. Boyer, Carl B., *A History of Mathematics*, Princeton University Press, 1985.
7. Devlin, Keith/허민 역, **수학: 새로운 황금 시대** 제2판, 경문사, 1999.
8. Devlin, Keith/허민 · 오혜영 역, **수학 세계 탐험기**, 경문사, 1998.
9. Eves, Howard, *In Mathematical Circles*, Quadrants I and II, PWS, 1969.
10. Eves, Howard, *Mathematical Circles Revisited*, PWS, 1971.
11. Eves, Howard, *Mathematical Circles Squared*, PWS, 1972.
12. Eves, Howard, *Return to Mathematical Circles*, PWS, 1988.
13. Eves, Howard/허민 · 오혜영 역, **수학의 위대한 순간들**, 경문사, 1994.
14. Swetz, Frank J., "Trigonometry Comes Out of the Shadows" in *Learn from the Masters!*, ed. by F. Swetz, et al., MAA, 1995, 57-71.
15. Swetz, Frank J., "Using Problems from the History of Mathematics in Class- room Instruction" in *Learn from the Masters!*, ed. by F. Swetz, et al., MAA, 1995, 25-38.
16. van Maanen, Jan A., "Alluvial Deposits, Conic Sections, and Improper Glasses, or History of Mathematics Applied in the Classroom" in *Learn from the Masters!*, ed. by F. Swetz, et al., MAA, 1995, 73-91.