

스프링 연결 병렬형 탄성 역진자의 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어

Nonlinear $H_2/H_\infty/LTR$ Control of the Parallel Flexible Inverted Pendulum Connected by a Spring

한 성 익
(Seong-Ik Han)

Abstract : In this paper, a nonlinear $H_2/H_\infty/LTR$ control for the flexible inverted pendulum of a parallel type with Coulomb friction is presented. The dynamic equation for this system is derived by the Hamilton's principle and assumed-mode method. This hard nonlinear system can be modeled by a the quasi-linear state space model using the RIDF method. It is shown that the H_2/H_∞ control can be applied to the nonlinear controller design of the system having Coulomb frictions if the proper LTR conditions are satisfied. In order to present the usefulness of the suggested control method, the nonlinear $H_2/H_\infty/LTR$ controller is designed to control the position of the end point of the flexible inverted pendulum that has Coulomb frictions present in actuator parts. The results are given via computer simulations.

Keywords : H_2/H_∞ , LTR, RIDF, Coulomb friction, flexible parallel inverted pendulum

I. 서론

로봇의 탄성 암 같은 탄성체의 모델링과 제어문제에 대해 이미 많은 연구가 수행되어 온 것은 잘 알려져 있는 사실이다[1~5]. 탄성체는 강체에 비해 중량이 가벼워 에너지 소비가 작아 우주구조물이나 로봇 암의 제작에 많이 이용되고 있다. 또한 여러 부품으로 구성되는 대형 우주구조물이나 로봇 시스템의 경우 연결 부위에서의 탄성 특성을 피할 수 없는 경우가 많이 존재한다. 탄성체의 경우 링크 자체 뿐만 아니라 연결 링크에서의 탄성변형으로 인해 발생하는 진동특성이 존재하므로 이러한 복잡한 시스템의 제어를 위해 복합 탄성체에 대한 모델링은 매우 중요하다. 역진자 시스템은 로켓 발사대 제어, 주행로봇 등과 상사되는 기계제어시스템의 대표적인 예로서 많은 현대 제어이론을 검증하는 시스템으로 많은 연구가 진행되어 있다. 강체 역진자의 경우 LQ제어[6], 신경망 제어[7], 마찰을 고려한 H_∞ 제어[8] 등의 제어 방법들이 단일형, 이중 직렬형[9], 삼중 직렬형[6] 역진자 모델에 적용되었다. 또 단일 탄성 역진자에 대한 H_∞ 제어에 대한 연구[10]가 있었으며 수평로 스프링이 연결된 탄성체에 대한 H_∞ 제어에 대한 연구[11, 12]가 있었다. 그런데 많은 시스템이 구동부에서 쿨롱 마찰(Coulomb friction) 같은 불연속 비선형 특성이 존재할 경우가 많은데 탄성에 의한 진동제어는 일반적으로 모터 구동력에 의존하므로 불연속 비선형에 의해 구동력이 영향을 받는다면 정확한 제어를 하기 어렵게 된다. 불연속 비선형은 Taylor 급수 전개를 통한 근사 선형화가 불가능하기 때문에 다른 방법을 이용해 접근해야 한다. 마찰이 존재하는 시스템에 대한 제어문제[13~15]는 이미 연구되어 있는데 마찰과 탄성을 동시에 갖는 병렬 역진자의 다변수 제어에 대해서는 거의 연구되

지 않았다. 그리고 선형 다변수 시스템에 대한 $H_2/H_\infty/LTR$ 최적제어는 Doyle[16], Yeh[17]과 Bernstein[18] 등이 이미 발표되었으나 이러한 조직적인 선형제어 기법을 불연속 비선형 시스템의 제어에 대해 적용하지는 않았다.

본 연구에서는 가정된 모드 방법(assumed mode method)을 이용하여 병렬 탄성 역진자 시스템을 모델링하고 불연속 쿨롱 마찰을 RIDF(Random Input Describing Function method)[19]를 이용하여 준-선형 시스템(quasi-linear system)을 구한 후 선형 H_2/H_∞ 제어를 적용하고 루프전달회복(Loop Transfer Recovery, LTR)과정을 통해 비선형 제어를 설계할 수 있음을 보이고자 한다. 최종적으로 선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어와 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어를 비교하여 제안한 방법이 병렬 탄성 역진자의 탄성특성과 불연속 비선형의 제어에 효과적임을 컴퓨터 모의실험을 통해 보이고자 한다.

본 논문의 구성은 2장에서 병렬 탄성 역진자 시스템의 모델링과정을 제시하고 3장에서는 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어기 설계과정을 보인다. 4장에서는 컴퓨터 모의실험을 통해 제안한 방법이 탄성효과와 비선형 마찰을 동시에 고려할 수 있음을 보이고 5장에서 결론을 맺기로 한다.

II. 병렬 탄성 역진자의 수학적 모델링

모터 구동부에 쿨롱 마찰이 존재하는 병렬 탄성 역진자의 개략도는 그림 1과 같다.

탄성 역진자는 길이가 폭보다 훨씬 크며 회전관성과 전단변형 효과를 무시할 수 있는 Bernoulli-Euler 보 (beam)으로 가정하며 길이가 L 인 i 번째 역진자는 단위 길이 당 밀도가 ρ_i 이고 탄성계수(flexural rigidity)가 $E_i I_i$ 이며 수평 모터 축에 고정되어 있다. 끝부분에 집중 질량 m_i 가 부착되어 있고 강성과 길이가 각각 k, l 인 스프링이 연결되어 있다. J_{mi} 는 모터회전부의 관성

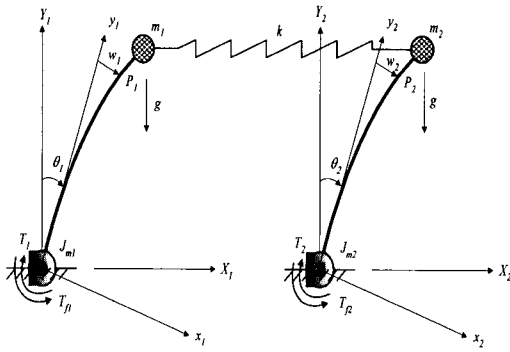


그림 1. 병렬 탄성 역진자 시스템의 개략도.
Fig. 1. A schematic diagram of the parallel flexible inverted pendulum.

모멘트를 나타내며 $\theta_i(t)$ 는 모터회전각, $T_i(t)$ 는 모터의 구동토크, 그리고 $T_{fi}(t)$ 는 마찰토크를 각각 나타낸다. 탄성 역진자의 변형형태는 그림 1에 나타나며 $w_i(t)$ 는 임의의 지점 $r(0 < r < L)$ 에서의 변형변위로 표시한다. 스프링의 평형위치에서는 $\theta_1(t) = \theta_2(t) = 0$, $w_{1L}(t) = w_{2L}(t) = 0$ 를 만족한다고 가정한다. 각 역진자의 임의의 P_i 점에서의 위치벡터 $\vec{r}_i(t)$ ($i = 1, 2$), 속도 $\dot{\vec{r}}_i(t)$ 그리고 역진자 끝 지점의 속도 $\dot{\vec{r}}_{iL}(t)$ 는 다음과 같다.

$$\vec{r}_i(t) = (w_i \cos \theta_i + r_i \sin \theta_i) \vec{I}_i + (-w_i \sin \theta_i + r_i \cos \theta_i) \vec{J}_i \quad (1)$$

$$\dot{\vec{r}}_i(t) = (-\dot{w}_i \cos \theta_i - w_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i + r_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i) \vec{I}_i + (-\dot{w}_i \sin \theta_i - w_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i - r_i \dot{\theta}_i \sin \theta_i) \vec{J}_i \quad (2)$$

$$\dot{\vec{r}}_{iL}(t) = (\dot{w}_{iL} \cos \theta_i - w_{iL} \dot{\theta}_i \sin \theta_i + L \dot{\theta}_i \cos \theta_i) \vec{I}_i + (-\dot{w}_{iL} \sin \theta_i - w_{iL} \dot{\theta}_i \cos \theta_i - L \dot{\theta}_i \sin \theta_i) \vec{J}_i \quad (3)$$

연결된 스프링의 선형화된 변형 변위는 다음과 같이 나타난다.

$$l(t) = L(\theta_2(t) - \theta_1(t)) + (w_{2L}(t) - w_{1L}(t)) \quad (4)$$

역진자는 한쪽이 모터 축에 고정되어 있으므로 기하학적인 경계조건은 다음과 같다.

$$w_{i0}(t) = 0, w'_{i0}(t) = 0 \quad (5)$$

시스템의 운동에너지 T 와 위치에너지 V 는 다음과 같다.

$$T = \sum_{i=1}^2 (T_{ai} + T_{ei} + T_{mi}), V = \sum_{i=1}^2 (V_{ai} + V_{gi} + V_{ei}) + V_s \quad (6)$$

여기서

$$T_{ai} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho_i [(\dot{w}_i + r_i \dot{\theta})^2 + w_i^2 \dot{\theta}^2] dr_i, \quad (7)$$

$$T_{ei} = \frac{1}{2} m_i [(\dot{w}_{iL} + L \dot{\theta})^2 + w_{iL}^2 \dot{\theta}^2], T_{mi} = \frac{1}{2} J_{mi} \dot{\theta}_i^2,$$

$$V_{ai} = \frac{1}{2} \int_0^L E_i I_i (w_i')^2 dr_i,$$

$$V_{gi} = \int_0^L \rho_i g (r_i \cos \theta_i - w_i \sin \theta_i) dr_i, \quad (8)$$

$$V_{ei} = m_i g (L \cos \theta_i - w_{iL} \sin \theta_i), V_s = \frac{1}{2} k l^2.$$

운동방정식과 경계조건을 구하기 위해 외력에 의한 가상일을 일단 제외하고 Hamilton의 원리를 적용한다.

$$\delta \int_1^2 (T - V) dt = 0 \quad (9)$$

원심력과 Coriolis효과를 무시한 모터 회전부와 탄성체의 선형 운동방정식은 다음과 같다.

$$J_{mi} \ddot{\theta}_i(t) - E_i I_i w_{i0}''(t) = T_i(t) - T_{if}(t) \quad (10)$$

$$\ddot{w}_i(t) + \alpha_i w_i''''(t) = -r_i \ddot{\theta}_i(t) + g \theta_i(t)$$

그리고 경계조건식은 다음과 같다.

$$w_{i0}(t) = 0, w'_{i0}(t) = 0, w''_{iL}(t) = 0 \quad (11)$$

$$m_i \alpha_i w_{iL}''''(t) + E_i I_i w_{iL}''(t) \pm k [L(\theta_2(t) - \theta_1(t)) + w_{2L}(t) - w_{1L}(t)] = 0 \quad (12)$$

여기서 $\alpha_i = E_i I_i / \rho_i$ 이고 (12)의 \pm 기호는 i 가 1일때 플러스, i 가 2일때 마이너스 기호로 변한다. 다음에 탄성 역진자의 고유값과 고유함수를 구하기 위해 가정된 모우드법을 이용한다.

$$w_i(t) = \phi_i(r) \eta_i(t) \quad (13)$$

(13)을 경계조건식 (11)에 대입하면

$$\phi_{i0} = 0, \phi'_{i0} = 0, \phi''_{iL} = 0 \quad (14)$$

$$\alpha_i \phi_i''''(r) = \lambda \phi(r) \quad (15)$$

$$m_i \alpha_i \phi_{iL}'''' + E_i I_i \phi_{iL}'' \pm k(\phi_{2L} - \phi_{1L}) = 0 \quad (16)$$

여기서 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = \alpha_i \tilde{\beta}^4, \tilde{\beta} = \frac{\beta}{L}, \bar{\alpha} = \left(\frac{E_1 I_1 \rho_2}{E_2 I_2 \rho_1} \right)^{1/4}, \bar{\beta} = \bar{\alpha} \tilde{\beta} \quad (17)$$

1번째 역진자에 대해 (15)은 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\phi_1''''(r) - \tilde{\beta}^4 \phi_1(r) = 0 \quad (18)$$

(18)의 일반해는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$\phi_1(r) = C_1 \sin \tilde{\beta} r + C_2 \cos \tilde{\beta} r + C_3 \sinh \tilde{\beta} r + C_4 \cosh \tilde{\beta} r \quad (19)$$

2번째 역진자에 대해서 (15)은

$$\phi_2''''(r) - \bar{\beta}^4 \phi_2(r) = 0 \quad (20)$$

그리고 일반해는

$$\phi_2(r) = D_1 \sin \bar{\beta} r + D_2 \cos \bar{\beta} r + D_3 \sinh \bar{\beta} r + D_4 \cosh \bar{\beta} r \quad (21)$$

경계조건을 (16), (18), (21)에 각각 대입하고 정리하면 다음의 경계치 문제에 대한 식을 얻을 수 있다.

$$h_{11}(\tilde{\beta}) h_{22}(\bar{\beta}) - h_{12}(\tilde{\beta}) h_{12}(\bar{\beta}) = 0 \quad (22)$$

여기서

$$\begin{aligned} h_1(\tilde{\beta}) &= h_1(\tilde{\beta}) + h_2(\tilde{\beta}) \left(-\frac{\sin \tilde{\beta}L + \sinh \tilde{\beta}L}{\cos \tilde{\beta}L + \cosh \tilde{\beta}L} \right), \\ h_2(\tilde{\beta}) &= h_3(\tilde{\beta}) + h_4(\tilde{\beta}) \left(-\frac{\sin \tilde{\beta}L + \sinh \tilde{\beta}L}{\cos \tilde{\beta}L + \cosh \tilde{\beta}L} \right), \\ h_1(\bar{\beta}) &= h_1(\bar{\beta}) + h_2(\bar{\beta}) \left(-\frac{\sin \bar{\beta}L + \sinh \bar{\beta}L}{\cos \bar{\beta}L + \cosh \bar{\beta}L} \right), \\ h_2(\bar{\beta}) &= h_3(\bar{\beta}) + h_4(\bar{\beta}) \left(-\frac{\sin \bar{\beta}L + \sinh \bar{\beta}L}{\cos \bar{\beta}L + \cosh \bar{\beta}L} \right). \end{aligned}$$

그리고

$$\begin{aligned} h_1(\tilde{\beta}) &= m_1 \alpha_1 \tilde{\beta}^4 (\sin \tilde{\beta}L - \sinh \tilde{\beta}L) \\ &\quad - E_1 I_1 \tilde{\beta}^3 (\cos \tilde{\beta}L + \cosh \tilde{\beta}L) - k(\sin \tilde{\beta}L - \sinh \tilde{\beta}L), \\ h_2(\tilde{\beta}) &= m_1 \alpha_1 \tilde{\beta}^4 (\cos \tilde{\beta}L - \cosh \tilde{\beta}L) \\ &\quad + E_1 I_1 \tilde{\beta}^3 (\sin \tilde{\beta}L - \sinh \tilde{\beta}L) - k(\cos \tilde{\beta}L - \cosh \tilde{\beta}L), \\ h_3(\tilde{\beta}) &= k(\sin \tilde{\beta}L - \sinh \tilde{\beta}L), \quad h_4(\tilde{\beta}) = k(\cos \tilde{\beta}L - \cosh \tilde{\beta}L), \\ h_1(\bar{\beta}) &= m_2 \alpha_2 \bar{\beta}^4 (\sin \bar{\beta}L - \sinh \bar{\beta}L) \\ &\quad - E_2 I_2 \bar{\beta}^3 (\cos \bar{\beta}L + \cosh \bar{\beta}L) - k(\sin \bar{\beta}L - \sinh \bar{\beta}L), \\ h_2(\bar{\beta}) &= m_2 \alpha_2 \bar{\beta}^4 (\cos \bar{\beta}L - \cosh \bar{\beta}L) \\ &\quad + E_2 I_2 \bar{\beta}^3 (\sin \bar{\beta}L - \sinh \bar{\beta}L) - k(\cos \bar{\beta}L - \cosh \bar{\beta}L), \\ h_3(\bar{\beta}) &= k(\sin \bar{\beta}L - \sinh \bar{\beta}L), \quad h_4(\bar{\beta}) = k(\cos \bar{\beta}L - \cosh \bar{\beta}L). \end{aligned}$$

$\beta_n (0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots)$ 를 (22)의 해로 두면 고유값은 다음과 같이 주어진다.

$$\lambda_n = \alpha_l \left(\frac{\beta_n}{L} \right)^4, \quad n = 1, 2, \dots \quad (23)$$

대응하는 고유함수는

$$\phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{1n} \\ \phi_{2n} \end{bmatrix} \quad (24)$$

여기서

$$\begin{aligned} \phi_{1n}(r_1) &= C_n \left\{ \sin \frac{\beta_{ni}}{L} r_1 + \sinh \frac{\beta_{ni}}{L} r_1 \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \left(\cos \frac{\beta_{ni}}{L} r_1 - \cosh \frac{\beta_{ni}}{L} r_1 \right) \right\}, \\ \phi_{2n}(r_2) &= D_n \left\{ \sin \frac{\bar{\alpha}\beta_{ni}}{L} r_2 + \sinh \frac{\bar{\alpha}\beta_{ni}}{L} r_2 \right. \\ &\quad \left. + \mu_2 \left(\cos \frac{\bar{\alpha}\beta_{ni}}{L} r_2 - \cosh \frac{\bar{\alpha}\beta_{ni}}{L} r_2 \right) \right\}, \\ \mu_1 &= -\frac{\sin \beta_{ni} + \sinh \beta_{ni}}{\cos \beta_{ni} + \cosh \beta_{ni}}, \quad \mu_2 = -\frac{\sin \bar{\alpha}\beta_{ni} + \sinh \bar{\alpha}\beta_{ni}}{\cos \bar{\alpha}\beta_{ni} + \cosh \bar{\alpha}\beta_{ni}}. \end{aligned}$$

C_n, D_n 을 $\|\phi\| = 1$ 이 되도록 선정하면 직교정규화된 (orthonormalized) 고유함수를 얻을 수 있다. 다음에 상태공간 모델식을 유도하기 위해 상태변수를 다음과 같이 표현한다.

$$\mathbf{X}^T(t) = [\mathbf{X}_1^T \quad \mathbf{X}_2^T]^T, \quad \mathbf{u}^T(t) = [u_1^T(t) \quad u_2^T(t)]^T$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1(t) &= [\theta_1, \theta_2, \eta_{11}, \eta_{12}, \dots, \eta_{1n}, \eta_{21}, \eta_{22}, \dots, \eta_{2n}] \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_{2n+2}], \\ \mathbf{X}_2(t) &= [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\eta}_{21}, \dot{\eta}_{22}, \dots, \dot{\eta}_{2n}, \dot{\eta}_{21}, \dot{\eta}_{22}, \dots, \dot{\eta}_{2n}] \\ &= [x_{2n+3}, x_{2n+4}, \dots, x_{4n+4}], \\ \mathbf{u}(t) &= [T_1(t) \quad T_2(t)]. \end{aligned}$$

그리고 상태공간모델은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{X}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{AM} & \mathbf{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1(t) \\ \mathbf{X}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{BM} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (25)$$

여기서

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} J_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & J_{m2} & 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ \int_0^L \phi_{1n} \cdot r dr & 0 & 1 & 0 & 0 & L & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \int_0^L \phi_{2n} \cdot r dr & 0 & 0 & 0 & 1 & L & 0 \\ 0 & \int_0^L \phi_{21} \cdot r dr & 0 & 0 & 0 & L & 1 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ 0 & \int_0^L \phi_{2n} \cdot r dr & 0 & 0 & 0 & L & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & -N_2 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ 0 & 0 & 0 & L & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{BM} = \begin{bmatrix} 0_{(2n+2) \times 2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0_{2m \times 2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{AM} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_1 I_1 \phi_{10} & E_1 I_1 \phi_{20} & \dots & E_1 I_1 \phi_{n0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_2 I_2 \phi_{210} & E_2 I_2 \phi_{220} & \dots & E_2 I_2 \phi_{2n0} \\ g_{11}^t \phi_{1n} dr & 0 & -\alpha_1 \tilde{\beta}_1^4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ g_{12}^t \phi_{2n} dr & 0 & -\alpha_1 \tilde{\beta}_2^4 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{21}^t \phi_{1n} dr & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \tilde{\beta}_1^4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22}^t \phi_{2n} dr & 0 & \dots & 0 & -\alpha_2 \tilde{\beta}_2^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{21}^t \phi_{21} dr & 0 & \dots & 0 & 0 & -\alpha_2 \tilde{\beta}_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{2n}^t \phi_{2n} dr & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_2 \tilde{\beta}_n^4 \end{bmatrix}$$

여기서 $N_i = T_{ci} \sqrt{2l/\pi} / \sigma_{\dot{\theta}_i}$ 는 RIDF 근사법을 이용한 쿨롱 마찰력의 기술함수계인이며 T_{ci} 는 쿨롱 마찰의 크기, $\sigma_{\dot{\theta}_i}$ 는 상태변수 $\dot{\theta}_i$ 의 표준편차를 나타낸다. 이러한 과정을 통해 단성 역진자 시스템의 모델링을 마치게 된다.

III. 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어

1. 준-선형 모델에 대한 H_2/H_∞ 제어 적용

불연속 비선형을 갖는 시스템의 상태공간 모델을 다음과 같이 주어진다.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + B_0 w_0(t) + B_1 w_1(t) + B_2 u(t) \quad (26)$$

여기서 $x(t)$ 는 상태벡터, $f(x(t))$ 비선형 동적벡터, $w_0(t)$ 와 $w_1(t)$ 는 각각 적당한 차원을 갖는 가우시안 백색잡음(Gaussian white noise), 확정적 파워신호(deterministic power signal)이다. 불연속 비선형 요소를 RIDF를 이용하여 준-선형 시스템의 상태공간식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= N(\sigma_x) + B_0 w_0(t) + B_1 w_1(t) + B_2 u(t) \\ z(t) &= C_1 x(t) + D_{12} u(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) + D_{20} w_0(t) + D_{21} w_1(t) \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 σ_x 는 시스템 상태변수의 표준편차(standard deviation). 이러한 준-선형 상태공간모델은 Doyle 등이 제안한 선형 H_2/H_∞ 제어시스템의 구조와 동일하게 그림 2와 같이 표현할 수 있다.

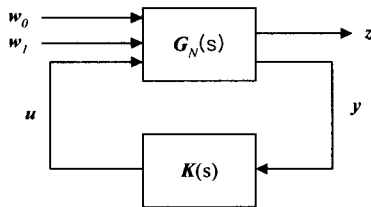


그림 2. 준-선형 시스템에 대한 H_2/H_∞ 제어시스템의 구조.

Fig. 2. The structures of the H_2/H_∞ control system for the quasi-linear system.

(27)에 대해 선형제어의 경우와 동일하게 다음과 같이 가정한다.

- 1) (N, B_1) 이 (N, B_2) 는 안정가능(stabilizable),
- 2) (C_1, N) 이 (C_2, N) 는 검출가능(detactable),
- 3) $D_{12}^T C_1 = 0, D_{12}^T D_{12} = I,$
- 4) $B_1 D_{12}^T = 0, D_{21} D_{21}^T = R_1 \geq 0,$
- 5) $B_0 D_{20}^T = 0, D_{20} D_{20}^T = R_0 \geq 0.$

주어진 준-선형 시스템 (27)에 대한 H_2/H_∞ 제어는 어떤 주어진 γ 에 대해 다음의 성능지수를 최소화하는 제어기 $K(s)$ 를 구하는 것이다.

$$J_D \equiv \sup_{w_i \in P} (\|z\|_p^2 - \gamma^2 \|w_i\|_p^2) \quad (28)$$

여기서

$$\|z\|_p^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \|z(t)\|^2 dt \quad (29)$$

정리 1 : 어진 γ 와 (27)의 시스템에 대해 P, X_∞, Y 는 다음의 Riccati 방정식을 만족시키는 해이고 (27)의 시스템을 내부적 안정(internally stable)을 보장하고 성능지수 J_D 를 최소화하는 제어기 $K(s)$ 가 존재한다.

$$N^T X_\infty + X_\infty N + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty + C_1 C_1^T = 0 \quad (30)$$

$$Y(N + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - LC_2) + (N + \gamma^{-2} B_1 B_1^T - LC_2)^T Y + \gamma^{-2} Y(B_1 B_1^T + LR_1 L^T) Y + X_\infty B_2 B_2^T X_\infty = 0 \quad (31)$$

$$\begin{aligned} [N + \gamma^{-2} B_1 B_1^T (X_\infty + Y)] P + P [N + \gamma^{-2} B_1 B_1^T (X_\infty + Y)]^T \\ - LR_0 L^T + B_0 B_0^T + 2[P \frac{\partial \text{tr}[N^T]}{\partial (X_\infty + Y)}]_{ij} (X_\infty + Y) = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

제어기 파라미터는 다음으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= N_K(\sigma_c) x_c(t) - Ly(t) \\ u(t) &= F_\infty x_c(t) \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 σ_c 는 제어기 상태변수의 표준편차,

$$N_K = N + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - LC_2 - B_2 F_\infty, F_\infty = B_2^T X_\infty,$$

그리고 L 은 다음을 만족한다.

$$-PC_2^T + LR_0 + \gamma^{-2} PYLR_1 = 0 \quad (34)$$

증명 : 증명과정은 선형제어의 경우[16, 17]을 참고하면 (28)의 가격함수는 다음과 같이 주어진다.

$$J_D = J_I = \text{tr} \tilde{X}_r \begin{bmatrix} B_0 B_0^T & 0 \\ 0 & LR_0 L^T \end{bmatrix} \quad (35)$$

여기서 $\tilde{X}_r = \begin{bmatrix} X_\infty + Y & Y \\ Y & Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{I1} & X_{I2} \\ X_{I2}^T & X_2 \end{bmatrix}$ 의 부분행렬로 나눌 수 있으며 다음의 폐루프 시스템에 대한 Riccati 방정식의 해이다.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N & B_2 F_\infty \\ -LC_2 & N_K \end{bmatrix}^T \tilde{X}_r + \tilde{X}_r \begin{bmatrix} N & B_2 F_\infty \\ -LC_2 & N_K \end{bmatrix} \\ + \gamma^{-2} \tilde{X}_r \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & LR_1 L^T \end{bmatrix} \tilde{X}_r + \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & 0 \\ 0 & F_\infty^T F_\infty \end{bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$w_i(t)$ 에서 $z(t)$ 로의 전달행렬 $T_{zw}(s)$ 의 $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ 를 구속조건으로 하고 (35)의 가격함수에 대해 최적화를 수행하면 다음과 같은 Lagrangian \mathcal{L} 은

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \text{tr} \{ \lambda \tilde{X}_r \begin{bmatrix} B_0 B_0^T & 0 \\ 0 & LR_0 L^T \end{bmatrix} + \left[\begin{bmatrix} N & B_2 F_\infty \\ -LC_2 & N_K \end{bmatrix}^T \tilde{X}_r \right. \\ \left. + \tilde{X}_r \begin{bmatrix} N & B_2 F_\infty \\ -LC_2 & N_K \end{bmatrix} + \gamma^{-2} \tilde{X}_r \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & 0 \\ 0 & LR_1 L^T \end{bmatrix} \tilde{X}_r \right. \\ \left. + \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & 0 \\ 0 & F_\infty^T F_\infty \end{bmatrix} \right] \tilde{P} \} \end{aligned} \quad (37)$$

와 같이 정의할 수 있다.

$$\text{여기서 } \tilde{P} = \begin{bmatrix} P + \hat{P} & -\hat{P} \\ -\hat{P} & \hat{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{I1} & P_{I2} \\ P_{I2}^T & P_2 \end{bmatrix} \text{로 둘 수 있다.}$$

이 때 λ 를 1로 두고 \tilde{X}_r, \tilde{P} 의 각 부분행렬과 제어기 파라미터 N_K, F_∞, L 에 대해 각각 편미분을 수행하고 정리하면 정리1의 결과를 얻을 수 있다. ■

제어기를 설계하기 위해서는 상태변수의 표준편차는

알 수 없으므로 미리 가정된 표준편차에 대해 연성된 (coupled) Riccati 방정식(30), (31), (32)와 Riccati 방정식 (36)을 동시에 풀어서 표준편차와 제어기 파라미터들을 구하고 비선형 제어를 합성해야 한다. 그런데 n 차의 시스템에서 비선형 보정항을 풀려면 (32)의 해 P 의 경우 $n(n+1)/2$ 개, 페루프 Riccati 방정식의 해 \tilde{X}_r 의 경우 $n(2n+1)$ 개의 미지수에 대해 동시에 풀어야 한다. 시스템 차수가 약간 증가해도 수치적인 문제에 봉착하게 되므로 다른 해결책이 제시되어야 한다. 본 연구에서는 H_2/H_∞ 제어에 대한 루프전달회복(Loop Transfer Recovery : LTR)을 통해 해결할 수 있음을 보인다.

2. 비선형 H_2/H_∞ LTR 제어

앞 절에서 나타난 비선형 보정항 문제를 처리하기 위하여 LTR조건을 구하기로 한다. 루프전달회복을 위해서 일반성을 잃지 않는 범위 내에서 시스템의 가중행렬 (weighting matrix)과 설계 파라미터들은 다음과 같이 가정한다.

$$B_1 = B_2 = B/\sqrt{\rho}, R_1 = \beta^2 R_0, \beta = 0, R_0 = \mu I, \alpha^{-2} = 1 - \gamma^{-2}, B_0 = B \quad (38)$$

(38)의 가정에서 $\beta = 0$ 로 하면 $R_1 = 0$ 가 되며 이것은 측정된 출력에 확정적 신호입력 $w_1(t)$ 는 포함되지 않으며 단지 백색잡음 신호입력 $w_0(t)$ 만을 포함한다는 의미이며 입력행렬 B_1 에 대한 가정은 루프형성과정에서 LQG/LTR 구조와 유사하게 만들기 위한 것이다. $\alpha (\geq 1)$ 와 ρ 는 목표루프의 교차주파수 설정에 관계되며 μ 는 LTR을 위한 설계 변수이다. 이러한 가정하에 앞의 Riccati 방정식들은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$N^T X_\infty + X_\infty N - \frac{\alpha^{-2}}{\rho} X_\infty B B^T X_\infty + C_1 C_1^T = 0 \quad (39)$$

$$Y(N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T X_\infty - \frac{1}{\mu} P C_2^T C_2) + (N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T X_\infty - \frac{1}{\mu} P C_2^T C_2)^T Y + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} Y B B^T Y + \frac{1}{\rho} X_\infty B B^T X_\infty = 0 \quad (40)$$

$$[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y)]P + P[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y)]^T - \frac{1}{\mu} P C_2^T C_2^T P + B B^T + \Psi(P, X_\infty, Y, N) = 0 \quad (41)$$

여기서 (41)에 나타나는 비선형 보정항은 다음과 같다.

$$\Psi(\cdot) = 2[P \frac{\partial \text{tr}[N^T]}{\partial (X_\infty + Y)_{ij}} (X_\infty + Y)]$$

제어기 파라미터들은

$$N_K = N - \alpha^{-2} B F_\infty - L C_2 \quad (42)$$

$$F_\infty = \frac{1}{\sqrt{\rho}} B^T X_\infty \quad (43)$$

$$L = \frac{1}{\mu} P C_2^T \quad (44)$$

그리고 페루프 Riccati 방정식도 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N & B F_\infty / \sqrt{\rho} \\ -L C_2 & N_K \end{bmatrix}^T \tilde{X}_r + \tilde{X}_r \begin{bmatrix} N & B F_\infty / \sqrt{\rho} \\ -L C_2 & N_K \end{bmatrix} + \gamma^{-2} \tilde{X}_r \begin{bmatrix} B B^T / \rho & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{X}_r + \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & 0 \\ 0 & F_\infty^T F_\infty \end{bmatrix} = 0 \quad (45)$$

(41)에 대한 LTR 조건을 조사하여 비선형 보정항이 소거되는 일련의 과정을 보이기로 한다. 비선형 보정항을 포함하는 (41)로부터 $\mu \rightarrow 0$ 이면 $\|B B^T\|$ 와 $\|C_2^T C_2\|$ 는 유한하고 $\|Y\|$ 와 $\|N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y)\|$ 는 같은 크기의 차수 (magnitude of order)를 갖는다. 만일 $\|N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y)\|$ 가 LTR 조건이 충족될 때 매우 작은 값으로 수렴한다면 크기의 차수가 같은 비선형 보정항도 매우 작은 값을 취하게 되므로 (41)의 해를 구하는 과정에서 이것을 무시할 수 있어서 수치적 문제가 해결된다는 것이 증명시 가장 중요한 점이다.

보조정리 1 : LTR 지수 q 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$q = \left\| \left[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y) \right] \cdot \left(\frac{\mu}{\|B B^T\| \cdot \|C_2^T C_2\|} \right)^{1/2} \right\| \ll 1 \quad (46)$$

증명 : (41)의 좌변의 3번째와 4번째 항에서

$$\|B B^T\| \cong \frac{1}{\mu} \|P C_2^T C_2 P\| \leq \frac{1}{\mu} \|C_2^T C_2\| \cdot \|P\|^2 \quad (47)$$

또는

$$\left(\mu \frac{\|B B^T\|}{\|C_2^T C_2\|} \right)^{1/2} \leq \|P\| \quad (48)$$

이다. 또한 (41)의 첫 번째와 두 번째 항으로부터

$$\begin{aligned} & \left\| \left[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y) \right] P \right\| \\ & \leq \left\| \left[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y) \right] \right\| \cdot \|P\| \ll \|B B^T\| \end{aligned} \quad (49)$$

또는

$$\begin{aligned} & \left\| \left[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y) \right] \right\| \\ & \ll \left\| \left[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} B B^T (X_\infty + Y) \right] \right\| / \|P\| = \left(\|B B^T\| \cdot \|C_2^T C_2\| / \mu \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (50)$$

(50)을 정리하면 LTR 지수 q 를 얻을 수 있다. ■

LTR 지수 q 에서 B, C 행렬은 유한한 상수 행렬이므로 LTR 지수 q 의 극한거동에 거의 무관하므로 문제 진개를 단순하게 하기 위해 시스템을 스칼라(scalar)의 경우($B=C_2=1$)로 가정한다. 이 때 LTR 지수 q 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q = \left\| \left[N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y) \right] \right\| \cdot \mu^{1/2} \quad (51)$$

이제 (51)로 주어지는 LTR 지수 q 의 항 중에서 $\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)$ 항을 구해야 한다. 먼저 (39)의 해 X_∞ 는 간단히 다음과 같이 구해진다.

$$X_\infty = \rho \alpha^2 \left(N + \sqrt{N^2 + \frac{1}{\rho \alpha^2}} \right) \quad (52)$$

다음에 (40)에서 해 Y 를 구해야 하는 데 (41)과 연성되어(coupled) 있어 직접 구할 수 없으므로 다음과 같은 과정을 통해 구한다. 스칼라인 경우 (40)과 (41)은 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\gamma^{-2}}{\rho} Y^2 + 2Y \left(N + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} X_\infty - \frac{1}{\mu} P \right) + \frac{1}{\rho} X_\infty^2 = 0 \quad (53)$$

$$P^2 - 2\mu \left[N(I+k) + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y) \right] P - \mu = 0 \quad (54)$$

여기서 k 는 비선형 특성에 의존하는 상수이다. 먼저 $\gamma \rightarrow \infty$ ($\alpha=1$) 일 때 (52)는

$$X_\infty = \rho \left(N + \sqrt{N^2 + \frac{1}{\rho}} \right) \quad (55)$$

이고 (53), (54)에서

$$P = \mu N(I+k) + \sqrt{(\mu N(I+k))^2 + \mu} \quad (56)$$

$$Y = \frac{N + \sqrt{N^2 + 1/\rho}}{2 \left(Nk + \sqrt{(N(I+k))^2 + 1/\mu} \right)} \quad (57)$$

을 얻을 수 있고 임의의 γ ($\neq \infty$)에 대해 (55), (56), (57)을 (54)에 대입하면,

$$P = \mu \left[N(I+k) + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y) \right] + \{ \mu^2 [N(I+k) + \frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)]^2 + \mu \}^{1/2} \quad (58)$$

그리고 (52)와 (58)을 (53)에 대입하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$$Y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2a}, \quad a = \rho \gamma^2 F_\infty^2, \quad (59)$$

$$b = \rho \gamma^2 (2N - 2\alpha^{-2} F_\infty + F_\infty - 3L)$$

그리고 스칼라 제어게인 및 필터 게인은 다음과 같다.

$$F_\infty = \frac{1}{\sqrt{\rho}} X_\infty \quad (60)$$

$$L = \frac{P}{\mu} \quad (61)$$

이 때 LTR 지수 q 의 $\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)$ 항은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y) = -\gamma^{-2} N + [\gamma^4 N^2 - \frac{\gamma^2}{\rho} (F_\infty - L) Y + \frac{\gamma^2}{\rho}]^{1/2} \quad (62)$$

이러한 결과들을 근거로 최종적으로 $\mu \rightarrow 0$ 일 때, $q \ll 1$ 임을 증명하고자 한다.

정리 2 : 유한한 입력을 갖는 안정한 시스템에서 $\mu \rightarrow 0$ 이면 $q \rightarrow 0$ 이다.

증명 : 다음의 4가지 경우로 나누어 증명하기로 한다.

경우 1 : 만일 $|N| \gg 1/\sqrt{\mu}$ 이고 $|N| \gg 1/\sqrt{\rho}$ ($q \cong 1$)이면,

$$o(F_\infty) = o(2\sqrt{\rho} \alpha^2 N), \quad o(L) = o(2N + 4\gamma^{-2} N),$$

$$o\left(\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)\right) = 0.$$

$\mu \rightarrow 0$ 일 때, $|N| \gg 1/\sqrt{\mu}$ 일 가능성은 $o(q=N) \leq 1/\sqrt{\mu}$ 이기 때문에 존재하지 않는다. 그러므로 $q \gg 1$ 의 가능성은 존재하지 않는다.

경우 2 : 만일 $|N| \cong 1/\sqrt{\mu}$ 이고 $|N| \gg 1/\sqrt{\rho}$ ($q \cong 1$)이면,

$$o(F_\infty) = o(2\sqrt{\rho} \alpha^2 N), \quad o(L) = o(2N + 4\gamma^{-2} N),$$

$$o\left(\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)\right) = 0.$$

$\mu \rightarrow 0$ 일 때, $|N| \cong 1/\sqrt{\mu}$ 일 가능성은 $o(q=N) \cong 1$ 이므로 존재하지 않는다. 그러므로 $\mu \rightarrow 0$ 일 때, $q \cong 1$ 의 가능성은 존재하지 않는다.

경우 3 : 만일 $1/\sqrt{\rho} \ll |N| \ll 1/\sqrt{\mu}$ ($q \ll 1$)이면,

$$o(F_\infty) = o(2\sqrt{\rho} \alpha^2 N), \quad o(L) = o(1/\sqrt{\mu}),$$

$$o\left(\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)\right) = 0.$$

$o(q=N) \ll 1$ 이므로 $\mu \rightarrow 0$, $|N| \ll 1/\sqrt{\mu}$ 가 성립하므로 $\mu \rightarrow 0$ 때, $q \ll 1$ 는 만족된다.

경우 4 : 만일 $|N| \ll 1/\sqrt{\rho} \ll 1/\sqrt{\mu}$ ($q \ll 1$)이면,

$$o(F_\infty) = o(2\alpha), \quad o(L) = o(1/\sqrt{\mu}),$$

$$o\left(\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)\right) = \frac{1}{2} \{ \rho \gamma^{-2} (-2\alpha^{-2} + \alpha) + \gamma [\rho^2 \gamma^2 (-2\alpha^{-1} + \alpha) - 4\alpha^2]^{1/2} \}.$$

만일 α 와 ρ 가 유한하면, $\frac{\gamma^{-2}}{\rho} (X_\infty + Y)$ 도 유한하다. 그래서 $\mu \rightarrow 0$ 일 때, $|N| \ll 1/\sqrt{\mu}$ 이 성립하므로 $\mu \rightarrow 0$ 일 때, $q \ll 1$ 는 만족된다. 따라서 유한한 입력을 갖는 안정한 시스템에서는, $\|N\|$ 이 유한하므로 $\mu \rightarrow 0$ 일 때 $q \ll 1$ 가 만족된다. ■

앞에서 언급한 것과 같이 비선형 보정항 $\Psi(\cdot)$ 과 LTR 지수 q 의 차수가 같으므로 LTR을 위해 $\mu \rightarrow 0$ 로 두면 비선형 보정항을 무시할 수 있으므로 수치적인 문제를 해결할 수 있어 보다 용이하게 제어기 계인들을 설계할 수 있음을 알 수 있다. 다음에 루프형성(loop shaping)을 위해 잘 알려진 루프전달행렬(loop transfer matrix)의 극한거동은 다음과 같다. LTR조건이 만족되면 $\mu \rightarrow 0$ 일 때, (41)로부터 비선형 보정항이 소거되고

$$BB^T - (PC_2^T / \sqrt{\mu})(C_2 P / \sqrt{\mu}) \rightarrow 0 \quad (63)$$

필터 계인을 (63)에 대치하면

$$(\sqrt{\mu}L)(\sqrt{\mu}L)^T \rightarrow BU, \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{\mu}L \rightarrow BU \quad (64)$$

여기서 U 는 일원행렬(unitary matrix)이다. 제어기 $K(s)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$K(s) = -F_\infty (sI - N + \alpha^{-2}BF_\infty + LC_2)^{-1}L \quad (65)$$

정리 3 : 만일 $\text{Re } \lambda_i[N - \alpha^{-2}BF_\infty] < 0, \text{Re } \lambda_i[N - LC_2] < 0$ 이고 $\lim_{\mu \rightarrow 0} \sqrt{\mu}L \rightarrow BU$ 이면,

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} K(s) &\rightarrow [-F_\infty (sI - N)^{-1}B][C_2 (sI - N)^{-1}B]^{-1} \\ &= G_{TL}(s) \cdot G^{-1}(s) \end{aligned} \quad (66)$$

여기서 $G_{TL}(s) = -F_\infty (sI - N)^{-1}B$.

증명 : 간단하므로 생략한다. ■

이러한 불연속 비선형 시스템에 대한 비선형 H_2/H_∞ /LTR 제어기를 설계하는 절차는 먼저 임의의 가정된 표준편차 각 값에 대한 기술함수 계인을 정하고 계산된 기술함수 계인 및 제어 계인과 필터 계인을 구한 후 최종적으로 불연속 비선형에 대한 IRIDF(Inverse Random Describing Function)[20]를 이용하여 비선형 함수를 구하여 비선형 제어기를 구현한다.

자세한 비선형 제어기 설계절차는 참고문헌[13,14]와 4장의 설계과정에 나타나 있다.

IV. 탄성역진자 시스템에 대한 모의실험 및 검토

탄성 역진자 시스템의 시스템 파라미터는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} L &= 0.6m, E_1 = E_2 = 2.06 \times 10^{11} Nm^2, k = 10 N/m \\ I_1 &= I_2 = 4.17 \times 10^{-12} m^4, \rho_1 = \rho_2 = 0.38 Kg/m, \\ m_1 &= m_2 = 0.06 Kg. \end{aligned}$$

2차 모드까지 시스템 플랜트로 고려한 상태공간 준-선형 모델식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t) \end{aligned} \quad (67)$$

여기서

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix}, A_p = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & I_6 \\ N_A & 0_{6 \times 4} \end{bmatrix},$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 2} \\ \hat{B} \end{bmatrix}, C_p = \hat{C} \ 0_{2 \times 6}]$$

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19.56 & 28.03 & 0 & 0 & -1.014N_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19.56 & 28.03 & 0 & -1.014N_2 \\ 5.87 & 0 & -109.87 & -7.38 & 0 & 0 & 0.27N_1 & 0 \\ 6.14 & 0 & -5.21 & -5543.6 & 0 & 0 & 0.27N_1 & 0 \\ 0 & 5.87 & 0 & 0 & -109.87 & -7.38 & 0 & 0.27N_2 \\ 0 & 6.14 & 0 & 0 & -5.21 & -5543.6 & 0 & 0.27N_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 1.014 & 0 & -0.27 & -0.27 & 0 & 0 \\ 0 & 1.014 & 0 & 0 & -0.27 & -0.27 \end{bmatrix}^T, \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

쿨롱 마찰의 크기는 0.5 Nm로 정하였는데 이 때 쿨롱 마찰에 대한 기술함수 계인들은 다음과 같다.

$$N_1 = \frac{0.5\sqrt{2I\pi}}{\sigma_{x7}}, N_2 = \frac{0.5\sqrt{2I\pi}}{\sigma_{x8}} \quad (68)$$

설계플랜트 모델은 역진자 선단의 정확한 위치제어를 위해 정상오차를 억제하기 위한 적분요소를 플랜트 출력측에 첨가하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= C_2 x(t) \end{aligned} \quad (69)$$

여기서

$$A = \begin{bmatrix} 0_{6 \times 6} & C_p \\ 0_{6 \times 6} & A_p \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & B_p \end{bmatrix}^T, C_2 = \begin{bmatrix} I_2 & 0_{2 \times 12} \end{bmatrix}.$$

목표루프의 특이값이 저주파와 고주파에서 일치하는 루프형성을 위한 오차가중행렬 C_I 을 구하기 위해 Kalman 필터 주파수역 등가(KFDE)를 이용한다. (67)에서 목표루프의 전달행렬은 $G_{TL}(s) = -F_\infty (sI - N)^{-1}B$ 이고 계인 개루프행렬인 $G_{GOL}(s) = C_I (sI - N)^{-1}B$ 에 대해

$$[I + \alpha^{-2}G_{TL}(s)][I + \alpha^{-2}G_{TL}(s)]^T = I + \frac{\alpha^{-2}}{\rho} G_{GOL}(s)G_{GOL}^T(s) \quad (70)$$

로 되고

$$\sigma_i [I + \alpha^{-2}G_{TL}(j\omega)] = \sqrt{I + \frac{1}{\rho} \sigma_i^2 [\alpha^{-1}C_I \phi(j\omega)B]} \quad (71)$$

또는

$$\sigma_i [G_{TL}(j\omega)] \cong \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sigma_i [\alpha C_I \phi(j\omega)B] \quad (72)$$

위의 결과를 근거로 루프형성을 위한 오차가중행렬 C_I 은 다음과 같이 유도된다.

$$C_I = \alpha^{-1} \begin{bmatrix} -(C_p A_p^{-1} B_p)^{-1} \\ (C_p^T (C_p C_p^T)^{-1})^T \end{bmatrix} \quad (73)$$

나머지 설계 변수들은 다음과 같이 선정하였다.

$$\gamma = 1.8, \rho = 0.15, \mu = 1e-07 \quad (74)$$

쿨롱 마찰 기술함수 계인의 표준편차값은 알 수 없으므로 가우시안 백색잡음(Gaussian white noise)입력에 대한 가중출력강도(weighting output intensity) R_z 의 적당한 범위를 가정하고 각 가중출력에 대해 연성된 Riccati방정식 (39), (40), (41)을 풀고 다시 페루프 시스템에 대한 Riccati 방정식 (36)을 연립하여 풀어야 한다. 그러나 RIDF 기술함수 기법은 원래 H_2 -노름(norm) 관점에서 계산된 근사법이므로 H_∞ -노름 관점에서 구성된 (36)과 연립하여 풀기가 어렵다. 그래서 (36)대신에 다음의 공분산 전파식(covariance propagation equation)인 Lyapunov식과 연립하여 풀면 쉽게 표준편차를 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} N & BF_\infty \\ -LC_2 & N_K \end{bmatrix}^T \tilde{X}_r + \tilde{X}_r \begin{bmatrix} N & BF_\infty \\ -LC_2 & N_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1^T R_z C_1 & 0 \\ 0 & F_\infty^T R_z F_\infty \end{bmatrix} = 0 \quad (75)$$

표 1. 주어진 가중출력강도에서의 기술함수계인 및 표준편차.

Table 1. D.F gains and standard deviations at the given weighting output intensity.

R_z	500	100	10	5	2	0.5	0.1	0.05
N_{z1}	0.02	0.05	0.17	0.24	0.39	0.82	2.13	3.42
N_{z2}	0.02	0.05	0.17	0.24	0.39	0.83	2.13	3.42
σ_{z9}	17.12	7.63	2.37	1.66	1.03	0.48	0.19	0.12
σ_{z10}	17.11	7.63	2.37	1.66	1.03	0.48	0.19	0.12

가정한 R_z 와 쿨롱 마찰에 대해 계산된 기술함수 및 제어기 상태변수의 표준편차는 표 1과 그림 3에 나타나 있다. 그리고 IRIDF기법을 이용하여 제어기에 구현할 비선형 함수를 계산한 결과는 그림 4에 제시되어 있다.

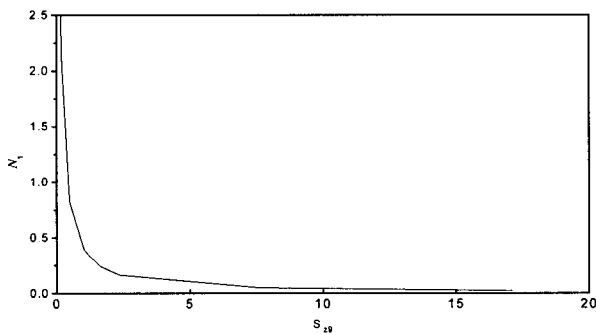


그림 3. 쿨롱마찰에 대한 기술함수 계인과 표준편차와의 관계.

Fig. 3. The relation of the describing function gain and standard deviation on the Coulomb friction.

그림 5에는 목표루프와 회복된 루프의 특이값선도를 나타내고 있다. 그림 5를 살펴보면 R_z 값에 따라 각 루프의 특이값이 변하고 있다. 이것은 R_z 의 변화에 따른 제어계인과 필터 계인 행렬의 값들이 일정대한 민감도를 조사한 결과 필터 계인행렬 L_{ij} 중에서 L_{19} , L_{210} 의 변화가 가장 크게 나타났다. L_{19} , L_{210} 의 값과 각각에 대한 필터 이노베이션(innovation)의 표준편차 σ_{fi} 는 동일하며 표 2에 나타난 L_{19} 와 필터 이노베이션(innovation)의

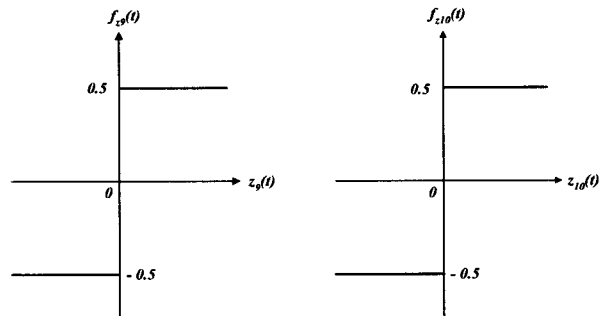


그림 4. IRIDF 기법에 의한 제어기에 구현된 비선형 함수.

Fig. 4. The implemented nonlinear function in the controller via IRIDF technique.

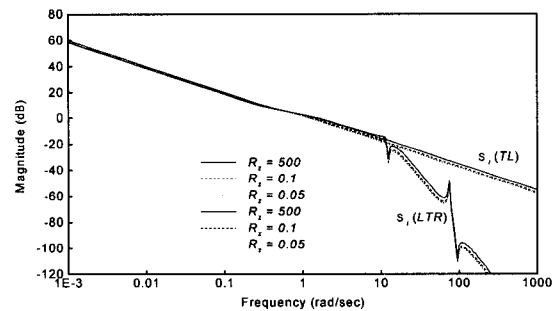


그림 5. R_z 값의 변화에 대한 목표루프와 회복된 루프 전달행렬의 특이값 선도.

Fig. 5. Singular value plots of the target and recovered loop transfer function matrix for the variation of R_z .

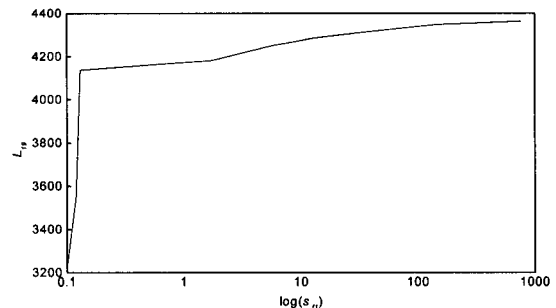


그림 6. 필터계인 L_{19} 과 필터 이노베이션의 표준 편차 σ_{f1} 의 관계.

Fig. 6. The relation of the filter gain L_{19} and standard deviation σ_{f1} of the filter innovation.

표준편차 σ_{f1} 과의 관계는 그림 6에 나타나 있으며 IRIDF기법을 이용하여 계산한 제어기 필터에 구현할 비선형 함수는 그림 7과 같다. 그림 7에서 L_{19} , L_{210} 는 사역대(dead-zone) 비선형 특성이 있음을 보여주고 있다. 사역대 비선형의 경우 기술함수 계인은 $N_D = erf(1 - \delta/\sigma_f)$ 이며 δ 는 사역대간격을 나타낸다.

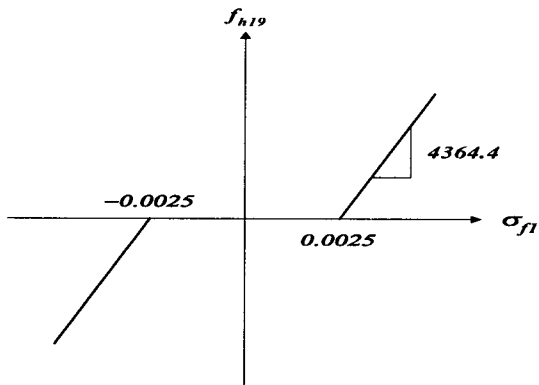


그림 7. 필터 계인에 구현할 비선형함수.

Fig. 7. The nonlinear function implemented in the filter gain.

표 2. 주어진 가중출력강도에서의 필터 계인 및 필터 이노베이션의 표준편차.

Table 2. Filter gain and standard deviation of the filter innovation at the given weighting output intensity.

R_z	500	100	10	5	2	0.5	0.1	0.05
L_{19}	4364	4349	4284	4253	4181	4137	3553	3227
σ_{f1}	767.4	147.8	12.5	5.6	1.7	0.13	0.12	0.10

나머지 제어기에 구현되는 제어 계인과 필터 계인은 R_z 이 500일 때의 고정 값을 취하였다. 그림 8은 쿨롱 마찰이 없는 역진자의 경우 동일한 설계변수에 대해 선형

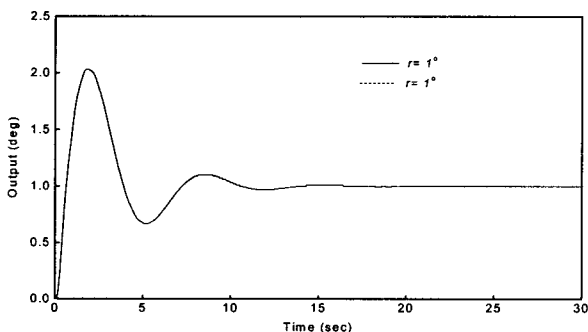


그림 8. 선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어시스템의 단위 계단 입력에 대한 역진자 선단 각 위치 시간응답; $[1,1]^T$ 입력방향.

Fig. 8. Time response of the angular end point displacement of the linear $H_2/H_\infty/LTR$ control system for unit step input; $[1,1]^T$ input direction.

$H_2/H_\infty/LTR$ 제어기를 설계한 선형 제어시스템의 단위 계단입력에 대한 선단 출력 각 위치를 보여주고 있다. 2개의 병렬 역진자 출력은 동일한 응답을 보여주고 있으며 과도한 제어 입력을 피하기 위해 대역폭을 작게 한 결과 역진자 시스템 특성상 오버슈트가 약간 크게 나타나고 있다. 그림 9는 쿨롱 마찰이 존재하는 역진자 시스템에 대해 선형제어기를 결합한 제어시스템의 작은 입력($1^\circ, 2^\circ, 5^\circ$)에 따른 정규화된(normalized) 선단 각 위치를 보여주고 있다.

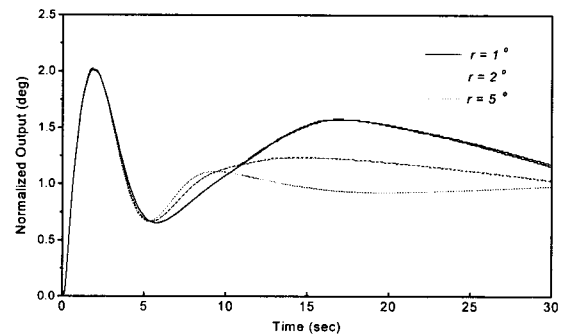


그림 9. 작은 계단입력에 대한 선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어기와 비선형 플랜트가 결합된 제어시스템의 역진자 선단 각 위치의 정규화된 시간응답; $[1,1]^T$ 입력방향.

Fig. 9. Normalized time response of the angular end point displacement of the control system connected with nonlinear plant and linear $H_2/H_\infty/LTR$ controller for small step inputs; $[1,1]^T$ input direction.

선형 제어시스템과는 달리 정착시간이 매우 길어지고 정상응답성능이 크게 나빠지고 있음을 알 수 있다. 특히 작은 각도의 범위를 제어할 때 출력성능이 더 악화됨을

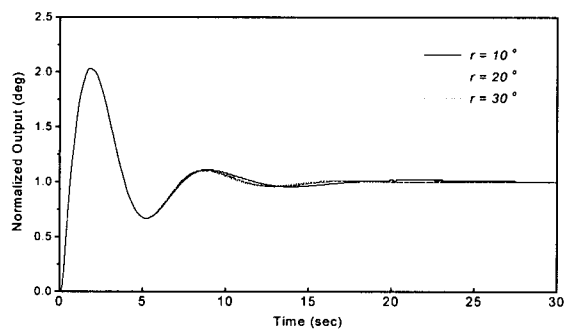


그림 10. 큰 계단입력에 대한 선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어기와 비선형 플랜트가 결합된 제어시스템의 역진자 선단 각 위치의 정규화된 시간응답; $[1,1]^T$ 입력방향.

Fig. 10. Normalized time response of the angular end point displacement of the control system connected with nonlinear plant and linear $H_2/H_\infty/LTR$ controller for large step inputs; $[1,1]^T$ input direction.

알 수 있다. 이것은 작은 각도를 제어할 경우 구동토크도 역시 작아지는데 이 때 역 방향으로 작용하는 마찰토크가 영향을 주기 때문이다. 만일 구동토크가 마찰토크보다 훨씬 크게 되는 경우에는 쿨롱 마찰의 영향이 거의 없음을 그림 10을 고찰하면 알 수 있다. 그림 11은 비선형요소를 구현한 비선형 제어기와 비선형 플랜트가 결합된 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어시 작은 계단 입력 ($1^\circ, 2^\circ, 5^\circ$)에 따른 정규화된 선단 각 위치를 보여주고 있다. 전자의 경우와는 달리 작은 각도를 제어할 때의 쿨롱 마찰효과에 대해 강인한 응답특성을 보여주고 있다. 그리고 그림 12는 큰 계단 입력에 대한 결합된 비선

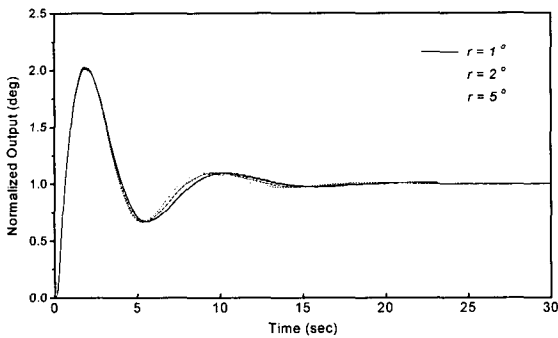


그림 11. 작은 계단입력에 대한 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어기와 비선형 플랜트가 결합된 제어시스템의 역진자 선단 각 위치의 정규화된 시간 응답; $[1,1]^T$ 입력방향.

Fig. 11. Normalized time response of the angular end point displacement of the control system connected with nonlinear plant and nonlinear $H_2/H_\infty/LTR$ controller for small step inputs; $[1,1]^T$ input direction.

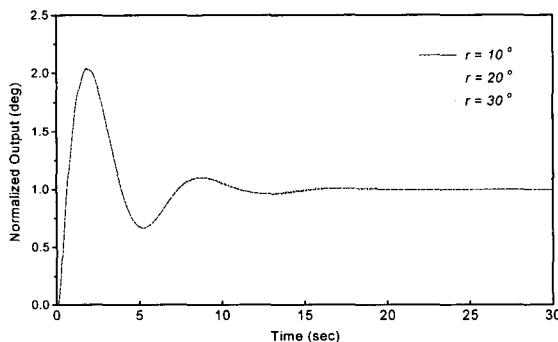


그림 12. 큰 계단입력에 대한 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어기와 비선형 플랜트가 결합된 제어시스템의 역진자 선단 각 위치의 정규화된 시간 응답; $[1,1]^T$ 입력방향.

Fig. 12. Normalized time response of the angular end point displacement of the control system connected with nonlinear plant and nonlinear $H_2/H_\infty/LTR$ controller for large step inputs; $[1,1]^T$ input direction.

형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어시스템의 정규화된(normalized) 선단 각 위치를 보여주고 있다. 큰 계단 입력에 대해서는 선형의 경우보다 약간 더 좋은 성능을 보여주고 있다. 결론적으로 지금까지의 제시한 결과를 살펴보면 제안한 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어 방법은 쿨롱 마찰이 존재하는 역진자 시스템의 제어에 효과적이며 특히 작은 각도의 정밀한 구동을 요구되는 경우에 더욱 효과적임을 알 수 있다.

V. 결론

선단 질량이 스프링으로 연결되고 탄성 링크를 갖는 병렬 역진자 시스템에서 회전부 구동부에서 마찰이 존재하는 경우 효과적인 선단의 위치 제어를 위해 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어방법을 제안하였다. 탄성 역진자 시스템을 Hamilton의 원리와 가정된 모드기법을 통해 모델링 하였으며 불연속 비선형 쿨롱 마찰을 RIDF 기법을 이용하여 준-선형 모델을 구축하였다. 그리고 선형 H_2/H_∞ 제어기법을 도입하여 일정한 가정 하에 루프형성과 루프전달회복을 할 수 있음을 보였고 루프전달회복 조건이 만족되면 제어기 설계과정에서 비선형 보정항이 소거되어 제어기 설계를 선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어 경우와 유사하게 할 수 있음을 보였다. 이러한 결과를 근거로 쿨롱 마찰이 존재하는 탄성 역진자의 선단 각 위치의 정밀제어에 적용한 결과 선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어방법보다 효과적으로 제어시스템을 설계할 수 있음을 제시하였다. 그래서 제안한 비선형 $H_2/H_\infty/LTR$ 제어방법은 탄성특성과 비선형 마찰특성을 동시에 고려할 수 있는 제어방법임을 보였다.

제안한 제어방법은 다른 불연속 비선형이 존재하는 시스템의 강인제어에 응용할 수 있으며 특히 정밀구동이 요구되는 다변수 서보시스템에서 직선 구동부나 회전 구동부에서 마찰로 인해 정확한 위치제어문제가 발생할 때 더욱 효과적으로 적용할 수 있을 것이다. 그 이유는 단일입출력 시스템에 대한 마찰 보상문제에 대한 연구는 많이 있었으나 다변수 시스템에 대한 마찰 보상에 대한 연구는 그리 많지 않기 때문이다.

향후 탄성시스템에서 설계 플랜트 선정 시 무시한 고차모드의 영향까지 고려한 설계와 시스템의 파라미터가 구조적으로 변하는 탄성시스템에서 불연속 비선형과 시스템 섭동을 동시에 고려하는 강인제어 연구를 진행할 예정이며 또한 실험적인 구현을 통해 제안한 방법의 실제적 성능이 검토되어야 할 것이다.

참고문헌

[1] S. Centinkunt, W. J. Book, "Symbolic modeling of flexible manipulators," *IEEE Int. Conf. on R. & A.*, pp. 2074-2080, 1987.
 [2] S. K. Biswas, and R. D. Klafter, "Dynamic modeling and optimal control of flexible robotic manipulators," *IEEE Int. Conf. on R. & A.*, pp. 15-20, 1988.

- [3] G. B. Yang, M. Donath, "Dynamic model of a one-link robot manipulator with both structural and joint flexibility," *IEEE Int. Conf. on R. & A.*, pp. 476-481, 1988.
- [4] Y. Sakawa, F. Matsno, Y. Ohsawa, M. Kiyohara, and T. Abe, "Modeling and vibration control of a flexible manipulator with three axis by using accelerometers," *Advanced Robotics*, vol. 4, no. 2, pp. 119-137, 1990.
- [5] S. Centinkunt and W. J. Book, "Performance limitations of joint variable-feedback controller due to manipulator structural flexibility," *IEEE Trans. On R. & A.*, vol. 6, pp. 2, 1990.
- [6] K. G. Elthohamy, and C. Y. Kuo, "Nonlinear optimal a triple link inverted pendulum with single control input," *Int. J. Contr.*, vol. 60, no. 2, pp. 239-256, 1998.
- [7] C. W. Anderson, "Learning to control an inverted pendulum using neural networks," *IEEE Contr. Sys. Magazine*, vol. 9, no. 3, pp. 31-37, 1989.
- [8] G. W. Vander Linden, and P. F. Lambrechts, " H_∞ control of an experimental inverted pendulum with dry friction," *Proc. CDC*, pp. 123-128, 1992.
- [9] K. Furta, T. Okutani, and H. Sone, "Computer control of a double inverted pendulum," *Computer and Elect. Engr.*, no. 5, pp. 67-84, 1978.
- [10] H. Nishimura, O. Ohnuki, K. Nonami, and T. Totani, "Stabilizing and positioning control of inverted flexible pendulum by means of H_∞ servo control with partial state feedback," *Proc. ASME 15th Biennial Conf. Vib. Noise*, vol. 3, Part C, pp. 537-544, 1995.
- [11] F. Matsuno and M. Tanaka, "Modeling and robust control of two flexible beams connected by a spring," *Proc. CDC*, pp. 4216-4221, 1996.
- [12] F. Matsuno and T. Ohno, "Distributed parameter control of a large space structure with lumped and distributed flexibility," *Proc. CDC*, pp. 269-274, 1997.
- [13] J. S. Kim, "QLQG/LTR control for hard non-linear multivariable systems," *Instr. Mech. Engrs., J. Sys. And Contr. Eng.*, vol. 208, pp. 177-187, 1994.
- [14] S. I. Han and J. S. Kim, " H_∞ -Constrained quasi-linear quadratic gaussian control with loop transfer recovery," *KSME Int. J.*, vol. 11, no. 3, pp. 255-266, 1997.
- [15] 한성익, 김종식, "구조화된 불확실성을 갖는 하드비선형 시스템에 대한 강인한 다변수 비선형 제어," 한국정밀공학회, 제15권, 제12호, pp. 128-141, 1998.
- [16] J. C. Doyle, K. Zhou, and B. Bodenheimer, "Mixed H_2 and H_∞ control," *Proc. ACC*, pp. 2502-2507, 1990.
- [17] H. H. Yeh, S. S. Banda, and B. C. Chang, "Necessary and sufficient conditions for mixed H_2 and H_∞ optimal control," *IEEE, Trans. A. C.*, vol. 37, no. 3, pp. 355-358, 1992.
- [18] D. S., Bernstein and W. M., Haddad, "LQG control with an H_∞ performance bound: a riccati equation approach," *IEEE Trans. A. C.*, vol. 34, no. 3, pp. 293-305, 1989.
- [19] A. Gelb, W. E. Vander Velde, *Multiple Input Describing Function and Nonlinear System Design*, McGraw-Hill, 1968.
- [20] A. Suzuki, and C. V. Hedrick, "Nonlinear controller design by an inverse random input describing function method," *Proc. ACC*, pp. 1236-1241, 1985



한성익

1960년 12월 25일생. 1987년 부산대학교 기계공학과(공학사). 1989년 동대학원 석사. 1995년 동대학원 기계설계공학과 박사. 1995년~현재 순천제일대학 기계전기제어과 조교수.

관심분야는 다변수강인제어, 로봇제어, 비선형제어, 메카트로닉스 등.