

效率的인 空間圖形的 方程式 指導에 관한 研究

김 일 겸¹⁾

I. 서론

A. 연구의 필요성

고등학교 수학교육의 방향이 수학적 사고력 신장이라는 큰 테두리안에서 이루어지고 있다는 것을 생각하면 학교현장에서의 수학교육이 어떠한가 하는가에 대한 반성을 하게 된다.

문제풀이의 과정에서 기본 개념의 이해가 얼마만큼 중요한지는 모두가 인지하는 바이나, 실제로 기본개념의 완벽한 이해를 목적으로 하는 수업을 진행하기란 쉽지않다. 학생들의 기본 개념에 대한 이해정도를 매번 파악해서 완벽한 수업을 한다는 것이 어렵기 때문이다. 그러나 학생들의 수준을 떠나 기본적으로 수업 자체 만큼은 기본 개념의 이해를 돕기 위한 수업이 되어야 한다. 수학적 사고력은 기본 개념에 충실하여야 하며 이러한 바탕위에서 창조적인 문제 해결이 가능해지기 때문이다.

수학 교과서가 학교 수업에 미치는 영향력을 생각할 때, 구성주의로부터 얻을 수 있는 시사를 수학 교과서에 '직접' 반영함으로써 지금보다 학생 중심의, 활동 중심의, 토론 중심의, 그리고 능력별 개별화 중심의 수학 수업이 활성화 될 수 있을 것이다. 즉, 구성주의에 의해 부각된 수학적 지식의 조작적 측면,

사회적 측면, 이해의 주관적 측면을 수학 교과서에 반영함으로써 교수-학습 상의 변화를 기대해 볼 수 있다. (김정호 외 4인, 1998) 따라서 복잡한 학습내용의 구성이 학생들로 하여금 교과서를 멀리하게 하고 내용은 알되 문제 해결에 응용하지 못하는 등의 문제점을 극복하기 위하여 기존 개념과 새로운 개념을 연관짓는 기본 개념의 체계화 작업을 통해 학습내용을 재구성 할 필요가 있다고 생각되어 본 연구에 임하게 되었다.

B. 연구의 목적

논리적인 사고력을 바탕으로 문제 해결력을 기르기 위하여 공간도형의 방정식이라는 단원을 학습내용을 재구성하고, 효율적인 지도방안을 제시하여 학생들이 기본개념을 명확히 이해하는데 도움이 되고자 한다.

가. 공간도형 학습에서 문제해결에 절대적인 기본 개념과 원리를 바르고 정확하게 이해시킬 수 있도록 기존의 개념과 새로운 개념을 연관지어 체계적으로 구성한다.

나. 효율적, 능률적인 문제해결을 위하여 기본 개념과 원리를 적당한 작도를 통하여 학습자로 하여금 쉽게 이해할 수 있는 학습내용을 구성한다.

다. 학습자로 하여금 기존 개념의 확장하여

1) 동대전 고등학교

새로운 개념을 학습하여 새로운 문제 상황을 해결할 수 있도록 창의성을 기를 수 있는 학습내용을 구성한다.

라. 교사의 입장에서 기본 개념을 보다 능률적으로 이해시킬 수 있는 지도방법을 제시한다

C. 연구의 제한점

가. 본 연구는 고등학교 수학Ⅱ 교육과정에 있는 공간도형 단원에 한하였다.

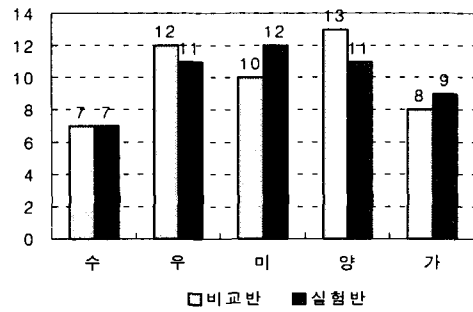
나. 본 연구는 학습내용의 재구성을 통하여 기본 개념을 좀 더 용이하게 학습할 수 있는 방법을 모색하는 연구이므로 실험반과 비교반을 설정하여 연구결과를 비교 분석 하였다.

다. 두 집단에 대한 공간도형의 지도시기와 평가시기가 각각 다르다.

4) 연구의 대상에 대한 수학 학습능력 실태

분 류	수	우	미	양	가	총점	평균
실험반	7	11	12	11	9	584	11.68
비교반	7	12	10	13	8	588	11.76

연구대상인 두 학급의 수학 학습능력은 99년 5월 4일 과 7월 2일 두 차례 실시한 정기 교사의 결과를 이용하여 파악하였다.



II. 본 론

A. 연구의 실제

1) 연구의 대상

대 상	구 분	학년반	인 원	총 계
동 대 전 고등학교	실험반:A	3의 6	50名	100名
	비교반:B	3의 7	50名	

2) 연구 기간

1999年 3月 1日 ~ 1999年 10 月

3) 대상교과 및 단원

고등학교 수학Ⅱ 벡터 단원의 공간도형의 방정식

위의 통계에서 보듯 두 집단의 수학 학습 능력은 비교반의 평균이 약간 높으며 분산 또한 비교반이 실험반 보다 약간 낮은 정도로 그 차이는 거의 없다고 할 수 있다.

따라서 두 집단의 수학 학습능력이 비슷한 조건에서 연구가 수행되어졌다고 볼 수 있다.

5) 실험도구 및 방법

A 집단은 재구성된 실험 교재로 지도를 하고 B 집단은 현행 교과서로 지도한다.

6) 실험교재의 구성

실험용 교재의 내용은 현행 교육과정에 준하는 교육내용을 포함하는 것으로 연구자의 의도에 맞게 현행 교과서와는 일부 순서 및 내용을 다르게 편집하였다.

7) 가설

본 연구는 벡터단원에서 공간도형의 방정식에 대하여 기본 개념을 강화한 재구성된 교재를 사용할 경우에 공간도형의 방정식 단원에 대한 학생들의 이해력과 문제 해결능력이 신장되는 효과를 거둘 것이다.

8) 연구의 평가 및 자료처리 방법

연구의 평가 방법

두 집단의 학업성취도 평가를 위하여 단원의 지도가 끝나는 시기에 연구목적에 맞도록 작성한 시험지로 평가를 실시하였다.

작성한 평가문항의 평가영역에 대한 이원 분류는 다음과 같다.

문 제 내 용	문제영역				난이도		
	지식	이해	적용	종합	상	중	하
위치 벡터	1						○
직선의 방정식	1						○
두직선의 사이각			1				○
평면의 방정식	1						○
평면의 방정식		1					○
두평면의 사이각			1				○
직선평면의 사이각				1	○		
위치 벡터		1					○
직선의 벡터방정식		1					○
평면의 방정식				1	○		
계	3	3	2	2	3	4	3

자료 처리 방법

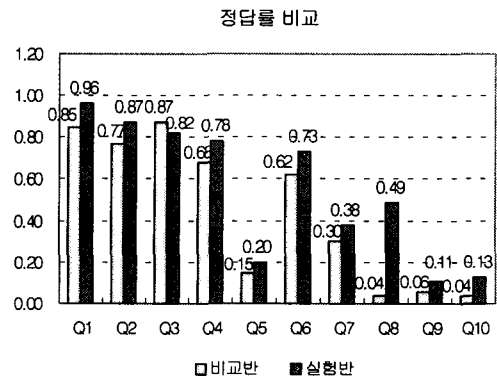
평가 영역의 성취도의 변화를 살펴보기 위하여 각 문항의 평가 영역별 점수를 조사 비교하였다.

두 집단에 대한 평가결과의 평균과 표준편차를 독립표본 T 검정 (Independent Samples Test)으로 검증하였다.

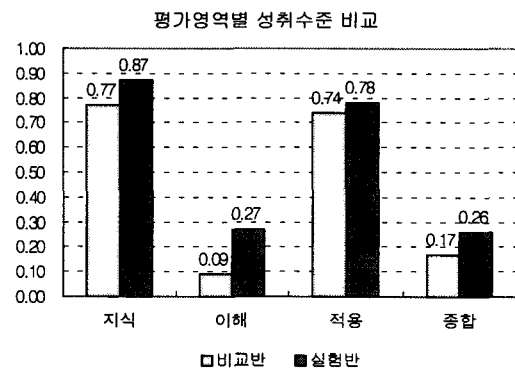
B. 연구의 결과

1) 정답률 비교

두 집단의 정답률을 비교하면 3 번 문항의 경우를 제외하고 모든 문항에서 실험반이 비교반보다 높은 정답률을 나타내었다.



2) 평가 영역별 성취수준 비교

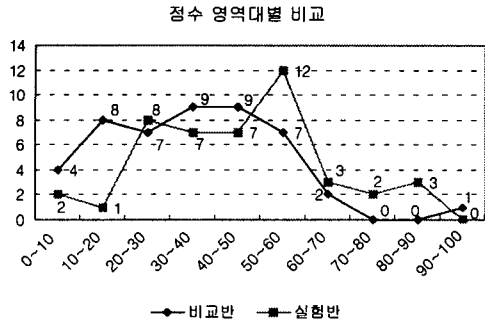


평가 영역별 성취도를 비교해보면 각 영역에서 골고루 성취수준이 향상 되었으며 특히 이해력의 향상이 주목할 만하다.

3) 두 집단의 점수 영역대별 비교

다음 그래프는 두 집단의 점수 영역대별 도수를 나타낸 것으로 실험반의 도수를 관찰해보면 비교반에 비하여 하위 점수의 도수가 감소하고 상위 점수의 도수가 증가하였다.

각 문항의 정답률비교, 평가 영역별 정답



률의 변화, 두 집단의 점수대별 도수 비교를 살펴본 결과 실험반의 결과가 비교반의 결과보다 상당히 우수한 것으로 나타났다.

4) 가설의 검증

다음은 실험반과 비교반의 평가결과에 대한 전체 결과를 보여주고 있다. 두 집단에 대한 평가에서 가치있는 평가결과는 실험반 45명 비교반 47명이 답한 것으로 이의 평균과 표준 오차는 다음과 같다.

두 집단의 통계 결과

비교집단	도수	평균	표준편차	표준오차
실험반	45	48.04	19.65	2.93
비교반	47	36.34	18.22	2.66

두 집단의 평균의 차이 11.70이 과연 의미가 있는 차이인지는 다음 결과에서 제시하고 있다.

다음 실험반과 비교반의 평가결과에 대한 독립표본 T검정 (Independent Samples Test)표의 Levene의 검정 결과를 보면 F값이 .239이고 $P(0.626) > 0.05$ 이므로 두 모집단의 분산이 동일하다는 귀무가설이 채택된다.

채택된 가설에 따른 동일 분산 검정의 결과는 $P(0.04) < 0.05$ 이므로, 귀무가설(두 집단

의 평균차이 11.70이 통계적으로 무의미하다)이 기각된다.

독립표본 T검정

	Levene 검정		평균의 동질성에 대한 T검정						
	F	P	t	df	P (양측)	평균 차이	오차 차이	95% 신뢰구간	
								Lower	Upper
등분산 가정	.239	.626	2.964	90	.004	11.70	3.95	3.86	19.55
이분산 가정			2.959	88.735	.004	11.70	3.96	3.84	19.56

따라서 본 연구에서 제시한 『벡터단원에서 공간도형의 방정식에 대하여 기본 개념을 강화한 재구성된 교재를 사용할 경우에 공간도형의 방정식 단원에 대한 학생들의 이해력과 문제 해결능력이 신장되는 효과를 거둘 것이다』 라는 가정은 실험반의 성적향상이 통계적으로 유의하다고 판단되므로 기본 개념을 체계화한 실험교재를 통해서 학습 효과가 신장된다고 판단할 수 있다.

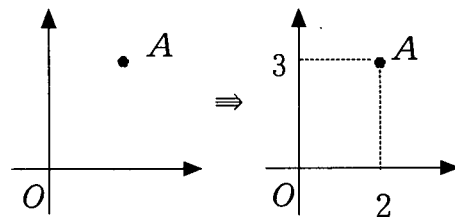
C 실험교재의 주요내용

1) 한 점의 Vector 방정식 (위치 Vector)

가. 좌표평면 → 좌표

아래 그림에서 점 A의 위치를 나타내기 위해 좌표를 사용한다.

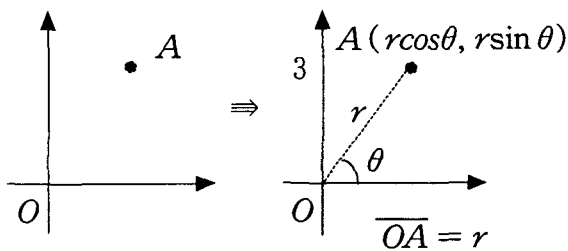
따라서 A점의 위치는 (2,3)으로 유일하게 결정된다.



나. 극좌표 평면 → 극좌표

오른쪽 그림에서 점 A 의 위치를 나타내기 위해 극좌표를 사용한다.

따라서 A 점의 위치는 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 로 유일하게 결정 된다.

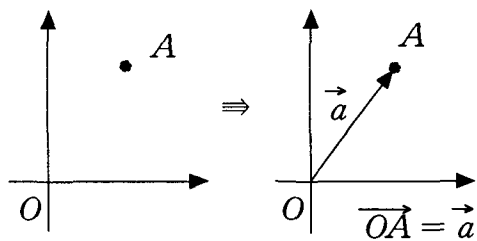


다. 벡터 평면 → 위치 벡터

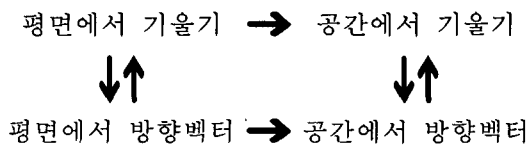
왼쪽 그림에서 점 A 의 위치를 나타내기 위해 위치 벡터를 사용한다.

따라서 A 점의 위치는 위치 벡터 \vec{a} 로 유일하게 결정 된다.

반대로 위치 벡터 \vec{a} 로 한 점 A 가 유일하게 결정된다.



2) 직선의 Vector 방정식



공간에서도 기울기와 지나는 한 점이 있으면 직선의 방정식을 구할 수 있음을 이해한다.

단, 공간에서의 직선의 기울기는 방향벡터로 제시됨을 이해하고 평면에서의 직선의 기울기는 평면에서의 직선의 방향벡터임을 이해한다.

평면에서 두 점을 이용하여 직선의 방정식을 구할 수 있었던 것 처럼 공간에서도 두 점을 지나는 직선의 방정식을 같은 원리에 의해서 구할 수 있음을 이해한다.

기울기 = 방향벡터이므로 두 점을 이용하여 기울기(방향벡터)를 구한 후 위와 같은 방법으로 직선의 방정식을 구한다.

좌표평면이 다음과 같은 네 개의 사분면으로 나뉘어 지는 것을 생각하면 위에서 m, n 의 부호에 따른 영역의 분할을 이해할 수 있다.

3) 평면의 Vector 방정식

다음은 벡터 평면에서 점, 직선, 평면의 방정식을 표현하는데 이용되는 벡터이다.

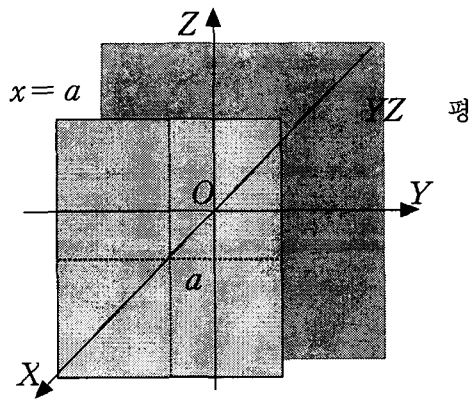
정 분	이용되는 벡터
점	위치 벡터
직 선	방향 벡터
평 면	법선 벡터

따라서 점, 직선, 평면을 언급하고자 할 때 (방정식을 이용하여)는 반드시 위치벡터, 방향벡터, 법선벡터를 알아야 한다.

4) 특수한 평면의 방정식

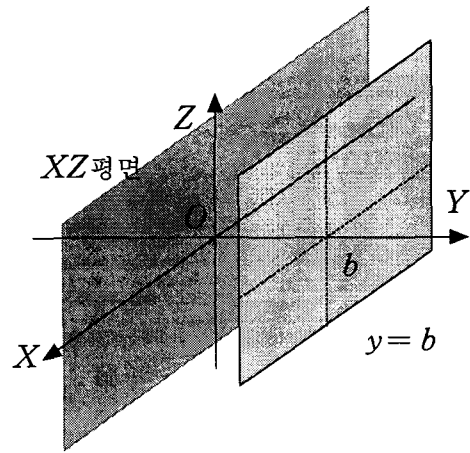
가. YZ 평면에 평행한 평면의 방정식

$x = a$ 를 지나면서 YZ 평면에
평행한 평면의 방정식은 $x = a$



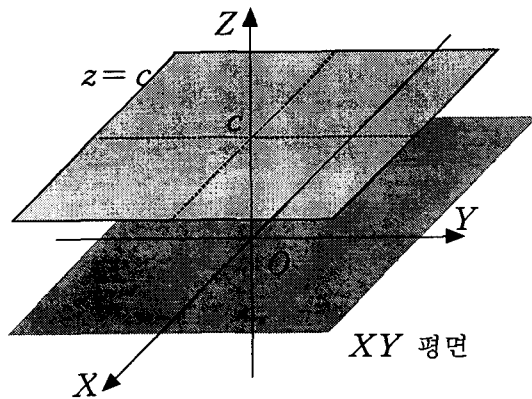
다. XY 평면에 평행한 평면의 방정식

$z = c$ 를 지나면서 XY 평면에
평행한 평면의 방정식은
 $z = c$



나. XZ 평면에 평행한 평면의 방정식

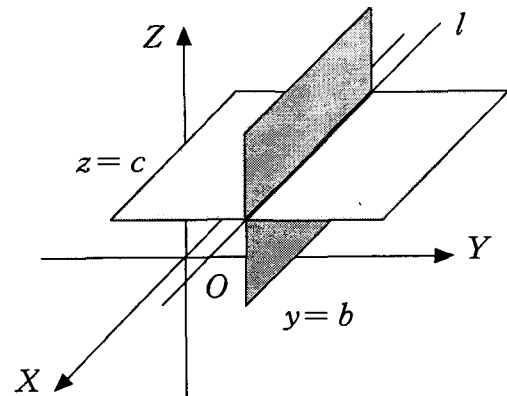
$y = b$ 를 지나면서 XZ 평면에
평행한 평면의 방정식은 $y = b$



5) 특수한 직선의 방정식

가. X 축과 평행한 직선의 방정식

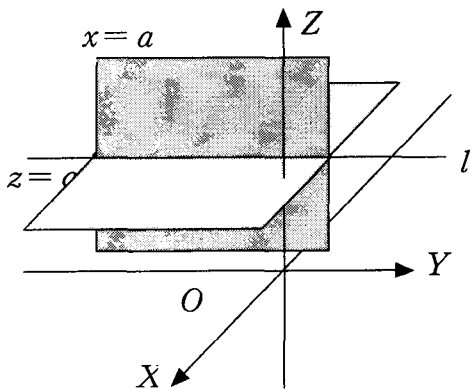
직선 l 의 방정식 $y = b, z = c$
 \because 두 평면 $y = b, z = c$ 의 교선이므로



나. Y축과 평행한 직선의 방정식

직선 l 의 방정식 $x=a, z=c$

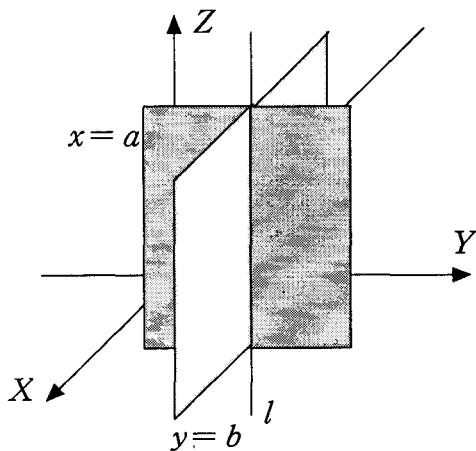
\therefore 두 평면 $x=a, z=c$ 의 교선이므로



다. Z축과 평행한 직선의 방정식

직선 l 의 방정식 $x=a, y=b$

\therefore 두 평면 $x=a, y=b$ 의 교선이므로



III. 결론 및 제언

A. 결론

이해력과 문제해결력의 신장을 위하여 기본 개념을 체계화한 실험교재를 사용한 본 연구 결과의 통계 및 분석 결과를 통하여 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

- 1) 벡터의 기본 개념을 문제 해결에 적용하기 위해서는 벡터의 기본 개념에 대한 명확하고 융통성있는 이해가 필요하다. 기본 개념을 체계화하여 여러 가지 개념에 대한 상호 관계를 이해시키는 방법은 새로운 개념의 학습에 상당히 효과적이다.
- 2) 좌표 및 극좌표의 개념을 확장한 위치벡터의 이해와 좌표 평면에서의 점, 선, 면에 대한 개념을 확장하여 공간에서의 점, 선, 면에 대한 개념을 정립시키는 방법이 학생들의 새로운 개념의 이해에 도움을 준다.
- 3) 새로운 개념을 효율적으로 이해하기 위하여 기존의 개념을 분석하고 체계적으로 나열하는 것이 새로운 지식의 체계를 좀 더 쉽게 이해하는데 상당히 효과적이다.
- 4) 기존의 개념을 새로운 개념을 이해하는데 응용하는 내용 구성의 교재가 학생들의 학습 능력을 향상시킨다.

B. 제언

학생 스스로 새로운 개념을 학습한다는 것은 대단히 어려운 일이 아닐 수 없다. 수학이 학생들에게 어렵게 느껴지는 것은 매 시간 새로운 개념을 학습하고 그것을 문제 상황에서 적용하기 때문이 아닐까 생각된다.

따라서, 새로운 학습내용을 익히기 위해서 기존의 개념을 활용할 수 있다면 학생들에게 상당히 도움을 줄 것이다.

기존 개념을 분석하고 종합하여 새로운 개념을 학습하는데 응용하기 위해서는 먼저 고교 수학 전반에 착실한 지식을 쌓고 있는 현장의 수학교사들의 부단한 교재 연구가 이루어져야하며 이러한 정보를 공유할 수 있는 환경이 필요하다.

현재의 각종 교재를 살펴보면 개념의 나열이 비슷하며 기본 개념을 충실하게 다루는 교재는 찾아보기 힘들다. 현재의 대학입시의 방향이 기본 개념을 충실히 하는데 있다는 것을 생각하면 이와 같은 많은 연구를 토대로 현 교재의 기본 개념에 대한 설명 및 문항의 구성등 교재의 내용 구성에 대한 학습자 입장에서의 연구와 개선이 이루어져야 한다

참 고 문 헌

- 강병서 김계수(1998) 통계분석을 위한 SPSSWIN EASY, 법우사
 김명렬 外 2人(1999) 「수학Ⅱ」, 중앙교육진흥연구소
 김연식 外 1人(1995) 「수학Ⅱ」, 동아출판사
 김정호 外 4人(1998) 「교과서모형 개발연구」, 한국 교육과정 평가원
 류훈호(1994) 「空間圖形의 切斷을 통한 發見學習이 空間 概念의 認識에 미치는 效果」(p 28~31), 공주시범대학 교육대학원
 박두일 신동선(1996) 「고등학교 수학Ⅱ 교사용 지도서」, 교학사
 박한식 外 5人(1999) 「수학Ⅱ」, 지학사
 수학 교재 편찬회(1986) 「대수학과 기하학」, 형설출판사
 신준국 外 5人(1999) 「數學的 思考力 伸張을 위한 水準別 學習效果」, 대전광역시

- 교육청
 이길호(1987) 「高等學校 數學教育에서의 Vector 와 空間圖形의 方程式指導에 관한 研究」(p 15), 공주시범대학 교육대학원
 이완구(1991) 「論理的 思考活動을 통한 空間圖形과 空間座標의 問題解決力 伸張에 관한 研究」(p 35~38), 공주시범대학 교육대학원
 조태근 外 6人(1991) 「수학Ⅱ」, 금성교과서
 차의수(1999) 한글 EXCEL 97, 정보문화사
 MSGMSG 우성구 譯, (1978) 「행렬의 대수」, 대한교과서주식회사

A Study on the Teaching Method of Equation of Figure in Space Effectively

Kim, Il Kyum²⁾

ABSTRACT

Two groups of students, who are the students in the natural science course of high school in Korea, learned the equation of figure in space (point, line, plane) to understand more effectively with two different textbooks.

One group was taught with the textbook used now in most high schools and the other group was taught with the textbooks systematized by associating old concept with new concept.

The results are as follows :

- 1) We need understand the basic concept of vector plainly and flexibly to apply it to the solution of problems.
- 2) It helps students understand new concepts how we should establish the concept about point, line and plane in space by applying the concept about those on XY plane.
- 3) It is very effective in understanding the new knowledge system more easily to analyze the existent concepts and to arrange them systematically for efficient understanding of new concepts.
- 4) The texts which consist of contents organized by basic concepts improve students' learning ability.

2) Dong Daejeon Highschool, Daejeon