한국학교수학회논문집 제 3권, 제 2호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 3, Number 2, 17-35, December 2000

통합교과로서의 수학 · 물리적 모델링의 코스 개발[1)]

신 현 성[2)]

1. 통합교육과정 의미

최근의 교육과정 개선 운동에서 수학과 과학이 통합의 많은 연구자의 관심 사항이 되었는데, 이유는 많은 연구(Berlin,1991; Kellough,1996)가 세분화되고 단편적인 지식보다 여러 분야의 지식을 통합하는 것이 실세계의 응용이나 각 지식을 이해하는데 효과적이라고 말하기 때문이다. 이러한 연구는 수학의 최근의 발전과 관련이 깊다. 즉, 고전적인 수학의 연구에서 컴퓨터를 중심으로 한 현대 기술과 과학이 결합이 되어 자연 및 사회 현상을 이해하려는 움직임이 있고, 이 경향에 맞추어 교육과정의 개선운동에서도 여러 교과의 내용을 통합하는 연구가 진행되고 있다.

Kellough(1996)는 최근의 학문의 발전을 중시하면서 통합교육과정을 다음과 같이 정의하고 있다.

통합교육과정은 교수방법과 지도내용을 조직하고 계획하는 두 가지 측면과 관련이 깊다. 각 교과의 지식이 단편적으로 지도되는 것이 아니고, 이들이 학습자의 발달단계에 알맞게 연결되어 학습자의 과거와 현재의 경험을 의미롭게 한다.

그러나, Berlin & White(1992)는 통합교육과정의 정의를 위와 같이 간단하게 진술하는 것은 오히려 통합을 잘 못 보는 것이라고 말한다. 특히, 수학과 과학을 통합하는 방법에 대하여 몇 가지를 언급하면서 "통합 모델"을 제시했다. 이 모델의 특징은 여러 관점에서 통합을 분석하려 하는데 있으며, 이러한 그의 연구는 이 후 통합교육과정을 정의하거나 통합의 성격을 규명하는데 또는 통합교육과정과 전통적 교육과정을 비교하는데 자주 사용되었다. 다음에는 그들의 관점을 논하여 보자

(1) 학습과 교수

수학과 과학의 통합은 학습자의 인지구조의 측면에서 바라볼 수 있다. 즉, 수학과 과학의 개념, 과정, 기능, 태도 등이 학습자의 인지구조 속에서 어떻게 진행되고 조직이 되는지 관찰함으로써 통합을 설명할 수 있다는 것이다. 일반적으로 수학과 과학의 교육자들은 지식의 구성에 많은 관심을 가지는데, 이들은 지식은 의미 있게 구성된다고 본다 (Piaget 1970, Vygotsky 1978, Novak 1993). 이들이 선호하는 가설은 다음과 같다.

· 지식은 전에 이미 얻은 지식 위에서 만들어진다.

· 지식은 큰 아이디어, 개념, 주제를 중심으로 조직이 된다.

· 지식은 개념과 과정의 내적 관계를 포함한다.

· 지식은 장면과 밀접하게 관련이 되어 있

---

1) 이 논문은 1999~2000년도 강원대학교 기성회 교수해외 파견 연구지원에 의하여 연구되었음.

2) 강원대학교 사범대학 수학교육과 교수

으며, 사회적 교환을 통해 진일보해 진다.

· 지식은 사회적으로 구성이 된다.

이와 같은 가설은 구성주의자들의 견해이기도 하지만 최근에 수학·과학의 통합 작업에서 자주 인용된다. 이와 더불어 통합은 교사의 지도 측면에서도 적절하게 설명이 된다. 보통 지도라 함은 지도 전략, 교사의 역할, 학습 환경의 조직, 평가로 나누어지는데, 이들 모두가 과학·수학의 통합 속에서 각 역할을 상호 보완적으로 수행한다는 것이다. 실제로 물리와 수학을 지도 측면에서 보면 상호 보완적인 요소가 많다는 것을 느낄 수 있다. 물리와 수학을 통합하는 목적은 학습자로 하여금 세상을 보는 수학적(또는 물리적)인 지식과 마음을 얻기 위한 것이다 (Rutherford 1990). 때문에 광범위한 내용조직, 탐구 방법 및 토론 방법, 실험실 활동, 컴퓨터와 같은 현대 기술의 활용이 필요하다. 이는 수학의 발전과 물리적 세계의 발전을 별개로 보지 않는 경향과 일치한다. 특히 교실에서 지도 전략을 사용하는 면에서도 수학과 물리를 통합하는 것이 바람직하다. 이를 이해하기 위해서는 최근의 인지 연구의 결과를 주목할 필요가 있다. 이를테면, 수학의 초기 학습은 재미있는 자연현상 또는 실세계의 장면에서 이루어지고, 수학의 내적 발전이 있는 다음에는 자연스럽게 이것은 실세계의 문제로 응용이 된다는 것이다. 따라서, 교실에서 일어나는 학습자의 행위는 활동(doing), 해석, 반영 등이 주가 되어야 하고, 이러한 환경 속에서만이 학습자가 수학·과학의 힘을 경험한다는 것이다.

(2) 지식 획득 과정

과학은 환경과 인간 속에서 관찰과 현상의 조작을 통하여 새로운 지식을 얻어가며, 일관성 있고 증명 가능한 패턴을 탐구하여 지식의 체계를 만들어 간다. 물론, 이러한 지식의 체계는 실제 세계를 설명하는데 사용된다. 이와 같은 지식의 획득 방법을 귀납적 (induction)이라 한다. 한편, 수학은 패턴과 관계에서 어떤 모델을 찾아가는데 꼭 관찰 가능한 실세계만을 대상으로 하지 않을뿐더러 패턴과 관계를 표현하는데 독특한 기호와 논리를 사용한다. 우리는 이 두 가지 기능-귀납과 연역-으로 수학·과학의 통합과정에서 학습자가 지식을 얻는 과정이 어떻게 이루어지는 지를 설명할 수 있다. 다시 말하면 자연현상 또는 실세계라는 환경에서 관찰을 통해 데이터를 얻는 데, 여기서 얻은 패턴과 관계는 양적 의미를 가진다. 수학은 이를 기호, 그래픽, 기하, 함수라는 도구를 이용하여 모델을 만들고, 이 모델들을 연역적인 방법으로 수학의 내적 조직(정리, 공식 등)에 까지 가게한다. 또, 이들은 이후 아직 관찰되지 않은 실세계의 원리를 규명하는데 활용된다. 수학·과학의 통합교육과정에서는 이러한 지식의 획득과정이 자연스럽게 학습에 활용될 수 있다. 이때, 학습자의 사고기술이 매우 중요시되는데 대표적인 사고기술로 과학의 탐구기술, 수학의 추론 등을 들 수 있으며 두 교과에서 사용하는 여러 사고기술이 종합적으로 활용된다는 점이 특징이다.(Tobin 1980 ; Padilla 1986 ; NCTM 1980, 1989)

(3) 개념적 지식의 중복성

지금까지의 수학·과학의 통합작업은 개념적 지식의 중복에 크게 의존해 왔다고 볼 수 있다. 최근의 개념적 지식의 중복을 연구하는 자료(NCTM 1989 ; Rutherford 1980 ; NRC 1993)에 의하면 과학과 수학에서 공통으로 이용할 수 있는 개념으로 측정, 규칙성과 관계, 확률과 통계, 공간 관계, 변수와 함수를 들고 있다. 실제로 우리가 통합과정을 설계할 때는 이 중복성을 가장 중요시하는 경향이 있다(Penafiel 1989 ; White 1989). 이 글에서는 통합교육과정의 교수 요목을 설계하는데, 그 연구의 중점을 두었기 때문에 위에서 기술한 관점 중에서 지식의 중복성과 지식획득과정을 매우 중요시했고, 학습과 교

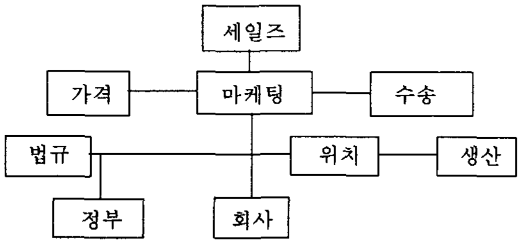
수 부분은 크게 약화시켰다. 왜냐하면, 후자의 관점은 교과서와 같은 교재개발과 수업모델을 설정하는데 적극적으로 수용할 수 있는 성질이기 때문이다.

2. 통합교육과정의 수준

통합교육과정에도 어떻게 통합을 설계하느냐에 따라 통합의 깊이와 넓이를 고려한 수준을 정할 수 있다. 유의할 점은 수준은 절대적인 관점이 아니고 이 글에 알맞게 정해진 개념이라는 점이다.

(1) 수준을 결정하는 요인

수학과 물리를 통합하는 일은 학생들의 다양한 경험을 서로 관련시키는 것이므로 통합수준을 결정해야한다. 다시 말하면, 통합수준은 학생들의 개념 발달과 이해의 깊이를 고려한 개념대응(concept mapping)을 고려해야 한다는 점이다. 이런 점에 대하여 Karplus는 SCIS연구에서 개념 발달단계를 3단계로 구분하였다. 그의 주장에 의하면 개념발달의 첫 번째 단계는 학습자가 질문을 만들고 잠정적인 대답을 구상하는 활동으로 들어가는 탐구이며, 두번째 단계는 학습자의 지도아래 앞 단계에서 구상한 질문에 옳은 대답을 하기 위한 개념과 원리를 창안한다. 마지막 단계는 학습자가 획득한 개념 원리 모델을 새로운 상황에 활용하는 것이다. 이 모델은 피아제의 3단계 학습 사이클과 유사하며, 카플러스의 2단계를 피아제는 개념발전으로 표현하였다. 두 사람의 모델에서 응용단계는 학습자가 모델의 응용에서 새로운 정보를 얻어 다시 탐구의 필요성을 느끼게 된다. 이런 의미에서 위의 개념 발달의 3단계는 순환형식을 띤다. 또 이 과정에서 개념대응도가 매우 중요한 역할을 한다. 그림은 개념대응을 설명하는 하나의 표본에 불과하지만 학습자의 개념발달의 단계에서 필요한 학습요소, 표현방법 및 그들 사이의 관계를 분석한 수형도를 생각할 수 있다.



개념대응도 (Simon & Schuster)

이 개념 대응도의 특징은 개념들간의 연결을 선으로 표현했으며 포괄적인 개념체계를 만들고 있어 학습자로 하여금 그의 생각을 조직하고 표현하는데 또는 새로운 지식을 과거의 경험과 연결하는데 어떤 도움을 준다 (Carin 1993 ; Novak 1984,1990). 또, 수준을 결정하는 다른 요인으로 학습의 활동을 들 수 있다. 부르너(1985)는 Vygotskian의 관점에서 학습의 행동을 3가지의 역동적인 과정으로 표현했다. 간단히 말하면 새로운 지식을 획득하고, 이것을 새로운 과제 또는 상황에 조작하며, 이러한 획득과 조작을 평가하는 3단계로 구분이 되는데 이 과정은 학습자에게 좀더 일찍 그의 아이디어와 생각하는 방법을 경험시키게 하느냐는 것이다. 따라서, 교육과정도 사회가 중요하다고 생각하는 가치, 개념적인 쉐임, 기능을 중심으로 만들어져야 하며 교실에서도 학습자의 지적 발달단계, 사고의 형태, 이해의 깊이를 중시하는 방법으로 구성되어야 한다고 보고 있다.

이 글에서 제시하는 수학·물리 통합과정(IMP프로그램)도 부르너의 학습의 행동과 비고우츠키의 사회적 교환(social interaction)을 강조한 학습을 중요시 한다.

(2) 수준의 결정

통합수준을 결정하는 절대적인 잣대가 없기 때문에 이 글에서는 필자의 관점에 의하여 수준을 4가지로 구분하였다.

수준1은 현행 학교에서 실시하고있는 수학·물리 교육과정에서 조금 발달된 프로그램이며, 수학을 실세계를 배경으로 한 도입, 개념의 획득, 개념의 활용으로 구분하여 교재 개발을 하고, 앞의 두 단계에서는 수학을 강조하고, 마지막 단계인 개념의 활용에서 물리적 소재를 이용한 문제해결을 강조하는 수준이다. 한 예를 들면, 개념의 활용에서 다음의 소재가 올 수 있다.

지구 표면과 가까운 공중에서는 시간당 소리의 속력 v(㎞)는 대략 온도 T(℃)와 관련이 있으며, T에 대한 v의 공식은 $v=72\sqrt{T+273}$이다. 어느 더운 여름에 공중 기온이 45℃였다면, 소리의 속도는 얼마인가?

이 수준에 해당하는 프로그램의 장점은 계통성, 논리성 등 수학이 특징을 극대화하면서 이를 활용한 실세계의 문제해결을 응용면에서 강조한다는 점이다.

이러한 점 때문에 교수 계획을 짤 때 교사의 주도적인 역할을 강조되고, 현재의 교실환경에서도 쉽게 이를 도입할 수 있다는 장점이 있다.

수준2는 앞의 수준과 위계가 거의 없는 수평적인 위치에 놓을 수 있는 것으로 물리적인 개념을 Karplus 방식으로 전개해 주고 응용에서 수학의 관련 내용을 이용한 문제해결을 강조한다. 한 예를 들면, 다음과 같이 스프링에 의한 힘을 1, 2단계에서 기술해 주고 3단계에서 수학의 모델링, 측정과 함수에 스프링에 의한 힘을 활용하는 것이요. 즉,

(1) 3가지 기능인 측정, 데이터 기록, 그래프 그리기 훈련

(2) 스프링, 불럭, 자 등을 이용하여 무게에 따라 스프링이 늘어나는 길이를 기록

(3) 표와 그래프 그리기

(4) 무게와 스프링이 늘어난 길이의 관계식을 도입

(5) 측정, 함수, 수학의 모델링에 대한 문제해결

에 관련된 문제해결을 강조한다. 이 수준에 알맞은 교수 학습의 계획은 앞의 수준과 비슷하나 크게 다른 점으로서 물리의 개념, 기능, 모델이 강조되면서 수학의 문제해결이 들어가 수학의 장점이 물리 내용을 크게 보충해 준다는 점이다. 이때, 수학의 계통성과 논리성, 엄밀성 등은 크게 약화가 된다. 위의 수준 1,2에 기반을 둔 프로그램의 특징은 수학 또는 물리의 각 프로그램이 독립적으로 운영이 되면서 다른 교과로 인하여 크게 보충을 받고, 내용 전개도 토픽위주의 방식을 가진다는 점이다.

수준3은 통합교육과정의 설계에서 주제(thmes) 중심의 교수 요목의 설정, 교수 학습의 계획 및 평가는 물론이고, 학생참여 방법과 교사의 역할 등에서 앞의 두 수준과 크게 구분이 된다. 먼저 교수 요목의 설정에서는 토픽중심이 아닌 주제 중심이기 때문에 교사의 교재개발, 학생의 수업 참여 등에서 적극적이고 능동적인 활동을 요한다. 한 예를 들면, 주제 "인구, 자원, 환경" 아래 다음의 내용이 들어온다.

(1) 모델 지역을 설정하여 그 지역의 자원 상태(석탄, 석유 등)를 조사하고

(2) 한 학급을 4개의 집단으로 나누어 그 지역의 인구증가율을 집단마다 다르게 설정하여 인구증가를 예상하며(수학적 모델 사용)

(3) 각 집단마다 자원의 감소상태를 조사하며(표, 그래프 활용)

(4) 각 집단별로 사회적 영향을 토론한다.

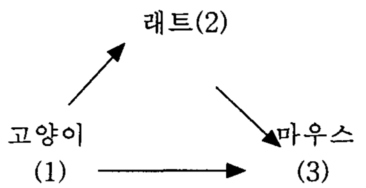
이 수준에서 교사의 역할은 앞의 수준들과 비교해서 보면 큰 변화를 가져오는데, 먼저 팀 티칭 방식이 바람직하나 한 교사가 수학과 무리 내용을 잘 이해한다면 한 사람이 수업을 이끌어나가는 것도 좋다.

수준4 앞의 수준3과 비슷하나 교수 요목의 설정이 크게 다르다. 수학·물리의 통합

이 모델링의 관점에서 이루어지는데 수학에서 모델링을 연습하고 물리내용의 지도에서 이를 활용하여 모든 학습활동이 문제해결을 중심으로 이루어진다. 한 예로 앞부분의 수학적 모델링을 소개해보자.

문제상황의 기술 : 어느 지역에 우기가 계속되면서 곤충의 수가 급격히 증가한다. 이로 인하여 자연 생태계가 위협을 받기 시작하자, 정부에서는 곤충의 수를 크게 줄이는 계획을 짜고 있다. 환경 전문가인 너는 이 계획을 생태계에 얼마나 큰 영향을 주는가 판단해야한다.

모델: 행렬과 방향이 있는 그래프를 이용한다.



$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

위의 행렬의 성분 (i,j)는

$$(i,j)=\begin{cases}1, & i\text{가 } j\text{를 먹고 산다.} \\ 0, & \text{그외}\end{cases}$$

이 때, 행렬 F를 생각하고, F^2도 계산해 본다.

실전문제 : 어느 지역의 먹이사슬을 조사해 보고, 이를 행렬로 나타내면서 먹이사슬과 환경의 영향을 조사해 본다.

이 수준에 알맞은 통합과정을 운영하기 위해서는 교사의 모델링에 관한 지식과 이를 수업에 활용할 수 있는 수업능력이 필요하다.

이 연구의 IMP프로그램은 수준4를 강조하고 있으며 프로그램은 크게 두 부분으로 나누어진다. 첫 번째의 과정에서는 간단히 물리적 상황이 주어진 실세계의 상황을 소재로 수학적 모델을 이용하는 모델링 과정이 소개되고, 두 번째 과정에서는 물리적 모델을 이용한 문제해결이 들어오는데, 여기에서는 수학적 공식, 정리, 계산 등이 꼭 활용되도록 한다.

3. IMP프로그램의 구조

이 프로그램의 특징은 교수 요목이 실세계의 문제해결의 상황으로 기술된다는 점이다. 한 예를 들면,

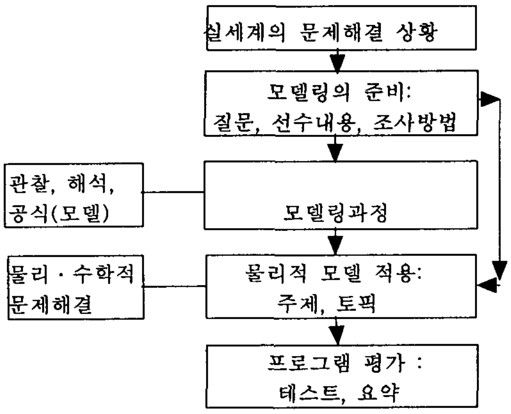
뜨거운 커피가 컵에 담겨 있을 때, 커피의 온도는 시간 t에 따라 변한다. 시간 t에 따라 변하는 커피의 온도 T를 구하여라.

문제상황은 종전의 토픽 위주의 교수 요목의 진술과 큰 차이를 보인다. 이는 모델링이 학습의 소재이면서 활동이 되기 때문이다. 위의 상황은 뉴톤의 냉각 법칙과 미분을 이용하여

$$\frac{dT}{dt}=k(T-T_M), \quad T_M : \text{온도상수},$$

$$k\text{는 상수} \therefore T=T_M+Ce^{kt}$$

으로 연결이 된다. 이와 같이, 프로그램의 전반부는 실세계의 문제해결의 상황을 주제로 설정하여 모델링을 강조하는 프로그램이 주가 되고, 후반부는 물리적 모델을 이용한 문제해결이 주가 된다. 프로그램의 짜임은 그림과 같다.



여기서 실세계의 문제해결 상황은 수학적인 모델이 적용 가능한 상황이어야 하며, 상황설정 이후에 모델링 과정으로 들어가기 전에 준비를 거친다. 준비에서는 선수학습인 수학적 모델(정리, 공식 등)을 연습하거나 조사 방법 또는 탐구 방법을 교사가 학생들에게 전달한다. 이때, 학습 형태는 협력 학습이며 교사와 학생간의 사회적 상호관계를 중요시한다. 필요하면 비디오 같은 영상자료를 이용하여 질문의 구성 방법과 조사 방법을 구체적으로 학습한다. 모델링 과정은 많은 창의적인 활동이 필요하며 중심이 되는 활동으로 관찰, 해석, 조사를 들 수 있다. 이 활동을 이용하여 학습자는 실세계의 문제해결의 상황을 수학적 모델을 만들어 가는 "전략적 방법"을 연습한다. 이후 모델은 학습자가 실세계에서 찾은 문제에 활용되어, 그 결과를 서로 토론한다. 후반부에서는 물리적 모델의 적용이 학습자에게는 새로운 도전이고, 연습한 모델링의 기법과 수학적 모델을 물리적 해결에 이용한다. 그러나, 후반부에서는 전반부와 같은 모델링 과정은 꼭 권장하지는 않으며, 응용문제의 해결을 생각하는 것도 좋은 학습이 된다.

4. 모델링 코스의 설계

모델링은 컴퓨터가 발달되기 전에는 비용 문제 때문에 소규모의 실험을 거쳐 문제를 해결하는데 이용되었다. 그러나 소프트웨어가 급격하게 발전됨에 따라 적은 비용으로 산업사회에서 일어나는 어떤 문제를 모델링을 이용하여 해결할 수 있게 되었다. 이에 대한 시대적 요구가 많아짐에 따라 PolyModel과 같은 연구단체가 생기고, 중등학교에서도 모델링 코스를 개설하여 학생들이 직장에서 부딪히는 실제적 문제를 풀게했다(O'carrol 1979 ; Hudson 1982). 이 글에서 논의하는 모델링은 다음과 같이 정의된다.

수학적 모델은 자연세계의 상황을 수학적으로 설명하는(또는 근사시키는) 수학구조를 말하며, 수학적 모델을 만드는 과정을 수학적 모델링이라 한다.

보통 모델링에서 자주 언급하는 수학 구조는 그래프, 방정식과 부등식, 방향그래프, 알고리즘을 말하며, 부르너 관점의 구조와는 약간 구분할 필요가 있다. 이 정의를 해석해 보면 몇 가지 사실을 알 수 있다.

(1) 자연 현상을 관찰하여 문제를 만들고 (여기서 변수를 확인함)

(2) 여러 요인들 사이의 관계를 추측하고 해석하여 모델을 얻고,

(3) 적당한 수학적 분석 방법을 이 모델에 적용하고,

(4) 이렇게 얻은 결과를 처음의 문제 상황에 반영시킨 다음에 최종 결론을 얻는다.

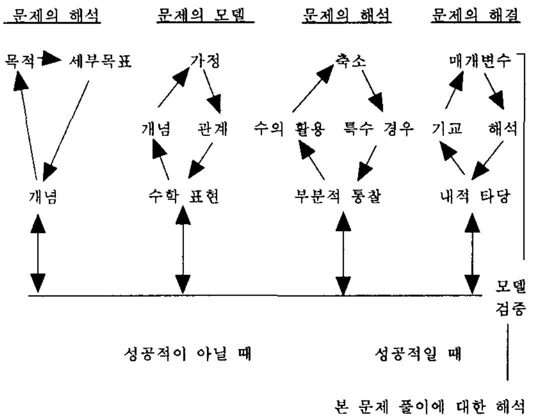
이러한 4개의 단계를 설명하기 위하여 어떤 상황을 제시하여 보자(Swetz 1991)

어떤 공장에서 1년에 10만개의 자동차 부속품을 생산해야 하는데 비용을 최소로 하는 최적화 일정을 생각하고 있다. 그런데, 총비용은 생산라인 비용(한 라인의 건설에 50만원), 부속품 생산비용(낱개 당 5천 원), 낱개 당 보관 비용(낱개 천원)들의 합으로 나타낸다.

교실에서 위의 상황에 몇 가지 가정을 더 붙이면 한 라인에서 생산되는 부속품의 개수 L에 대한 총비용(C(L))을 구하고, L의 값을 (0 < (L의 값) ≤ 100,000) 여러 가지로 주면서 최소가 되는 C(L)의 값을 추정할 수가 있다. 후에 이 문제는 미분을 도입하여 L의

값에 대한 총비용이 최소가 되는 L의 값을 구할 수 있다.

이러한 모델링은 폭 넓은 응용력을 가지고 있어 생물, 제약, 화학, 경제 등에 활용되어 왔다. Berry(1984)는 모델링의 과정을 다음과 같이 기술했다.



위의 과정은 모델링의 개념을 한눈에 볼 수 있도록 도표로 제시했는데, 각 단계 내에는 여러 하위 단계가 순환적으로 연결되어 있다. 이 순환은 출발과 끝이 정해져 있지 않고 서로 유기적으로 연결되어있다. 일반적으로 왼쪽에서 오른쪽으로 진행이 되는데 진행하고있는 단계를 충분히 이해한 후에 다음 단계로 갈 수 있다. 또, 단계의 흐름에서 겹화살은 모델의 다음 단계에서 필요하면 전단계로 다시 돌아가 재해석하고, 재정의할 수 있다는 뜻이다. 이렇게 하여 모델의 해결단계가 만들어졌으면 즉시 모델의 검증으로 들어가 성공적인 모델에 한하여 원래 풀고자 했던 문제에 이 해결을 해석한다. 그런데 모델이 활용되는 자연세계의 현상이 속도와 가속도, 질량, 중력, 온도, 방사능 감소, 필드이론, 역학 등과 같이 물리적 현상이 포함된다. 이 점이 모델링을 물리 교육에 적용하는 이유가 될 수 있다. 또, 다른 편에서는 모델링과 문제해결의 관계를 어떤 시각으로 볼 것인가에 대하여 논의가 있었다. 많은 연구자들은 두 가지 개념을 비슷하게 보아 문제해결의 범주 내에 모델링을 포함시켰다. 문제해결을 논할 때는 문제 설정과 해결 과정이 중요하며, 이 해결과정은 4단계 이해, 계획, 실행, 반성으로 설명된다. 모델링도 이러한 속성을 가지고 있으나, 문제해결과 확연히 구분되는 면을 가지고 있다. 즉, 모델링에서는 컨텍스로 수학문제가 아닌 상황이 주어지고 이를 모델로 만들어야 한다. 한 예로, 투표결과를 예측하는 정치적 상황, 경제적 상황, 석유가격을 장기적으로 예측하는 에너지 상황, 산림의 파괴속도를 예측하는 생태학적인 상황 등을 들 수 있다. 모델링에서는 이러한 상황이 문제로 변형이 되어야하고 문제 속에 있는 여러 요인들 사이에서 어떤 관계를 이끌어내야 한다. 뿐만 아니라, 이 관계는 수학적으로 해석이 가능해야 하며 이 해석이 원래 문제와 연결이 도어 검증을 받을 수 있어야 한다. 이와 같이, 모델링은 여러 기능과 사고를 통합하는 조직적인 과정을 내포하고 있으며 분석, 번역, 종합과 같은 높은 인지 활동을 가진다.

5. 통합의 교수 요목 설정

통합 교육과정의 교수 요목은 두 부분으로 나누어진다. 앞부분은 모델링 코스로 쉬운 물리적 이론이 적용되는 실세계의 상황에서 수학적 모델을 구성하는 모델링 과정으로 되어있고, 뒤부분은 물리적 문제로 구성이 되어있으며 수학적 모델과 물리적 모델을 이용하여 문제를 해결하도록 했다. 여기서 물리적 모델은 다음과 같은 상황을 의미한다.

<u>물리적 상황</u>

길이가 4m이고 무게가 200 뉴톤인 균일한 사다리가 수직 벽에 비스듬히 기대어 있다. 그리고 그곳의 한쪽 끝은 지면에 60° 의 각도로 유지한다. 사다리의 꼭대기가 벽에 지탱할 수 있는 노말컨택트(nomal contact) 힘의 크기를 구하여라

모델

S뉴톤과 R뉴톤을 사다리와 벽, 사다리와 땅바닥 사이의 노말컨택트 힘이라 하자. 그러면, 벽에서 후릭션힘(friction)이 0이고 바닥에서 F뉴톤이다. 그리고, 사다리는 균일한 막대이고 평행상태에 있다고 가정하자.

따라서, 물리적 모델링은 주어진 물리적 상황에서 모델을 설정하고, 상황을 분석하여 필요한 수학적 모델을 찾아 결과(해)를 얻어, 이 결과가 처음 물리적 상황에 타당한 지를 해석하는 과정으로 볼 수 있다. 이렇게 보면, 전반부와 후반부가 모델링이라는 과정을 도입했다고 볼 수 있으며, 두 부분이 유기적으로 관련이 되어 통합코스를 구성한다고 본다.

한 가지 주의할 점은 이 코스의 교수 요목이 모두 문제 중심으로 되어있어 개념적인 전개방식이 아닌 문제해결을 강조한 점이다.

(1) 수학적 모델링 코스의 교수 요목

여기서는 수학적 모델을 얻을 수 있는 실세계 상황이 교수 요목으로 소개된다. 따라서, 수학적인 기법을 매우 중요시하며, 여기서 얻은 모델링의 능력은 후반부에 물리적 모델링을 이끌어 가는 힘이 된다.

A. 여행한 거리 계산

실세계 상황 : 민수는 속도계가 달린 자전거를 타고 시골길을 자주 여행한다. 몇 시간을 달리다보면 몇㎞를 달렸을까? 하는 의문이 생긴다. 궁금증을 해결하기 위하여 형에게 물어보니, 형은 달린 시간과 그 때의 속도를 알면 그래프를 그릴 수 있고, 그 그래프에서 달린 거리를 알 수 있다고 한다. 민수는 다음 토요일에 실험을 하여 자료를 모으기로 했다.

구하려는 모델 : 실험한 자료를 이용하여 달린 시간과 그 때의 속도를 기록하여 표를 만들고 이 표로 그래프를 그린다. 이 그래프에서 (거리) = (시간)×(속도)를 계산한다.

활용 : 이 문제에서 가속도를 구하는 활동을 한다.

B. 도로 신호들의 조절

실세계상황 : 우리는 도심 교차로에서 신호등이 설치되어 있는 광경을 자주 본다. 여기서 노란 불은 차량의 안전과 파란불의 시간을 잘 조절하여 차량의 원활한 소통을 보장해 준다. 뿐만 아니라 공해의 감소도 가져다주는 효과도 있다. 어떻게 노란불의 시간을 조절할 것인가? 하는 문제를 교차로 통과거리 24m, 교차로 지역의 속도45km/h를 실제 상황으로 하여 조사한다.

구하려는 모델 : 물리에서 이용한 공식 중에서 거리 x, 가속도 a, 속도 v, 시간 t, 초기속도 v_0에 대하여

$$x = v_0 + \frac{at^2}{2}, \quad v^2 = v_0{}^2 = 2ax$$

를 이용하며, 차량의 정지거리를 정의함으로써 노란 불이 진행해야할 최소시간을 산출한다.

활용 : 상황을 변경시켜 여러 데이터를 준다(예, 차량의 진행 속도, 다른 차량이 뒤에 있는 경우 등). 실제 도심지역의 관찰도 좋은 소재가 된다.

C. 여러 잔 속에 있는 커피 온도와 시간의 관계

실세계상황 : 집에는 여러 종류의 잔(세라믹, 프라스틱, 종이 등)이 있다. 뜨거운 커피를 잔에 부으면 외부 온도에 대한 잔 속의 커피 온도는 뉴톤 냉각 법칙에 따른다. 그러나 컵의 소재에 따라 커피 온도 T와 시간 t 사이에는 어떤 규칙이 존재하는지 흥미잇는 과제가 된다.

구하려는 모델 : 상수 k, T_M에 대해 다음 식이 성립하고, 이때 $T = T_M + Ce^{kt}$이다.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_M)$$

활용 : 여러 종류의 컵에 뜨거운 커피를 붇고 지나는 시간 t(초기 t=0)와 T사이의 관계를 표와 그래프로 나타내어 본다.

D. 강화도 대포의 포신각과 사정 거리

실세계상황 : 조선 말기 외국의 함대와 조선군이 충돌할 때 아군의 포는 정확성은 떨어졌지만 막강한 화력을 가졌다. 그런데 포신에서 포탄이 날아갈 때 화약의 양도 관련이 되지만 포신의 각도가 포탄의 날아간 거리에 중요한 역할을 한다. 각도와 거리 관계는 무엇일까?

구하려는 모델 : 몇 가지 물리모델(예, 길릴레이의 공중에서 물체의 온도)을 이용하여 각도와 거리 관계를 나타내는 규칙을 찾는다. 이때 여러 변수가 이용이 되는데 라디안 R(A/57.2958), 수직 벡타 크기 v=M× sin(R)-32.2T, M은 물체 속도, 총시간 TF=2 ×(M×sinR)/32.2, 수평 벡타 크기 H=M× cos(R), 포탄이 날아간 거리 D=H×TF를 구한다.

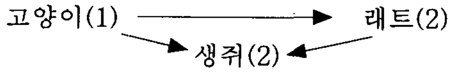
활용 : 각도를 얻게 한 거리의 계산

E. 강원도 산림지역의 먹이 사슬 변형

실세계상황 : 장마철이 계속 되면서 민가 옆에 있는 산림 지역에 곤충의 수가 급격하게 증가하였다. 때문에 사람과 동물들이 생활에 불편을 느끼고, 생태계가 혼란스러워지자 자치단체에서는 곤충을 멸종시키려는 계획을 발표했다. 환경전문가인 여러분은 이 계획을 반대(또는 찬성)할 적절한 보고서를 제출해야 한다.

구하려는 모델 : 동물 또는 곤충들 사이에 방향그래프를 정하여 다음과 같은 규칙에 의하여 행렬을 정의한다.

$$\text{포지션 } (i, j) = \begin{cases} 1, & i\text{는 } j\text{를 먹음} \\ 0, & \text{기타} \end{cases}$$



$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

활용 : 구한 행렬 F에서 F^2를 구하고, 어느 지역을 대상으로 먹이 네트워크를 구한 다음에 곤충을 죽일 경우 대재앙을 예측한다.

F. 김포 매립지의 쓰레기 양 결정

실세계 상황 : 곧 임대가 끝나는 쓰레기 매립지의 구입을 위해 시에서 하루 배출하는 쓰레기 양을 결정하려한다. 쓰레기 양이 추측이 되면 지역 주민과 타협하여 적절한 매립지를 선정하는 방대한 절차에 들어간다.

구하려는 모델 : 시의 통계연감에는 과거 쓰레기 배출량이 기록이 되어 있다. 이 자료를 그래프(x축 : 연도, y축 : 쓰레기 양)에 그리고 $y = ax + b$ 형태를 결정한다.

년도	일일 배출량(톤)
1985	453
1990	506.9
1995	598.8
2000	755

활용 : 컴퓨터 프로그램을 통해 $y = a + bx^2$ 형태를 구하고, 두 모델을 비교한다.

G. 번화가 주차장 설치

실세계 상황 : 부산시에서는 도심에 주차장이 없어 민원이 자주 오자 차 한 대에 해당하는 2.5m×3.5m 크기의 여러 주차장을 설치하기로 했다. 문제는 주어진 공간에 가능한 많은 차를 주차시키는데 있으며, 이를 위해 평형 주차 또는 각도 주차를 결정해야 한다. 이때, 4차선 도로에서 원활한 차의 소통도 고려해야 한다.

구하려는 모델 : 실험적으로 길이 160m 인 4차선 도로(한 방향 2차선)에서 두 가지 주차장 설치 방법을 계산한다. 하나는 평형 주차장의 설치에서 주차장의 개수이고 다른 하나는 각도 주차장의 설치에서 각 ϕ의 값에 따른 도로변에 차지하는 길이 c와 도로 변에 수직으로 선을 내릴 때 주차장의 길이 끝까

지의 거리 d를 계산한다. 이때, 두 경우에서 얻은 주차장의 개수를 비교한다.

활용 : 실제 도심지 도로에서 주차장을 설계한다.

H. 한라산 야생사슴의 관리

실세계 상황 : 야생사슴은 자연을 한층 아름답게 하지만 그 개체수가 많으면 먹이의 부족으로 큰 혼란이 일어나고, 농작물의 극심한 피해를 가져오기 때문에 공원 관리소에서는 번식하는 개체수를 예측하여 사냥시즌을 마련해야 한다. 개체수를 예측해야하는 일은 직원들의 고민이다.

구하려는 모델 : 이 지역의 현재 사슴의 개체수는 다음과 같다.

어른 수컷 1707마리 수컷 아기사슴 2058마리
어른 암컷 3714마리 암컷 아기사슴 1920마리

여기서, 아기 사슴은 2살이 되면 어른으로 변한다. 공원 관리소는 오랜 경험에 의해 그들의 생존 법칙을 알았다.

(1) 약 150마리의 아기 사슴이 매년 100마리의 어른 암컷에서 태어난다.

(2) 매년 태어나는 모든 아기사슴 중에서 55%는 1년동안 생존하고, 다시 생존한 그들의 60%는 2살까지 생존한다.

(3) 어른 사슴의 생존률은 90%이다.

여기서 매년 살아남는 사슴의 수를 정하는 계산 모델을 만든다.

활용 : 규칙을 좀더 복잡하게 만든다.

I. 은행의 투자액 관리

실세계 상황 : 1000만원을 어느 은행의 프로그램에 맞길 것인가를 선택해야한다.

구하려는 모델 : 복리 계산을 각 은행에서 가져온 자료를 통하여 한다.

J. 정부 예산을 계획하기 위한 인구 추정

실세계 상황 : 정부 예산을 계획하는데 인구 추정은 가장 중요한 요인이며, 이들 자료를 통하여 학교, 병원, 교통 및 공공 서비스 분야를 위한 정확한 예산을 예측할 수 있다. 가능한 정확한 인구 예측을 어떻게 해야 할까?

구하려는 모델 : 여러 나라의 인구 증가에 관한 자료를 인터넷으로 받아 기존의 예측 방법을 동원하여 예상치를 구한다.

(1) 다년간의 년 인구를 조사하여 선형 모델을 정한다.

(2) Malthus(1798)가 예측한 공식

$$P_y = P_0(1+R)^t$$

를 이용하며, Verhulst의 모델로 활용한다. t는 y년까지의 해수, P_y는 y년의 예상인구수, P_0는 초기 인구, R는 년인구 증가율이다.

K. 대단위 채소밭에 물 뿌리기

실세계 상황 : 채소밭에 물을 주는데, 스프링 쿨러를 이용한다 해보자. 이것은 긴 물 파이프에 일정한 간격으로 물 뿌리개가 설치되어 반경 6m의 원 모양으로 물을 뿌려준다. 여러분은 300m×600m의 직사각형 모양의 밭에 물을 최대한 골고루 뿌리기 위하여 쿨러의 물 뿌리개를 어디에 설치해야 하는지를 결정해야 한다.

구하려는 모델 : 좌표에 원의 방정식을 만들고 x축의 x값을 통과하는 y의 값이 어느 지점에서 같게 함수 C(x)의 그래프를 이용하여 $C_{최대} - C_{최소}$의 값이 가장 적은 지점을 계산에 의해 정한다.

L. 식품 배달부의 여행

실세계 상황 : 도시의 큰 대로 옆에 비슷한 크기의 집들이 붙어있고, 배달부가 양쪽 집을 모두 한번씩 들려 배달하는 광경을 상상한다. 배달부는 한쪽을 모두 거치고 길을 건너 다른 쪽의 집들을 들려 원래 위치로 오든가 또는 지그재그로 양쪽 집을 들려 원래 위치로 오는 문제를 결정해야 한다.

구하려는 모델 : n개의 집이 양쪽에 각각 있고, 식품을 놓는 위치는 각 집의 중앙에

위치한다고 할 때, 방정식과 부등식을 이용한 계산 모델을 정한다.

활용 : 식품을 놓는 위치가 집의 중앙에 위치해 있지 않은 상황을 생각한다.

M. 신문지 용지의 길이 계산

실세계 상황 : 신문 또는 출판사에서 인쇄 직전에 사용하는 종이 마름, 제조업체에서 사용하는 강철 마름 또는 프라스틱 마름 등은 원통 모양으로 운반된다. 이때, 이들을 모두 펼치지 않고 길이를 안다는 것은 생활 속에서 발견할 수 있는 큰 지혜이다.

구하려는 모델 : 마름의 바깥 원의 반지름의 길이가 5.75인치, 안쪽 원의 반지름의 길이가 1.75인치, 종이 두께가 0.003인치이면 펼쳤을 때 총 길이에 해당하는 L이 결정된다.

활용 : 일반화의 결과를 예측하도록 한다.

N. 선거의 의사결정 모델

실세계 상황 : 고등학교에서 각 학년을 대표하는 위원을 선출하고, 이를 통하여 학교의 의사결정을 한다. 이때, 표와 같이 의원의 수를 정할 때, 3학년 학생들이 의사결정 과정에서 가장 강력한 힘을 발휘한다고 보는가? 실제 계산해 보면 그리 쉽게 예라고 대답할 수 없다.

	3학년	2학년	1학년
위원수	4	3	2

구하려는 모델 : 세기의 방법을 이용한 순열의 수를 결정하는 방식에 의하여 어느 집단이 가장 큰 영향력을 가지는지 수치로 계산할 수 있다.

활용 : 구체적 상황을 제시한다.

O. 시외 전화 사용료 계산

실세계 상황 : 경남 마산에서 경기도 일산에 시외 전화를 건 다음에 이의 요금 계산은 회사에서 정한 거리계산법, 단위거리에 대한 요금 산정법, 할인 요인이 생겼을 때 할인료 계산법 등 많은 근거 자료를 얻을 수 있다. 이를 이용하여 계산하는 모델을 정한다.

구하려는 모델 : 계산 모델을 정한다.

P. 효과적인 음악회 광고

실세계 상황 : 노천강당에서 록그룹 "하늬바람"의 콘서트를 주관하는 김씨는 홍보담당 이사이다. 회사에서는 그에게 라디오 및 TV에 광고를 내도록 2천만원을 주었다. 각 방송국에 알아보니 20초 라디오 1회 방송이 10만원, 30초 TV 1회 방송이 80만원이라고 한다. 회사에서는 적어도 라디오에서 30회 이상 60회 이하로 방송해 주기를 바라고, TV에서는 적어도 15번을 방송해 주기를 원한다. 주어진 예산 범위에서 방송 효과를 최대로 하려면 어떻게 계획해야 하는가?

구하려는 모델 : 최적화 문제를 풀기 위한 선형계획을 한다.

Q. 농사 대행 회사의 광고

실세계 상황 : A회사는 농촌의 벼농사를 대행해주는 회사인데, 겨울에 여러 지역을 방문하여 다음 연도의 농사 대행을 위하여 농가와 계약을 한다. 이때, 회사는 단위면적당 비용을 다음과 같이 광고한다.

· 100가구가 계약하면 한 가구 당 30만원

· 100가구가 넘게 계약하면 한 가구 당 할인요금은 2만원×(100가구를 넘는 가구수)

· 이 회사는 단위 면적 당 몇 가구를 계약할 때 1년 수익이 가장 큰가?

구하려는 모델 : 최적화 문제를 풀기 위한 계산 모델을 정한다.

R. 호수 속의 물고기의 수

실세계 상황 : 호수 속의 물고기는 너무 많아도 자연 생태계를 균형 있게 유지하는데 바람직하지 않다. 따라서, 적당한 개체수를 유지해야 하는데, 이를 위해서는 현제 호수

속에 몇 마리의 물고기가 있는지 조사해야 한다.

구하려는 모델 : 비례와 실험을 통한 자료를 이용하여 표를 만들고 계산한다.

S. 용기의 패킹 비용

실세계 상황 : 석유 화학 제품을 생산하는 회사에서는 밑면의 반지름이 1, 높이가 3인 원기둥 모양의 용기를 생산한다. 생산한 용기를 저장하는데 보관소의 비용을 알아보니 3종류가 있었다.

· 11×11×10(높이)의 저장소를 한 달 빌리는데 67000원

· 11×22×10(높이)의 저장소를 한 달 빌리는데 105000원

· 11×33×10(높이)의 저장소를 한 달 빌리는데 130000원

회사에서는 175개의 용기를 2달 동안 저장해야 한다. 최소 비용은 얼마인가?

구하려는 모델 : 저장하는 방법을 생각하여 비용을 계산하는 최적화 문제로 접근하여 계산 모델을 산정한다.

T. 마켙에서 계산대 설치

실세계 상황 : 아파트 단지 내에 작은 수퍼마켙을 운영하는 김씨는 두 개의 계산대에 점원을 배치하는 문제로 고민한다.

· 두개의 계산대에 각각 한사람의 계산점원을 둔다.

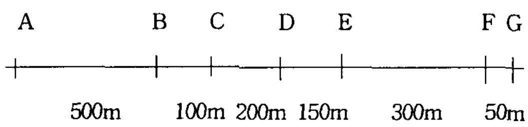
· 두개 중 하나만 운영하는데, 이 계산대에는 계산 점원과 서비스 점원을 둔다(총 2명).

전자의 경우는 한 계산대에 평균 서비스 시간이 고객 당 2분 소요되고, 후자의 경우는 고객 당 1분이 소요된다. 어느 방법이 고객에게 유리한가?

구하려는 모델 : 시뮬레이션의 방법을 이용한다.

U. 공장 시설의 위치 선정

실세계 상황 : 공장에서 기계를 포함한 장비와 생산품을 어디에 놓아야 물류비용을 최소화 할 수 있느냐는 경영자의 고민이다. 또, 공장을 지을 때 기계의 위치, 원료의 위치 및 시설물의 위치를 적절히 정하여 많은 경비를 절약하는 자주 볼 수 있다. 지금, 7명의 학생이 도로 변에 살고 있는데 그들이 학교 버스를 이용할 수 있는 정류장을 설치하려한다. 따라서 각 학생이 이곳에 걸어올 때, 그 거리의 합이 최소가 되는 지점을 찾아야 한다. 각 집의 위치는 그림과 같고 한집에 한 학생이 거주하는 것으로 한다.



구하려는 모델 : $\overline{AG}$의 중점을 M으로 했을 때 M과 각 집과의 거리의 합을 계산하고, 정류장을 A에서 짝수번째 해당하는 적절한 곳을 설정하여 그 지점과 각 집사이의 거리의 합을 구하고, 이를 그래프로 나타낸다.

위에서 나열한 주제들은 교수요목의 역할을 하며, 이것들의 지도 방법과 평가는 이 글에서 크게 논의하지 않는다. 그리고 각 주제 밑에는 여러 학습 활동이 들어가기 때문에 1시간에 한 주제를 해도 시간이 부족하다.

(2) 물리적 모델링 코스의 교수요목

앞에서는 간단한 물리적 이론이 이용되는 상황에서 수학적 모델링을 문제해결 방식으로 처리했으나, 여기서는 수학의 개념과 물리적 모델을 이용하는 모델링의 교수 요목을 소개한다.

A. 힘과 커플[3)]

활동ㄱ

3) 커플-Couples, 노말 컨텍트-nomal contact, 후릭션-friction, 리설턴트 커플-resultant couples, 작용하는 선-line of action

물리적 상황 : 균일한 길이 ℓm와 무게 200뉴톤인 사다리가 수직으로 있는 벽에 비스듬히 기대어 있다. 그것의 한쪽 끝은 지면에 60° 의 각도로 유지한다.

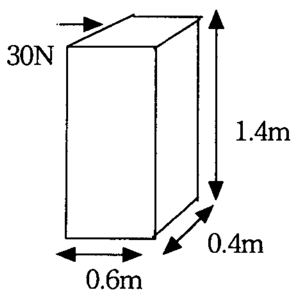
(1) 사다리의 꼭대기가 벽에 지탱할 수 있는 노말 컨텍트의 힘이 크기를 구하여라.

(2) 사다리가 땅에 접해 있는 부분과 지면 사이의 후릭션의 계수가 $\frac{1}{2}$이면, 700뉴톤의 무게를 가진 사람이 사다리가 미끄러지지 않는 상태에서 사다리를 올라갈 수 있는가?

수학적 개념 : 사인 함수에 코사인 함수, 부등식 계산 활동을 한다.

활동ㄴ

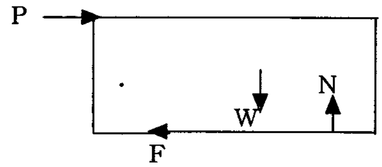
물리적 상황 : 그림과 같은 상자 모양의 무게는 300뉴톤이다. 30뉴톤의 힘이 그림에 있는 화살표 방향으로 작용할 때 노말 컨텍트의 힘이 작용하는 직선의 위치를 결정하여라. 단, 상자 모양은 정지된 평형상태이다.



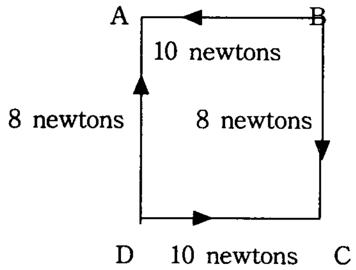
수학적 개념 : 벡타

활동ㄷ

물리적 상황 : 그림에서 크기가 같은 두 쌍의 힘이 있으며, 힘이 작용하는 방향은 서로 반대이다. 즉, 구체적으로 P와 H, W와 N을 들 수 있다. 이들 쌍을 커플이라 한다. 정지된 평형은 이들 쌍들 사이에 균형을 이루었음을 말한다. 각 쌍은 방향 전환의 효과는 있으나 합력은 없다.



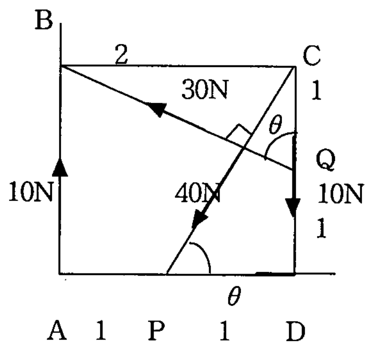
그림에서 직사각형ABCD의 변을 따라 어떤 힘이 작용한다. 이때, $\overline{AB}$ = 6m, $\overline{BC}$ = 10m일 때 리설턴트 커플의 크기와 방향을 말하여라.



수학적 개념 : 산술적인 계산을 한다.

활동ㄹ

물리적 상황 : 사각형 ABCD는 한 변이 2m인 정사각형이며, 점 P가 $\overline{AD}$의 중점이고 Q는 $\overline{CD}$의 중점이다. 크기가 10, 10, 30, 40 뉴톤인 힘들이 $\overline{AB}, \overline{CP}, \overline{QB}, \overline{CP}$를 따라 그림과 같은 순서로 작용할 때 합력과 그것이 작용하는 선의 위치를 정하여라.

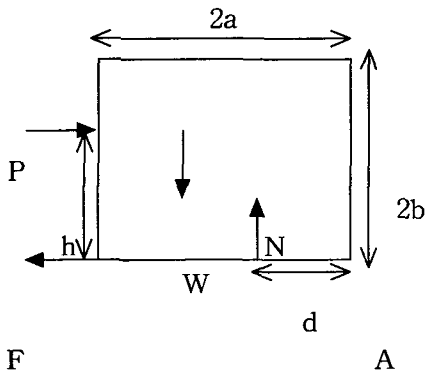


수학적 개념 : 벡타, 사인 및 코사인 함수

B. 흔들림과 미끄러움

활동ㄱ

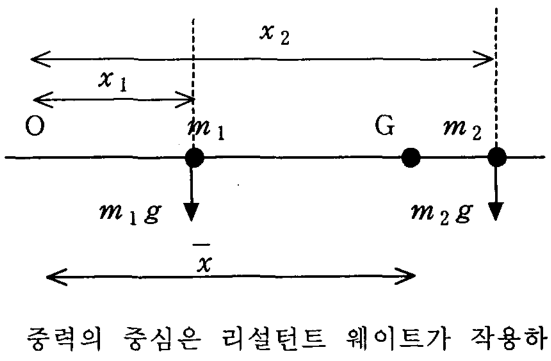
물리적 상황 : 그림과 같이 마루바닥에서 h높이에 있는 지점에서 수평적인 힘을 주어 케비넷을 밀고 있다. 만일 케비넷이 흔들리지 않고 미끄러진다면 케비넷과 마루바닥사이의 후릭션계수[4]와 h사이의 관계를 말하여라.



수학적 개념 : 방정식과 부등식

활동ㄴ

물리적 상황 : 질량이 각각 m_1, m_2인 두 개의 입자가 원점 O에 대하여 그림과 같이 놓여 있다고 하자.



중력의 중심은 리설턴트 웨이트가 작용하는 점이다. 이점을 G라하고 점 O로부터 거리 $\bar{x}$에 위치에 있다 하자. 이때, $\bar{x}$는 다음과 같은 식으로 나타낼 수 있다.

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

(1) 밑면의 반지름의 길이 acm, 높이 hcm인 원뿔의 질량의 중심이 위치 $\bar{x}$를 구하여라.

(2) 균일한 고체의 원뿔과 그 밑면에 붙어 있는 반구 모양의 입체가 있으며, 두 물체는 같은 자료로 만들어 졌다.

원뿔의 높이는 hm이고, 원뿔의 밑며놔 반구의 반지름의 길이가 모두 rm일 때 이 물체의 질량의 중심은 어디에 위치해 있는지 구하여라.

C. 회전과 에너지

활동ㄱ

물리적 상황 : 각의 속도가 W $rads^{-1}$로 고정된 축에 대하여 회전하는 물체의 회전적인 [5]운동에너지는

$$KE = \frac{1}{2}(\sum mr^2)w^2 = \frac{1}{2}IW^2(joules)$$

이때, $\sum mr^2$ 관성모멘트라 한다. 지금, 회전대가 45rpm의 각의 속도로 회전하고 있으며 회전축에 대한 그것의 관성모멘트가 0.2kgm²이라면 회전적인 운동에너지를 구하여라.

활동ㄴ

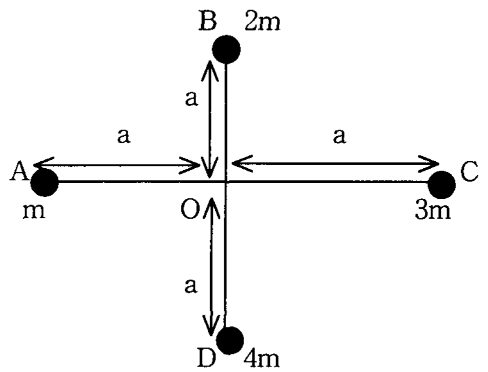
물리적 상황 : 위에서 $\sum mr^2$의 계산은 두 가지 방법으로 할 수 있다. 하나는 물체가 유한개의 입자로 만들어 졌다고 보고 각각을 합하는 방법이고, 다른 하나는 고체의 질량이 골고루 분포되어 있다고 보고 적분하는 방법이다. 지금 무시해도 될 만한 질량을 가진 각각의 길이가 2a인 두 개의 막대가 그

4) 후릭션 계수-Coefficient of friction, 리설턴트 웨이트-resultant weight

5) 운동에너지-Kinetic energy

림과 같이 중점 O에서 교차하고 있다. 입자 A, B, C, D의 질량이 m, 2m, 3m, 4mkg이고 이들은 막대의 끝점에 위치해 있다고 할 때, 다음의 경우에 이 물체의 [6]관성모멘트를 구하여라.

(1) 점 O를 지나 평면ABCD에 수직인 축에 대하여
(2) 직선 AB를 축으로 할 때 이축에 대하여
(3) 직선 AC를 축으로 할 때 이축에 대하여



활동ㄷ

물리적 상황 : 단위 길이에 대하여 ρkg의 질량을 가지고 있고 길이가 2a 미터인 균일한 막대의 관성 모멘트를 구하여라.

(1) 막대에 수직이고 중력의 중심을 지나는 축에 대하여
(2) 막대에 수직이면서 그것의 한쪽 끝은 지나는 축에 대하여
(3) 막대에서 hm 떨어진 평행선을 축으로 할 때

활동ㄹ

물리적 상황 : 체조 선수는 철봉대에 있는 그녀의 손위에서 균형을 이룬 다음 철봉대에 수직으로 매달릴 때까지 자유롭게 회전한다. 그녀가 균일한 막대로 모델화 되었다고 하자. 그녀의 중력의 중심과 손 사이에는 1m이고, 그녀의 질량이 60kg이라면 철봉에 대하여 그녀의 관성모멘트가 가장 낮은 지점에 도달했을 때 각도와 속력을 구하여라.

D. 회전과 각의 가속도

활동ㄱ

물리적 상황 : 회전대 위에 있는 하나의 동전은 회전축에 대하여 시계 반대 방향으로 도는 반지름 r인 원에서 각의 속력이 w이고 질량m인 입잘 모델화 할 수 있다. 어떤 축에 대하여 질량 mkg인 입자의 각의 모멘텀은 mr^2w이다. 여기서 r은 축으로부터 rm의 거리를 의미하고, w는 $rads^{-1}$로 나타내어지는 각의 속력이다. 이것은 kgm^2s^{-1}로 측정된다. 입자로부터 발전시켜 고체에 대한 각의 모멘텀을 일반화하여라.

활동ㄴ

물리적 상황 : 45kg인 소녀가 중앙축에 대하여 자유롭게 회전하는 반경 4m의 로타리 위에 서있다. 지금 그녀는 중앙축에서 2m 떨어진 곳에서 출발하는데 축에 대한 로타리의 관성 모멘트는 200 kgm^2이고, 그것은 3 $rads^{-1}$의 각의 속도로 회전한다. 다음 두 경우에 w의 값을 구하여라

· 소녀가 로타리 중앙으로 걸어갈 때
· 소녀가 로타리의 변두리로 걸어갈 때

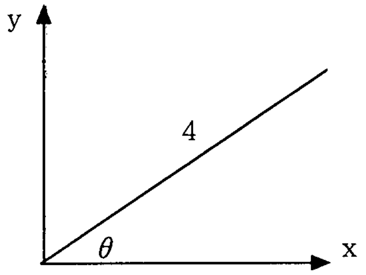
활동ㄷ

물리적 상황 : 반경 r인 원에서 움직이는 입자 P의 가속도는 접선으로 중심을 향해 성분 $r\theta$와$r\theta'$를 가진다. 반경 4m인 원에서 움직이고 있는 입자는 그것의 각의 [7]디스프레스먼트가 $\theta = 1 - \cos t$, t는 초로 나타내어진다. 여기서 라디안 θ는 그림에서와 같이 x축으로부터 각도이다. 이 때 시간 t에서 P의 속력과 가속도를 발견하여

6) 관성 모멘트-moment of interia

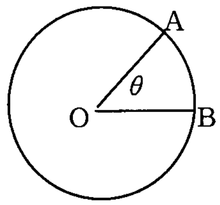
7) 디스프레스먼트 : displacement

라.



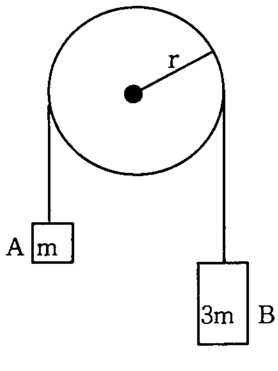
활동ㄹ

물리적 상황 : 입자A가 반경2m인 원에서 이동한다. t초 후에 $\theta = t^2$이 얻어졌다면, 2초 후에 가속도의 성분과 속도를 계산하여라.



활동ㅁ

물리적 상황 : 그림과 같이 반경 rm와 질량4mkg을 가진 회전 바퀴에 단단한 줄이 걸치고 있는데, 그 실의 양끝에는 질량 mkg, 3mkg인 추를 달고 있다. 이 회전바퀴는 자유자재로 돌 수 있고 실은 미끄러지지 않는다면, 이 질량의 가속도를 구하여라.



위의 물리적 모델의 교수요목은 몇 개의 활동을 가지고 있으나, 이 활동은 표본에 불과하며, 교수계획을 시도할 때는 더 많은 활동을 계획할 수 있다.

6. 교수방법, 자료이용, 학습형태

통합교육과정에서는 전통적인 교사 위주의 지도 방법을 벗어나 학습에서 수학·물리적인 활동을 강조하는 협동학습이 필요하다. 최근의 연구결과에 의하면 협동학습에서 프로젝트 중심의 교실운영이 통합교육과정을 실천하는데 바람직하다는 결과가 나왔다. 교사는 학생들이 활발하게 그들 학습에 참여하도록 도와주고 교실운영방법을 익숙하게 숙지해야 한다는 것이다. 즉, 교사는 적절한 탐구방법을 이용하여 학생들이 자기 아이디어를 생성하고 상호교환하며, 다른 사람이 생각을 신중하게 듣고 자기의 견해를 발표하게 해야한다. 이렇게 그들이 가지고 있는 생각과 경험을 재조직할 수 잇는 환경을 마련해 주는 일은 이후의 학습에서 통찰을 이끌어내는 요인이 된다.

질문기법 수업 중에 사용되는 질문으로 사전 질문, 종합적 질문, 큐질문, 분석적 질문, 평가 질문, 포커스 질문, 확대 질문과 같이 7가지를 생각할 수 있는데, 각 질문의 쓰임이 학습환경에 따라 다르다. 특히, 종합적 질문은 낮은 수준의 질문으로 "원의 반경이 20㎝일 때 그 원의 둘레는 얼마인가?"와 같이 명확하게 하나의 답을 요구하는 질문이며, 분석적 질문은 이와 반대의 경우이다.

자료이용 IMP프로그램은 고등학교 3학년 또는 대학교 1학년에 알맞은 프로그램이다. 이를 효과적으로 운영하기 위해서는 자료의 활용이 대단히 중요하다. 자료는 주제 중심으로 구성이 되어야 하고, 튜터링 과정을 운영해야 한다. 또, 컴퓨터 소프트웨어(CAI 등)를 이용한 보조자료의 개발도 통합 교육

과정의 운영에서 빼놓을 수 없는 부분이다.

7. 결론

수학의 지도에서 문제 해결은 2000년대 교실에서도 가장 강조되는 학습활동이다. 이 글에서는 교실에서 문제 해결의 도입을 종전의 방법과 다른 시각으로 보자는 견해를 보였으며, 한 방법으로 모델링을 통한 문제해결을 수학·물리의 통합과정에서 실현시킬 수 있다는 것이다. 학생들은 모델링을 통해서 문제의 구조를 명확하게 이해할 수 있으며, 폴랴관점의 전략적 접근을 구체적으로 경험할 수 있을뿐더러 표, 그래프, 자료 모으기 등과 같은 수학의 방법을 실천할 수 있다. 또, 수학의 연결성을 수학의 내적 관련에서 수학의 외적 관련으로 확대할 수 있다는 점이다. 이 통합교육과정을 학교에 정착시키기 위해서는 수학적 모델링에 해당하는 소재를 적극 개발하고 물리적 모델의 교수 요목도 여러 시각에서 계속 개발해야 한다(예, 미분방정식).

참고문헌

1. American Association for the Advancement of Science. Science-a Process Approach. Washinton, D.C. The Association, 1963.
2. Anderson, O.Roger. " Some Interrelationships between Constructivist Models of Learning and Current Neurobiological Theory, with Implications for Science Education." Journal of Research in Science Teaching 29(December 1992): 1037-58.
3. Archer, J. Andrew. " The Shortest Route." Mathematics Teacher 80(February 1987): 88-93, 142.
4. Arganbright, Deane. " An Optimization Problem and Model." Mathematics Teacher71(December 1978): 769-73.
5. Barrett, Gloria, Dot Doyle, and Dan Teague. "Using Data Analysis in Precalculus to Model Cooling." Mathematics Teacher 81(November 1988) : 680-84
6. Berlin, Donna F. Integrating Science and Mathematics in Teaching and Learning : A Bibliography. School Science and Mathematics Association Topics for Teachers Series, No. 6. Columbus, Ohio : ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, 1991.
7. Berlin, Donna F, ed. Database of integrating Science and Mathematics Instructional Activities. Columbus, Ohio : National Center for Science Teaching and Learning, 1994.
8. Berlin, Donna F. School Science and Mathematics Integrated Lessons(SSMILES). School Science and Mathematics Association Classroom Activities Monograph Series. Columbus, Ohio : National Center for Science Teaching and Learning, in press.
9. Braten, I.(1991) Vygotsky as precursor to metacognitive theory : I. The concept of metacognition and its roots. Scandinavian Journal of Education Research, 35(3), 179-192.
10. Brooks, J. G.,&Brooks, M. G.(1993). In search if understanding : The casr for constructivist classrooms. Alexandria, VA : Association for Supervision and Curriculum Development.
11. Bruner, H(1985). Vygotsky : A historical and conceptual perspective. In J. Wersch(Ed.), Culture, communication and cognition : Vygotskian perspectives. Cambridge University Press.

12. Burch, Charles H., Jr., and Dan Kunkle. "Modeling Growth-a Discrete Approach." Mathematics Teacher 77(April 1984) : 266-68.
13. Carin, A. A. (1993). Teaching science through discovery(7th ed.). New York : Merrill.
14. Champagne, Audrey B. " Cognitive Research on Thinking in Academic Science and Mathematics : Implications for Practice and Policy." In Enhancing Thinking Skills in the Science and Mathematics, edited by Diane F. Halpern, pp. 117-33. Hillsdale, N.J : Lawrence Erlbaum Associates, 1992.
15. Daniels, Davia. "Fast Brakes." Mathematics Teacher 76(February 1983) : 104-7, 111.
16. Dunn, R., Beaudry, J. S.,&Klavas, A.(1989). Survey of research on learning styles. Educational Leadership, 47(6), 50-58.
17. Dym, Clive L., and Elizabeth S. Ivey. Pruncuples of Mathematical Modeling. Orlando, Fla. : Academic Press, 1980.
18. Epstwin, H. T.(1980). Brain growth and cognitive functions. In D. Steer(Ed.), Emerging adolescent, characteristics and educational implications. Columbus, OH : National Middle School Association.
19. Esty, Edward, and James Czepiel. "Mathematics in the Newspaper." Mathematics Teacher 73(November 1980) : 582-86.
20. Fogarty, Robin. The Mindful School : How to Integrate the Curricula. Palatine, Ⅲ. : Skylight Publishing, 1991a.
21. Fogarty, Robin. "Ten Ways to Integrate Curriculum." Educational Leadership 49(October 1991b) : 61-65.
22. Gonzales, Michael G., and William J. Carr. " Impact of the Black Death(1348-1405) on World Population : Then and Now." Mathematics Teacher 79(February 1986) : 92-94, 146.
23. Kennedy, Dan. "Mathematics in the Real World, Really." Mathematics Teacher 78(January 1985) : 18-22.(See also "Price Wars," November 1985, p. 588.)
24. Kememy, John G., and J. Laurie Shell. Mathematical Models in the Social Sciences. Blaisdell Publishing Co., 1962.
25. Li Changming. "A Geometric Solution to a Problem of Minimization." Mathematics Teacher 81(January 1988) : 61-64.
26. National Council of Teachers of Mathematics. An Agenda for Action : Recommendations fork School Mathematics for the 1980s. Reston, Va. : The Council, 1980.
27. National Council of Teachers of Mathematics. Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Va. : The Council, 1989.
28. National Research Council. Counting on You : Actions Supporting Mathematics Teaching Standards. Washinton, D. C. National Academy Press, 1991.
29. Novak, Joseph D. and D. Bon Gowin. Learning How to Learn. Cambridge : Cambridge University Press,1993.
30. Novak, J. D. (1984). Application of advances in learning theory and philosophy of science to the improvement of chemistry teaching. Journal of chemistry Education, 6/(7), 607-612.
31. Nievergelt, Yves. "Foshers' Effect : Real Growth Is Not Interest Less Onflation." Mathematics Teacher 81

(October 1988) : 546-47.

32. Novak, J. D.(1990). Concept maps and vee doagrans : Two metacognitive tool to facilitate meaningful learning. Instructional Science, 19(1), 29-52.
33. Padilla, Michael J. The Science Process Skills. Research Matters...to the Science Teacher. Calgary, Alta. : National Association for Research in Science Teaching,1986.
34. Penafiel, Alfinio F. and Althur L. White. "SSMILES. Exploration of the Mean as a Balance Point ." School Science and Mathematics 89(March 1989) : 251-58.
35. Piaget, Jean. "Piaget's Theory." In Carmichael's Manual of Child Psychology. edited by aul H. Mussen. New York : John Wiley&Sons, 1970.
36. Rutherford, F. James, and Andrew Ahlgren. Science for All Americans. New York : Oxford University Press, 1990.
37. Steen, Lynn Arthur. "Integrating School Science and Mathematics : Fad or Folly?" In NSF/SSMA Wingspread Conference : A Network Integrating School Science and Mathematics Teaching and Learning-Conference Plenary Papers, edited by Donna F. Berlin, pp.7-12. Columbus, Ohio : National Center for Science Teaching and Learning.1994.
38. Tobin, Kenneth G., and William Cape. "Teaching Process Skills in the Middle School." School Science and Mathematics 80(November 1980):590-600.
39. Vygotsky, Lev S. "Mind in Society." In The Development of Higher Psychological Process, edited by Michael Cole, Vera John-Steiner, Sylvia Scribner, and Ellen Souberman. Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1978.
40. White, Arthur L., and Donna F. Berlin. "SSMILES-Fulcrum and Mean. Concepts of Balance." School Science and Mathematics 89(April 1989) : 335-42.
41. White, Arthur, and Larry Ecklund. Math + Science : A Solution. Fresno, Calif. : AIMS Education Foundation, 1987.
42. Woods, Jimmy C. "maximum Profit without Calculus." Mathematics Teacher 81(March 1988) : 224-26.