

다영역 모델 방정식의 유한차분계가 갖는 일관성과 정확성 분석

이 덕 주

충남대학교 농공학과

Analysis of Consistency and Accuracy for the Finite Difference Scheme of a Multi-Region Model Equation

Lee, Duk Joo

Department of Agricultural Engineering, Chungnam National University

ABSTRACT

The multi-region model, to describe preferential flow, is an equation representing solute transport in soils by dividing soil into numerous pore groups and using the hydraulic properties of the soil. As the model partial differential equation (PDE) is solved numerically with finite difference methods, a modified equivalent partial differential equation(MEPDE) of the partial differential equation of the multi-region model is derived to analyze the accuracy and consistency of the solution of the model PDE and the Von Neumann method is used to analyze the stability of the finite difference scheme.

The evaluation obtained from the MEPDE indicated that the finite difference scheme was found to be consistent with the model PDE and had the second order accuracy.

The stability analysis is performed to analyze the model PDE with the amplification ratio and the phase lag using the Von Neumann method. The amplification ratio of the finite difference scheme gave non-dissipative results with various Peclet numbers and yielded the most high values as the Peclet number was one. The phase lag showed that

the frequency component of the finite difference scheme lagged the true solution.

From the result of the stability analysis for the model PDE, it is analyzed that the model domain should be discretized in the range of $Pe < 1.0$ and $Cr < 2.0$ to obtain the more accurate solution.

Key words : preferential flow, modified equivalent partial differential equation, multi-region model, amplification ratio, phase lag.

요 약 문

다영역 모델은 Preferential 흐름에 대한 해석을 위하여 토양을 여러개의 공극군으로 나누고 각 토양의 수리학적 특성을 이용하여 토양내의 흐름을 표현한 방정식이다. 이 모델을 유한차분법을 이용하여 수치적으로 풀이할 때 해의 정확도와 일관성을 분석하기 위해 수정등가편미분방정식(MEPDE)을 구하고, 안정성을 분석하기 위해 Von Neumann 법을 이용한다.

수정등가편미분방정식을 이용하여 얻은 유한차분계에 대한 평가는 모델방정식에 대하여 일관성이 있는 것으로 나타났고 모델방정식에 대한 유한차분법은 2차의 정확도를 얻었다.

모델방정식의 안정성 해석은 Von Neumann 방법을 이용하여 진폭도와 위상지연을 구하고 이를 분석하였다. 유한차분계의 진폭비는 Peclet 수의 변화에 관계없이 비분산적이었으며 Peclet 수가 1.0일 때 가장 큰 값을 나타냈고, 위상지연은 참값에 대한 빈도요소보다 더 느리게 파동함을 나타냈다.

모델방정식의 안정성 해석 결과, 모델의 영역분해는 보다 정확한 결과를 얻기 위해서 Peclet수는 1.0보다 작고 Courant 수는 2.0보다 작은 범위 안에서 분해하는 것이 좋은 것으로 분석된다.

주제어 : preferential 흐름, 수정등가편미분방정식, 다영역모델, 진폭비, 위상지연

1. 서 론

지하수역내에서의 용질(오염물질)의 이동을 추적하기 위한 모델은 이류분산 방정식(Advection Dispersion Equation, ADE 또는 CDE)에 의해 이루어져 왔으며, 특히 투수성이 양호한 토양으로 이루어진 지하수역에서는 지하수의 이류에 의해서 지배된다.

Preferential(선택적) 흐름이나 이류에 의해 크게 지배받는 용질의 이동은 그 수치해석이 진동을 수반한 결과를 가져오기 때문에 정확성이나 모델의

안정성을 떨어뜨린다¹⁾. 따라서 유한차분법에 의한 모델의 해석시에, 기존의 ADE에 의한 토양내의 용질이동의 해석에 한계가 있음을 밝혀왔다. 또한 Price 등²⁾은 Peclet 수가 2보다 클 때는 항상 모델 결과에 진동이 일어남을 나타냈으며, 따라서 진동을 제거하려면 아주 조밀한 공간 격자를 이용하거나 특별한 방법으로 방정식을 분해하여야 한다³⁾.

진동을 수반하는 결과를 해결하는 방법은 고차의 정확도를 갖는 수치해법을 사용하여 문제를 해결하며, 고차의 수치해법은 표준 2차 방법보다 진동이 덜하고 정확성이 보다 좋은 결과를 가져온다^{4,5,6)}.

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - v_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - \sum_{j=1}^n L_{ij} \frac{C_j}{\theta_j} + \sum_{j=1}^n L_{ij} \frac{C_j}{\theta_i} \quad (1)$$

Warming과 Hyett⁷⁾는 모델의 일관성이나 정확도를 확인하기 위하여 수정등가편미분방정식 (Modified Equivalent PDE, MEPDE)을 이용하고 이를 분석하여 주어진 유한차분계가 분산적인지 아닌지를 결정하기도 하였다.

모델의 안정성은 수치해법의 계산오차에 대한 그 추이로써 판단된다. 즉 안정한 수치해법은 오차를 점차 줄이거나 더 이상 커지지 않게 한다. 이 안정성은 Lax법이나 Fourier급수를 이용한 Von Neumann법 등을 통하여 확인할 수 있다^{1, 8)}.

안과 이⁹⁾는 토양을 여러개의 공극군(Pore Group)으로 나누어 생각하는 다영역모델을 개발하여 Preferential 흐름을 해석하는 방법으로 사용하였다. 다영역모델은 토양을 여러개의 공극군으로 나누고 각 공극군의 분산계수, 공극유속, 함수비 및 공극군간의 상호계수로써 특성화하여 흐름을 나타낸 방정식이다.

본 연구에서는 다영역모델 방정식의 유한차분계가 시간이나 공간 증가분에 대하여 어떻게 반응하는지 확인하기 위해 수정등가편미분방정식 (Modified Equivalent PDE, MEPDE)을 유도하여 모델의 일관성과 정확도를 확인하고, Von Neumann 법을 이용하여 모델방정식의 안정성을 분석하고자 한다. 또한, 모델의 영역을 분해함에 있어서 모델의 해석이 안정한 상태를 갖게하는 계수를 찾고자 한다.

2. 다영역 모델의 해석

2.1 모델 방정식

토양내의 preferential 흐름에 대한 해석을 위해서 토양을 여러개의 공극군(또는 영역, pore

group)으로 나누고, 각 공극군내에서의 흐름은 이류분산 방정식에 의해 표현하였으나, 공극군간의 용질농도의 이동은 2영역 모델의 1차 이동 형태를 택하여 공극군간의 상호계수를 이용한 모델식을 만들었다. i 공극군에 대한 모델식은 식 (1)과 같다⁹⁾.

여기서 C_i 와 C_j 는 각 공극군의 농도이고, D_i 는 분산계수, v_i 는 토양내의 용질의 공극유속, θ_i 는 험수비, L_{ij} 는 공극군간의 상호계수, 그리고 n 은 공극군의 수를 나타낸다.

이 모델식은 각 공극군의 수리전도도와 험수비로써 특성화되어 공극군내의 평균 농도로 나타나는 1차원 농도단면, 즉 선형의 농도 흐름으로 표현되지만, 각 공극군을 나열하고 공극군간의 상호계수를 통해서 용질농도의 이동을 나타냄으로써 2차원적인 해석을 시도한다.

2.2 모델 방정식의 영역분해(Discretization)

모델 방정식의 정확한 해석은 선택한 해법이 안정적이고 정확하며 효과적인 체계를 가져야 한다. 이를 위해서는 영역을 분해하고, 방정식과 경계조건을 설정하고 분석하여 그 방정식을 풀며, 마지막으로 결과를 분석하여 그 해법의 질을 판단한다.

영역의 분해는 균일한 격자(grids)를 이용하였고, x 와 t 방향에 대한 격자점(nodes)의 수를 N_x 와 N_t 로 설정할 때, 각 방향에 대한 격자 간격은 다음과 같이 표현된다^{9, 10)}.

$$\Delta x = \frac{l}{N_x - 1} \quad ; \quad \Delta t = \frac{t}{N_t - 1} \quad (12)$$

여기서 l 은 영역의 전체길이이고, t 는 전체시간을 나타낸다.

영역의 분해는 무차원 수인 Peclet 수, Courant 수 및 확산(Diffusion) 수로 특성화된다.

Peclet 수는 용질의 이동이 분산현상에 의해서 지배되는지 또는 이류현상에 의해서 지배되는지를 판별하게 하는 인자로서, 식 (13)과 같다.

$$Pe_x = \frac{v \Delta x}{D} \quad (13)$$

Courant 수는 단일격자 간격 상에서 한 시간간격 동안의 용질의 이동이동을 나타낸다. 즉,

$$Cr_x = \frac{v \Delta t}{\Delta x} \quad (14)$$

확산수는 Peclet 수에 대한 Courant 수의 비이다.

$$S_x = \frac{Cr_x}{Pe_x} = D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (15)$$

모델 방정식의 분해는 방정식을 연산자(operator) 형태로 바꾸어서 살펴보면, 모델식은 식 (16)과 같이 표현된다.

연산자 $L_p[\cdot]$ 를 이용하여 모델식을 단순화하면 식 (17)과 같다.

식 (17)은 복합형태로써 $\alpha=0$ 이면 양해법(Fully Explicit) 형태이고 $\alpha=1$ 이면 음해법(Fully Implicit) 형태이며 $\alpha=0.5$ 일 때는 Crank-Nicholson 형태를 나타낸다.

모델식에서 주로 쓰인 차분 연산자(difference operator)는 1차 및 2차 미분계수의 근사법에 쓰였으며 이는 식 (18)~(19)과 같다¹⁾.

$$\mu_x \delta_x c_{j,k}^n = \frac{c_{j+1,k}^n - c_{j-1,k}^n}{2} \quad (18)$$

$$\delta_x^2 c_{j,k}^n = c_{j+1,k}^n - 2c_{j,k}^n + c_{j-1,k}^n \quad (19)$$

2.3 모델 방정식의 일관성과 정확도

모델의 일관성은 편미분방정식을 해석하는데 사용되는 수치해석의 중요한 특성으로서, 공간 및 시간증가분이 0에 가까워짐에 따라 편미분방정식과 차분해석법의 차이가 없어진다면 그 해석방법은 일관성이 있다고 말한다. 모델의 정확도는 공간 및 시간증가분이 감소함에 따라 차분해석법에서의 오차가 얼마나 빠르게 0에 가까워지는가로써 나타낸다.

유한차분법의 일관성은 수정등가편미분방정식 (Modified Equivalent PDE, MEPDE)에 의해서 구할 수 있다. MEPDE는 우선 Taylor급수에 의해 모델방정식을 확장하고 그 결과에서 $\partial c / \partial t$ 를 제외한 모든 시간도함수를 제거함으로써 구한다. 시간도함수를 제거하는 방법은 현재의 MEPDE에 제거하려는 항으로 이루어진 연산자로 곱한 후, 이를 다시 현재의 MEPDE에 더함으로써 새로운 MEPDE를 얻는다. 이 과정은 설정해 놓은 차수의 모든 시간도함수가 제거될 때까지 반복하여 소정의 계획한 MEPDE를 얻게 된다^{4, 7, 8)}. 그러나 모델방

$$L_p[C_i] \equiv D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - v_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - \sum_j^n \frac{L_{ij}}{\theta_i} (C_i - C_j) \quad (16)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \{ \alpha L_p[C_i^{n+1}] + (1-\alpha) L_p[C_i^n] \} \quad (17)$$

정식은 총화(summation)부분의 특이한 형태로 인해 위의 방법을 사용하는데 있어서 예외를 두어 MEPDE를 얻었으며, 따라서 모델방정식에서 각 공극군간의 상호작용부분에 대한 처리의 난맥상으로 인하여 모델방정식의 총화부분에 대해서는 시간의 도함수를 제거하지 않았다.

위의 방법을 이용하여 MEPDE를 구한 결과는 식 (20)과 같다.

여기서 HOT는 설정된 차수이상의 고차항(Higher Order Terms)이다.

2.4 모델 방정식의 안정성 해석

모델의 안정성은 수치해석 과정이 진행되는 동안 생략(Truncation)이나 반올림(Round-off)을 통한 오차가 일어나는 정도를 나타내는 것으로, 불안정한 수치 체계는 오차를 계속 증폭시켜서 계산 결과에 영향을 미치나, 안정적인 수치 체계는 이러한 오차를 수치해석 과정에서 감소시키거나 오차가 최소한 더 증가하는 것을 허용하지 않는다.

모델 방정식의 안정성은 Von Neumann의 해

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial C_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial C_i}{\partial x} - D_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} - \sum_{j=1}^n \frac{L_{ij}}{\theta_i} (C_j - C_i) \\
 &= -\frac{\Delta t^2}{6} v_i \left(1 + \frac{v_i^2}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \right) \frac{\partial^3 C_i}{\partial x^3} + \frac{\Delta t^2}{12} v_i^2 \left(3D_i + \frac{\Delta x^2}{12} + \frac{v_i^2 \Delta t^2}{24} + \frac{D_i^2}{v_i^2} + \frac{D_i}{v_i^2} \frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} \right) \frac{\partial^4 C_i}{\partial x^4} \\
 &+ \frac{\Delta t^2}{12} \sum_{j=1}^n \frac{L_{ij}}{\theta_i} \left[\left(\frac{\partial^2 C_j}{\partial t^2} - v_i \frac{\partial^2 C_j}{\partial t \partial x} + v_i^2 \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 C_i}{\partial t^2} - v_i \frac{\partial^2 C_i}{\partial t \partial x} + v_i^2 \frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2} \right) \right] \\
 &+ \frac{\Delta t^2}{12} \sum_{j=1}^n \frac{L_{ij}}{\theta_i} \left[\left(D_i \frac{\partial^3 C_j}{\partial t \partial x^2} - D_i v_i \frac{\partial^3 C_j}{\partial x^3} \right) - \left(D_i \frac{\partial^3 C_i}{\partial t \partial x^2} - D_i v_i \frac{\partial^3 C_i}{\partial x^3} \right) \right] \\
 &- \frac{\Delta t^4}{288} \sum_{j=1}^n \frac{L_{ij}}{\theta_i} \left[\left(\frac{1}{4} \frac{\partial^4 C_j}{\partial t^4} + v_i \frac{\partial^4 C_j}{\partial t^3 \partial x} - 2v_i^2 \frac{\partial^4 C_j}{\partial t^2 \partial x^2} - \left\{ \frac{2v_i \Delta x^2}{\Delta t^2} - 3v_i^3 \right\} \frac{\partial^4 C_j}{\partial t \partial x^3} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left\{ \frac{2v_i^2 \Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{24D_i^2}{\Delta t^4} + 3v_i^4 \right\} \frac{\partial^4 C_j}{\partial x^4} \right) - \left(\frac{1}{4} \frac{\partial^4 C_i}{\partial t^4} + v_i \frac{\partial^4 C_i}{\partial t^3 \partial x} - 2v_i^2 \frac{\partial^4 C_i}{\partial t^2 \partial x^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \left\{ \frac{2v_i \Delta x^2}{\Delta t^2} - 3v_i^3 \right\} \frac{\partial^4 C_i}{\partial t \partial x^3} - \left\{ \frac{2v_i^2 \Delta x^2}{\Delta t^2} + \frac{24D_i^2}{\Delta t^4} + 3v_i^4 \right\} \frac{\partial^4 C_i}{\partial x^4} \right) \right] + HOT
 \end{aligned} \tag{20}$$

석방법을 이용하여 분석하였으며, 이는 모델방정식에 대한 Fourier급수로 부터 진폭도(Amplification factor)를 유도함으로써 구할 수 있다.

수치해법은 정확한 해에 오차를 더한 것으로, Von Neumann의 해석은 영역분해된 방정식에서의 오차가 Fourier급수로 표현될 수 있다는 가정에서부터 시작된다.

$$\begin{aligned}
 \epsilon(x, t) &= \sum_m b_m(t) e^{ik_m x} \\
 k_m &= \frac{2m\pi}{l} \quad m = 0, 1, 2, \dots, M
 \end{aligned} \tag{21}$$

여기서 m 은 진동의 기간이다.

영역분해 방정식의 선형성은 매 시간에 대한 해법의 전개가 같은 시간동안의 그 해의 부분요소를 총합하여 전개한 것과 같으므로 식 (21)의 급수는 단일 항에 대하여 분석할 수 있다¹⁾. 따라서 위의 식은 식 (22)와 같이 고려하고 이를 치환하여 전개하면 식 (23)와 같다.

$$\varepsilon(x, t) = b_m(t) e^{ik_m x} \quad (22)$$

$$\varepsilon(x, t) = e^{\alpha t} e^{ik_m x} \quad (23)$$

여기서 α 는 복소수 형태일 수도 있다.

시간 $t + \Delta t$ 일 때의 오차는 식 (23)으로부터 $\varepsilon^{n+1} = e^{\alpha \Delta t} \varepsilon^n$ 으로 표현될 수 있으며, 진폭도(Amplification factor)는 시간 Δt 동안의 오차의 변화로서 정의될 수 있으므로, 진폭도 G 는 식 (24)와 같이 표현되고 $|G|$ 는 1보다 같거나 작아야 시간이 변함에 따라 오차가 증가하지 않게 된다.

$$G = \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} = e^{\alpha \Delta t} \quad (24)$$

따라서, 진폭도는 식 (23)을 모델 방정식에 대입하여 $e^{\alpha \Delta t}$ 에 대하여 정리하면 구할 수 있으나, 최종적으로 복소수의 비의 형태로 나타내지며 진폭도의 크기와 위상(phase)은 식 (25)에서 쉽게 구할 수 있다.⁴⁾

여기서 진폭도의 크기는 $\sqrt{(s^2 + k^2)/(q^2 + r^2)}$ 이고, 위상은 $\tan^{-1}(k/s) - \tan^{-1}(r/q)$ 이다. 본 모델에 대한 진폭도는 모델식의 특성상 공극군간의 상호작용이 없다는 가정하에서 모델식을 단순화하여 진폭도를 구하였으며 이는 식 (26)과 같이 표현된다.

이를 Crank-Nicolson 형태($\alpha=0.5$)로 나타내면, 식(27)과 같다.

$$G = \frac{1 - 2S_x \sin^2 \frac{\beta}{2} - \frac{Cr_x}{2} i \sin \beta}{1 + 2S_x \sin^2 \frac{\beta}{2} + \frac{Cr_x}{2} i \sin \beta} \quad (27)$$

$$G = \frac{s + ki}{q + ri} = \sqrt{\frac{s^2 + k^2}{q^2 + r^2}} e^{i \left(\tan^{-1} \frac{k}{s} - \tan^{-1} \frac{r}{q} \right)} \quad (25)$$

$$G = \frac{1 + 2S_x(\alpha - 1)(1 - \cos \beta) - Cr_x(\alpha - 1)i \sin \beta}{1 + 2S_x\alpha(1 - \cos \beta) - Cr_x\alpha(i \sin \beta)} \quad (26)$$

여기서 S_x 와 Cr_x 는 확산수와 Courant수로서 식 (14) 및 (15)와 같으며, $\beta = k_m \Delta x = \frac{2\pi m}{l} \Delta x$ 이다. 위의 식(진폭도)에 대한 크기는 항상 1보다 같거나 작으므로 모델식은 무조건 안정한 수치 체계를 갖는다. 모델식에 대한 분석은 진폭비(amplification ratio)와 위상지연(phase lag)에 의해서 가능하다. 진폭비는 분해진폭도(discrete amplification factor)와 해석적 진폭도(analytical amplification factor)의 크기의 비로써 나타내며, 해석적 진폭도를 유도하는 방법은 분해진폭도와 같이 Fourier급수의 단일 부분(식 23)을 모델식에 단순히 대입하고 정리하여 구할 수 있다. 모델 방정식에 대한 해석적 진폭도는 식 (28)과 같이 구하였으며, 따라서 진폭비는 식 (29)와 같이 나타낸다.^{1,4)}

$$G_a = e^{-D k_m^2 \Delta t} e^{-i v k_m \Delta t} \quad (28)$$

$$r = \frac{|G|^N}{|G_a|^N} \quad (29)$$

여기서 $N = \frac{L_w}{v \Delta t} = \frac{L_w}{Cr_x \Delta x}$ 로서 L_w 는 파장 길이이다. phase lag는 식 (30)과 같이 표현된다.

$$\phi = N \tan^{-1} \frac{\text{Im}(G)}{\text{Re}(G)} - 2\pi \quad (30)$$

여기서 $\text{Im}(G)$ 은 진폭도(G)의 허수부분이고

$Re(G)$ 는 실수부분이다. 진폭비에 의해서 주어진 수치해법이 참값(true solution)보다 더 분산적이냐 아니냐를 확인할 수 있으며, phase lag를 통해서 주어진 수치해법의 값이 참값보다 지체되는지 아닌지를 알 수 있다^{1, 7)}.

3. 모델의 해석결과

모델의 안정성 해석을 위한 입력자료는 Elrick과 French(1966)¹²⁾의 실험에서 얻었으며, 이는 Honeywood silt loam 토양으로써 지름 4cm, 길이 15cm의 시료체에 채운 토양기둥이다. 이 토양의 무차원 수인 Peclet수, Courant수 및 확산수를 얻기위하여 유속 및 분산계수를 산정해야하며 이를 위한 모델의 입력자료는 Table 1과 같다⁹⁾. 모델의 최대 모의실험 시간은 무차원 시간인 공극체적(Pore Volume, P.V.)으로 구하였으며, $D = 0.00039 \text{ cm}^2/\text{s}$, $v_{max} = 0.0556 \text{ cm/s}$ 및 $P.V. = 1\text{일}$ 때의 최대 시간은 $T = 35528 \text{ sec}$ 가 된다. 영역의 분해는 $Nx = 1100$, $Nt = 8882$ 로 하였으며, 따라서 $\Delta x = 0.13636 \text{ cm}^0$ 이고 $\Delta t = 135 \text{ sec}$ 이 된다.

3.1 일관성 및 정확도

일관성은 유한차분 방정식이 편미분 방정식을 추정하는 크기를 다루는데, 편미분 방정식과 유한차분 방정식의 차이는 생략오차(Truncation error)라 하며, 격자망(mesh)을 조밀하게 함에 따라 생략오차가 사라진다면 그 유한차분 방정식은

일관성이 있다고 한다¹⁾.

모델방정식에 대한 MEPDE인 식 (21)은 시간 및 공간증가분이 0이 되면 등호 오른쪽의 항들은 0이 되어 삭제되고 식 (21)은 모델방정식이 된다. 따라서 모델방정식에 대한 유한차분계는 모델 편미분 방정식에 대하여 일관성이 있다고 말한다.

모델방정식은 식 (21)에서 Δt 와 Δx 의 가장 낮은 차수가 2이므로 위의 유한차분계는 시간과 공간에 있어서 2차 정확도가 있음을 나타내고 있다.

3.2 모델 방정식의 진폭비(amplification ratio)

Fig. 1은 식 (29)에 의한 진폭비를 파장길이와 Δx 의 비에 대하여 나타낸 것으로, Courant 수(Cr)가 0.134일 때 토양내의 용질의 공극유속에 변화를 주어 얻은 결과이다. 진폭비의 값이 1에 가까울수록 참값(true solution)에 가깝고, 1보다 작으면 주어진 유한차분계가 참값보다 분산적이며 1보다 크면 분산적이지 않음을 나타낸다. 모델방정식에 대한 진폭비는 Peclet 수의 변화에 관계없이 1보다 큰 값을 나타냈고 따라서 참값보다 분산적이지 않았으며 이는 Montas⁴⁾의 결과와도 일치하였다. 또한 Peclet 수가 1.0에 가까울수록 진폭비의 값이 커졌고 1.0일 때보다 0에 가까울수록 유한차분계의 안정성이 좋았으며, Peclet 수가 아주 클 때는 단파(high frequency)대역에서의 진폭비가 안정적이나 파장길이가 Δx 의 4~20배인 영역에서 Peclet 수가 0.1일 때보다 안정적이지 못하다.

Table 1. Parameters of the Soil Property for the Calculation of the Model Equation

Saturated Hydraulic Conductivity, K_{sat} (cm/hr)	Saturated Moisture Content, θ_{sat}	Residual Moisture Content, θ_{res}	Input Parameter, η	Hydraulic Gradient, β
0.606	0.5504	0.26	7.9	1.3805

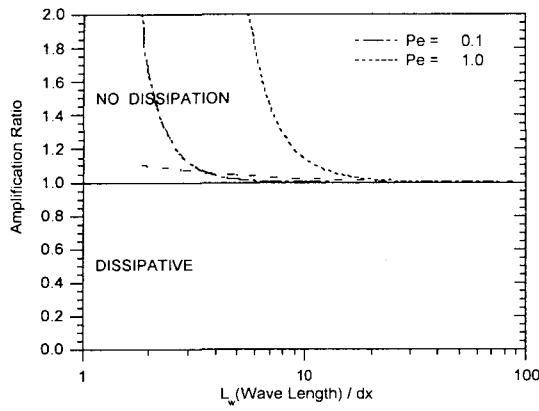


Fig. 1. Amplification Ratios for the model PDE at $Cr=0.134$ with various Peclet Numbers from Elrick and French (1966)'s Data

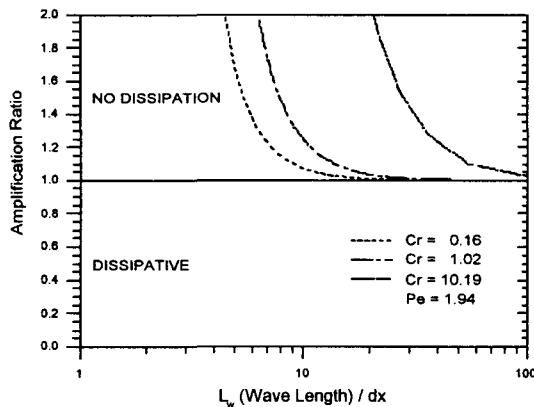


Fig. 2. Amplification Ratios for the model PDE at $Pe=1.94$ with various Courant numbers from Elrick and French (1966)'s Data

진폭도의 변화는 Courant 수가 변화할 때도 일어났으며, Fig. 2는 Peclet 수가 1.94일 때의 진폭도의 변화를 나타낸다. 모델의 유한차분계는 Courant 수가 커짐에 따라 진폭비가 커지고 불안

정한 상태를 나타냈다.

3.3 모델 방정식의 위상지연(phase lag)

모델방정식에 대한 phase lag는 유한차분계의 빈도요소가 참값에 대한 빈도요소보다 느리게 파동하는지 아닌지를 나타낸다. Fig. 3은 Courant 수가 0.134일 때 토양내의 공극유속에 변화를 주어 phase lag의 변화를 나타낸 것으로 0보다 크면 유한차분계의 빈도요소가 참값에 대한 빈도요소보다 앞서 나가고 0보다 작으면 지체됨을 나타낸다.

2차 유한차분계의 phase lag는 Peclet 수의 변화에 대하여 큰 변화추이는 보이지 않았으나 빈도요소가 모두 느리게 파동함을 나타냈다. Phase lag는 Peclet 수가 0.27일 때와 1.0일 때 거의 같은 변화하였으며 Peclet 수가 점차 커짐에 따라 파장길이가 2.5~30배인 영역에서 빈도요소가 더욱 느리게 파동함을 나타냈다. 또한 단파 대역에서 phase lag가 더 지체됨으로 부적절하게 파동함을 나타냈다.

Peclet 수가 1.0003으로 일정할 때 Courant 수의 변화에 따른 phase lag의 변화는 Fig. 4와 같으

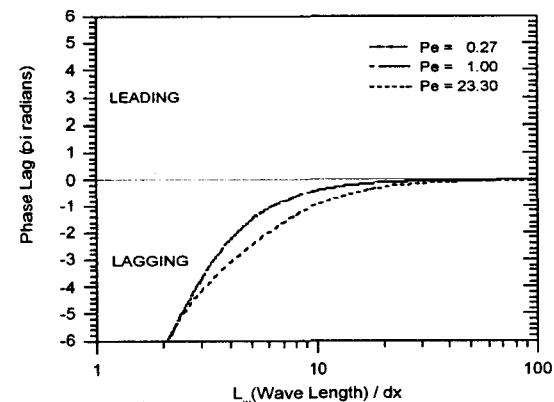


Fig. 3. Phase Lags for the model PDE at $Cr=0.134$ with various Peclet Numbers from Elrick and French (1966)'s Data

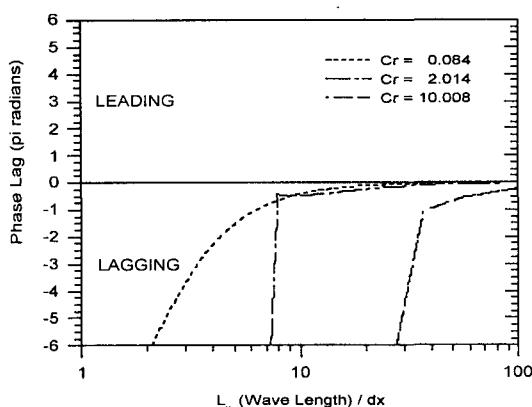


Fig. 4. Phase Lags for the model PDE at $Pe=1.0003$ with various Peclet Numbers from Elrick and French (1966)'s Data

며, Courant 수가 2.0이상 일 때 phase lag가 불규칙하게 변화하는 현상을 가져왔다²⁾.

따라서 진폭도와 phase lag의 변화를 통해 모델 방정식을 분석할 때, 보다 정확성있는 결과를 얻기 위해서는 Courant 수를 2.0보다 작은 값을 택하고 Peclet 수는 1.0보다 작은 값을 택하는 것이 추천된다.

4. 결 론

다영역 모델에 대한 모델방정식의 일관성과 정확도는 모델방정식에 대한 수정등가편미분방정식 (MEPDE)을 유도함으로 확인할 수 있었고, 이는 모델방정식의 유한차분계가 모델방정식에 대하여 일관성이 있음을 보였으며, 2차의 정확도를 나타내었다.

Von Neumann 방법을 이용한 모델방정식의 안정성에 대한 검토는 진폭비와 phase lag로써 확인하였다. 진폭비는 Peclet 수의 변화에 관계없이 비분산적이었으며 Peclet 수가 1.0일 때 가장 큰

값을 나타냈고 Peclet 수가 아주 크거나 0에 가까울 때 더욱 안정적이었다.

Phase lag는 유한차분계의 빈도요소가 참값에 대한 빈도요소보다 더 느리게 파동함을 보였으며, Peclet 수의 변화에 대하여 큰 변화를 나타내지 않았으나 Courant 수의 변화에는 민감하고 특히 2.0이상일 때 불규칙한 변화를 나타냈다.

따라서 Peclet 수는 1.0보다 작고 Courant수는 2.0보다 작은 범위에서 영역의 분해를 하는 것이 보다 정확한 결과를 가져올 수 있다.

참 고 문 헌

- Anderson, D.A., Tannehill, J.C., and Pletcher, R.H. "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Pub. Co. and McGraw-Hill Book Co., New York(1984).
- Price, H.S., Varga, R.S., and Warren, J.E. "Application of Oscillation Matrices to Diffusion-Convection Equations", *J. Math. Phys.*, XLV, pp301-311(1966).
- Noorishad, J., Tsang, C.F., Perrochet, P., and Musy, A. "A Perspective on the Numerical Solution of Convection-Dominated Transport Problems: A Price to Pay for the Easy Way Out", *Water Resour. Res.*, 28(9), pp551-561.
- Montas, H.J. "Preferential Flow and Transport Modeling in Agricultural Soils", Ph.D. Thesis, Agricultural and Biological Engineering Dept., Purdue University, W.Lafayette, IN, 47906-1146(1996).
- Noye, B.J., and Tan, H.H. "Finite Difference Methods for Solving the Two-Dimensional Advection-Diffusion Equation", *Int. J. Num. Methods. Fluids*, 9, pp75-98(1989).
- Van Genuchten, M.Th., and Gray, W.G. "Analysis

- of Some Dispersion Corrected Numerical Schemes for Solution of the Transport Equation", *Intl. J. for Num. Methods in Engineering*, 12, pp387-404(1978).
7. Warming, R.F., and Hyett, B.J. "The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods", *J. Comput. Phys.*, 14, pp159-179(1974).
8. Noye, J., and Hayman, K. "Accurate Finite Difference Methods for Solving the Advection-Diffusion Equation", pp. 137-157 in Noye, J., and May, R. (eds). Computational Techniques & Applications: CTAC-85, Elsevier Science Pub(1986).
9. 안병기, 이덕주, "Preferential 흐름에 대한 토양 내의 다영역 용질이동 모델", *한국농공학회지*, 42(2), pp71-77(2000).
10. 이덕주, "다영역 모델의 해석을 위한 공간모멘트법의 적용", *한국농공학회지*, 42(2), pp78-85(2000).
11. Valocchi, A.J., 1985. Validity of the Local Equilibrium Assumption for Modeling Sorbing Solute Transport Through Homogeneous Soils. *Water Resour. Res.*, 21(6), pp808-820.
12. Elrick, D.E. and L.K. French, 1966. Miscible Displacement Patterns on Disturbed and Undisturbed Soil Cores. *Soil Sci. Soc. A. Proc.*, 30(2), pp153-156.