
도립진자 시스템의 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어

박종우*, 궤철성**

A mixed H_2/H_∞ digital control of Inverted pendulum system

Jong-woo Park, Chil-seong Kwak

요 약

혼합 H_2/H_∞ 제어 방법은 H_2 -성능과 H_∞ -강건성을 결합한 제어기 설계를 위한 적극적인 접근법의 하나이다. 이 논문에서는, 먼저 설계하고자 하는 제어시스템의 추종특성을, 불확실성이 포함된 제어대상에 대하여, H_2 -노름으로 표현하고, 다음으로 H_∞ -노름으로 제어 시스템의 강건 안정성을 얻도록 하였다. 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기는 도립진자 시스템을 제어대상으로 하여 설계하였다. 도립진자 시스템에 대하여 설계한 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기는, 불안정 시스템을 안정화하면서 동시에 추종 성능을 향상시키고자 하였다.

ABSTRACT

The mixed H_2/H_∞ control method is one of positive approaches to design a controller having both the H_2 -performance and the H_∞ -robust stability. In this paper, Firstly, The tracking performance to be designed has been represented as H_2 -norms for the plants with uncertainties. Secondly, H_∞ -norm have been set up in order to ensure the robust stabilities. The mixed H_2/H_∞ digital controllers have been designed for an inverted system. The mixed H_2/H_∞ digital controller for the inverted pendulum system was intended to stabilize the instability of the plant together with the good tracking performance.

* 재능대학 전자통신과

** 재능대학 전자과

접수일자 : 2000. 10. 6.

I. 서론

디지털 제어 방식이 다양한 장점을 제공한다는 것은 잘 알려져 있다. 디지털 제어의 전체 시스템은 연속시간 신호와 이산시간 신호가 혼합된 시스템이다. 이러한 시스템을 샘플치 시스템이라고 한다.

혼합 H_2/H_∞ 제어는 불확실성이 포함된 제어대상에 대하여 H_∞ -강인성 및 H_2 -추종성능을 갖게 하는 제어이론이다. 연속시간 시스템에 대하여 해석적인 혼합 H_2/H_∞ 제어 설계(analytical mixed H_2/H_∞ control synthesis)의 일괄된 해법은 정립되지 않은 실정이다. 또한, 이 방법을 샘플치 제어시스템으로 확장하는 문제도 해석적인 결과는 정립되지 않았다.

이 논문에서는 샘플치 제어시스템의 설계법을 발전시킨, 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어 방법을 도입하였다. 이 방법은, 순수 이산시간 제어 방법으로 설계한 제어기가 표본화 주기에 따라 그 성능의 저하가 비교적 큰 결점을 개선한 방법으로 주목을 받고 있다. 모의실험과 실물실험에서 독립진자 시스템(inverted pendulum system)에 대하여 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어를 설계한다.

II. 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기 설계

이 절에서는 비용함수[1]에 의해 유도된 샘플치 혼합 H_2/H_∞ 문제를 다룬다. 다음과 같은 상태 방정식에 의해 표현되는 디지털 시스템 $G_{eq,d}$ 를 고려한다.

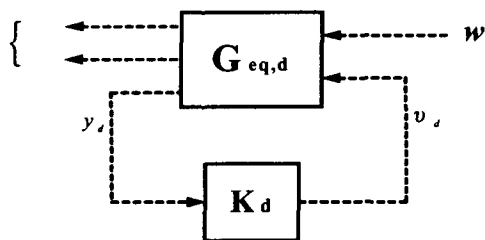


그림 1. 폐경로 시스템

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_w w(k) + B_v v(k) \\ z_\infty(k) &= C_{z_\infty} x(k) + D_{z_\infty w} w(k) + D_{z_\infty v} v(k) \\ z_2(k) &= C_{z_2} x(k) + D_{z_2 w} w(k) + D_{z_2 v} v(k) \\ y(k) &= C_y x(k) + D_{y_w} w(k) + D_{y_v} v(k) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

여기서, $y_d(k) \in \ell_2^P(0, \infty)$ 는 측정된 출력(measured output)이고, 이산 샘플링 순간 kh 에서 유용하다. 또한, $v_d = k_d y_d$ 는 제어 신호이다. 시스템의 연속시간 부분은 시불변으로 가정한다.

이 논문에서는 올림을 이용한 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기 설계방법을 새롭게 제시한다. 이를 위해, 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어 문제를 이미 잘 알고있는 샘플치 H_∞ 제어 문제로 전환하는 5단계 설계 절차를 다음과 같이 제안한다.

<단계1> 설계 목적에 부합하는 일반화 제어대상을 구성한다.

<단계2> 연속시간 H_2/H_∞ 혼합제어기 설계방법을 사용하여 H_2 노름 값과, H_∞ 노름 값을 얻어낸다.

<단계3> 단계2의 결과에서, H_2 노름에 관련된 하중함수만을 사용하여 연속시간 H_2 최적 제어기를 설계한다.

<단계4> 단계3의 연속시간 H_2 제어기에 의하여 제어되는 시스템의 감도함수(sensitivity function)의 역함수를, 다시 공칭 제어대상의 하중함수로 추가시킨다.

<단계5> 단계4의 일반화 제어대상에 대하여, 다시, 단계2의 H_∞ 노름에 관련된 하중함수를 추가시키고, H_∞ 제어기를 설계한다.

위의 설계절차에 의한 혼합 H_2/H_∞ 제어기를, 이 논문에서는, 독립진자 시스템에 대한 모의 실험을 통하여 제어 효과를 검증하였다.

III. 독립진자 시스템

3.1 독립진자 모델링

그림 2과 같은 독립진자 모델에 대하여 고려하자.

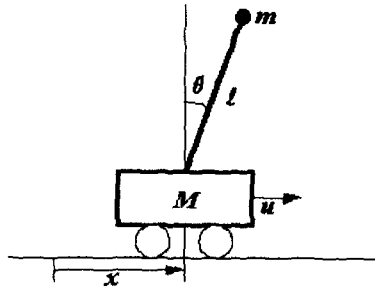


그림 2. 도립진자 모델

도립진자 시스템의 매개변수는 표 1과 같다.

표 1. 도립진자 모델의 매개변수

Table 1. Parameters of inverted pendulum model

매개변수	기호	단위	실제값
이동한 수레의 거리	x	m	
이동한 수레의 속도	\dot{x}	m/s	
회전한 진자의 각도	θ	rad	
회전한 진자의 각속도	$\dot{\theta}$	rad/s	
수레의 질량	M	kg	0.455
진자의 질량	m	kg	0.210
진자의 길이	l	m	0.305
중력가속도	g	kg m/s ²	9.8
전동기 회전력 상수 역기전력 상수	K_m	Nm/A V/(rad/s)	0.00767
내부 치차 비	K_g		3.7:1
전동기의 치차 반지름	r	m	0.00635
전기자 저항	R	Ω	2.6

운동방정식을 이용하여 모델링하면 다음과 같은 비선형 방정식이 유도된다.

$$(M+m)\ddot{x} + ml\dot{\theta}\cos\theta - ml(\dot{\theta})^2\sin\theta + F\dot{x} = u \quad \dots\dots (2)$$

$$l\ddot{\theta} - g\sin\theta + \dot{x}\cos\theta = 0$$

방정식의 간략화를 위하여 마찰을 무시하고($F=0$), θ 를 0° 근방의 값으로 생각하여 선형화 할 수 있다. 수레에 인가되는 힘을 수레를 구동하는 전동기 전압으로 바꾸기 위하여 다음과 같은 전압방정식

을 도입한다.

$$u = \frac{K_m K_g}{Rr} V - \frac{K_m^2 K_g^2}{Rr^2} \dot{x} \quad \dots\dots (3)$$

식(2)와 식(3)을 결합하여 다음과 같은 상태공간 선형 모델 식(4)로 표현할 수 있다[6].

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-K_m^2 K_g^2}{MRr^2} & \frac{-mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{K_m^2 K_g^2}{lMRr^2} & \frac{g(m+M)}{lM} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{lM} \end{bmatrix} V \quad \dots\dots (4)$$

3.2 연속시간 H_2/H_∞ 혼합제어기 설계

MATLAB의 “hinfmix(연속시간 제어대상에 대하여 혼합 H_2/H_∞ 제어기를 구하는 명령)” 함수를 이용하여 혼합제어기를 설계한다. H_2 노름과 H_∞ -노름간의 상대적 비중은 1:2로 두었고, 그림 3와 같이 구성한다.

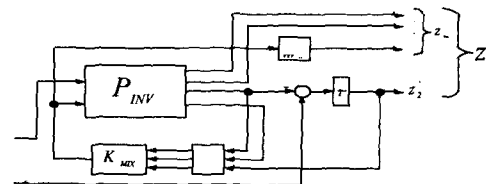


그림 3. 하중함수가 포함된 제어시스템 구성 1.

그림 3에서 F는 표본화시 발생하는 엘리야징을 방지(anti-aliasing)하는 필터이다. “hinfmix”명령을 사용하여 연속시간 혼합제어기를 설계할 수 있고, 이때의 H_2 -노름과, H_∞ -노름은 다음과 같다.

$$H_2\text{-노름}=2.2, \quad H_\infty\text{-노름}=1.55$$

(3) 혼합제어기 설계방법

i) hinfmix에서 구해진 H_2 -노름을 기준으로 설정하여 다음 그림 4와 같은 일반화 제어대상에 대하여 H_2 제어기, K_2 를 설계한다. 이때 사용되는

함수는 h2syn이고 설계된 H_2 제어시스템의 페루프 전달함수 T_{H_2} 의 H_2 -노름이, $\|T_{H_2}\|_2=2.2$ 이 되도록 α 값을 조절한다. $\alpha=3.3$ 일 때, 구해진 H_2 -노름 값은 2.21이다.

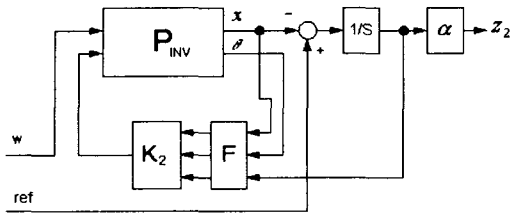


그림 4. 하중함수가 포함된 제어시스템 구성 2.

ii) 설계된 H_2 제어시스템의 ref에서 $\int e$ 까지의 전달함수를 구해낸다. MATLAB의 μ -toolbox의 sysic함수를 이용하여 쉽게 얻을 수 있고, 얻어진 전달함수의 역함수 W_{k2} 를 구한다.

iii) ii)에서 구해진 W_{k2} 를 이용하여 다음과 같은 일반화 제어대상을 설정한 후 H_∞ 제어를 설계한다.

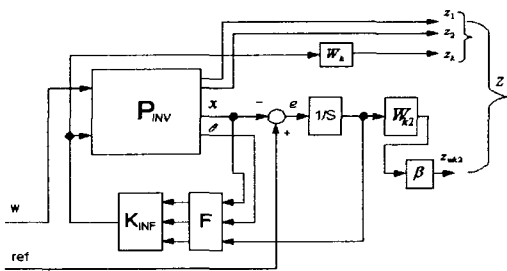


그림 5. 하중함수가 포함된 제어시스템 구성 3.

이때 β 값을 조정하여 설계된 H_∞ 제어시스템의 페루프 전달함수, T_{H_∞} 의 H_∞ 노름이 i)에서 구한 H_∞ 노름 값과 같아지도록($\|T_{H_\infty}\|_\infty=1.55$) 한다.

$\beta=0.36$ 일 때, 구해진 최적 H_∞ 노름 값은 1.57이다. 구해진 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{u}{x} = \frac{13.3657(s+3.738 \times 10^4)(s-1.418 \times 10^4)(s+316.9)(s+122.6)}{(s+3.798 \times 10^4)(s+1392)(s+465.2)(s+122.6)(s+24.38)} \times \frac{(s+30.29)(s+25.99)(s-2.775)(s+1.068)(s+0.084)}{(s+1.068)(s^2+1.096s+1.561)(s^2+27.44s+747.8)}$$

$$\frac{u}{\theta} = \frac{645.6527(s+3.779 \times 10^4)(s+1282)(s+316.6)(s+122.6)}{(s+3.798 \times 10^4)(s+1392)(s+465.2)(s+122.6)(s+24.38)} \times \frac{(s+30.56)(s+17.67)(s+3.644)(s+3.185)(s+1.068)}{(s+1.068)(s^2+1.096s+1.561)(s^2+27.44s+747.8)}$$

$$\frac{u}{ref-x} = \frac{-121.3408(s+215.2)(s+66.19)(s+38.31)(s+30.5)}{(s+1.075)(s^2+0.1795s+0.833)(s^2+3450s+3.006 \times 10^6)} \times \frac{(s+3.738 \times 10^4)(s+1392)(s+465.2)(s+122.6)(s+24.38)}{(s+1.068)(s^2+1.096s+1.561)(s^2+27.44s+747.8)}$$

3.3 이산시간 제어기 설계

그림 5를 그림 6과 같이 수정한 샘플치 제어시스템을 고려한다.

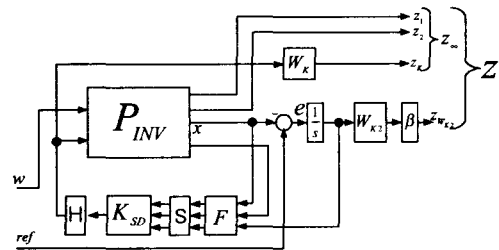


그림 6. 하중함수가 포함된 제어시스템 구성 4.

그림 6의 일반화 구성에 대하여 샘플치 H_∞ 제어기 설계과정을 거쳐서 이산시간 제어기를 설계한다. 구해진 전달함수는 다음과 같다.

$$\frac{u}{x} = \frac{-24.1937z^2(z-1.169)(z-0.9947)(z-0.9894)(z-0.761)}{z^2(z-0.9894)(z+0.03281)(z-0.02755)} \times \frac{(z-0.7408)(z+0.1052)(z-0.04321)(z+0.001615)}{(z+0.001623)(z^2-1.961z+0.9616)(z^2-1.316z+0.4805)}$$

$$\frac{u}{\theta} = \frac{95.0824z^2(z-0.9894)(z-0.9516)(z-0.7408)(z+0.1348)}{z^2(z-0.9894)(z+0.03281)(z-0.02755)} \times \frac{(z-0.04321)(z+0.001621)(z^2-1.785z+0.7994)}{(z+0.001623)(z^2-1.961z+0.9616)(z^2-1.316z+0.4805)}$$

$$\frac{u}{\int(ref-x)} = \frac{-77.5267z^2(z-0.7408)(z-0.9887)(z+0.04865)}{z^2(z-0.9894)(z+0.03281)(z-0.02755)} \times \frac{(z-0.000262)(z^2-1.963z+0.9631)}{(z+0.001623)(z^2-1.961z+0.9616)} \times \frac{(z^2-1.528z+0.6715)}{(z^2-1.316z+0.4805)}$$

IV. 모의실험

설계된 제어기의 구분 및 비교를 위해 이 논문에서는 다음의 명칭으로 사용한다.

▶연속시간 H_2/H_∞ 혼합제어기: MATLAB의 "hinfmix" 명령을 이용하여 구한 제어기

▶ 혼합 H_2/H_∞ 디지털 : 이 논문에서 제시한 과정을 통해 구한 제어기

모의실험 수행은 i) 연속시간 H_2/H_∞ 혼합제어기와 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기의 성능비교, ii) 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기의 이산시간 모의실험으로 구분하여 수행한다. 모의실험의 수행 결과는 다음과 같다.

ii) 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기의 모의실험

울림을 적용하여 얻어진 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기가 연속시간에서의 성능을 보장하는 것을 확인하기 위하여 다음과 같은 이산시간 모의실험을 수행한다.

그림 7은 수레위치와 진자각도의 시간응답이다. 그림 8은 제어입력의 파형을 나타낸다.

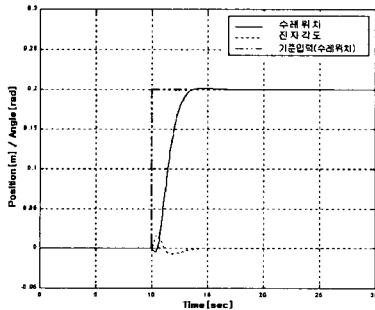


그림 7. 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어시스템의 계단 응답 ($h=0.01[\text{sec}]$)

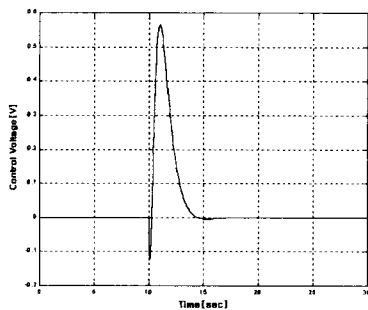


그림 8. 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어시스템의 제어 입력 ($h=0.01[\text{sec}]$)

모의 실험에서는 실물 실험 장치에서와 같은 잡음의 영향이 없기 때문에 매우 깨끗한 응답을 관찰할 수 있다. 위의 모의실험 결과로부터, 울림을 적용하여 얻어진 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기는 이산시간에서 연속시간의 성능을 그대로 유지함을 알 수 있다.

V. 결론

이 논문에서 제시한 새로운 연속시간 H_2/H_∞ 혼합 제어기 설계 절차 6단계의 과정과 Chen, Francis가 제시한 7단계 과정[2]을 통하여 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어기를 설계했다. 또한, 같은 제어대상에 대하여 잘 알려진 연속시간 제어방법을 비교하였다. 본 논문에서 제시한 혼합 H_2/H_∞ 디지털 제어 방법의 타당성을 입증하고, 연속시간 성능에 대해서, 기존의 이산화 방법에 의해 나타나는 성능열화가 나타나지 않음을 확인하였다.

참고문헌

- [1] H.T. Toivonen, "Optimal sampled-data control problem for sampled-data system" Int. J. Control, Vol. 70, No. 4, pp.579-602.
- [2] T. Chen and B. A. Francis, " H_∞ -optimal sampled-data control: computation and design", *Automatica*, vol. 32, no. 2, pp. 223-228, 1996.
- [3] 박종우, 이상철, 이상효, "도립진자 시스템의 LFR에 의한 LMI 혼합 H_2/H_∞ 제어", 한국통신학회 논문지 제25권 제7A, 2000.7.
- [4] T. Chen and B. A. Francis, " H_2 -optimal sampled-data control", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 36, no. 4, pp. 387-397, 1991.
- [5] 박종우, 이상철 "탄성-질량시스템의 위치제어를 위한 강건 제어기 설계", 대한전자공학회, 제36권 T편 제3호, pp. 219-227, 1999.
- [6] 박종우, 이석배, 이상철, 이종용, 조도현, 이상효, "LMI를 이용한 도립진자의 H_2/H_∞ 혼합 제어", 제13차 한국자동제어학술회의 논문집, pp. 553-556, 1998



박 종 우(Jong-Woo, Park)
1984년 건국 대학교 공학사
1990년 광운대학교 공학석사
2000년 동대학원 공학박사
1992년~현재 재능대학 정보통신 계
열 부교수

※ 관심분야 : 멀티미디어 통신, DSP



곽 칠 성(Chil-Seong, Kwak)
1981년 광운대학 공학사
1986년 동대학원 공학석사
1991년~현재 재능대학
정보전자 계열 부교수

※ 관심분야:응용전자, 회로설계, 마이크로 프로세
서 설계