

論文2000-37SD-2-5

Airy 함수와 WKB 해를 이용한 언덕형 굴절을 분포를 갖는 광섬유 해석

(Analysis of Optical Fibers with Graded-Index Profile By a
Combination of Modified Airy Functions and WKB
Solutions)

鄭民燮*, 金永文*, 金昌敏*

(Min-Sub Chung, Young-Moon Kim, and Chang-Min Kim)

요 약

수정된 Airy 함수들과 WKB 시도해를 조합하여 언덕형 굴절을 분포를 가지는 광섬유에 대한 매우 정확한 고유방정식을 수학적으로 유도하였다. 적절한 경계조건을 적용하여 일반적인 WKB 방법이 가지는 고유한 오차 문제를 개선하도록 위상 천이 보정항 δ 를 이끌어냈다. 모의 전산을 통하여, 유도된 고유방정식의 결과가 유한차분법에 의한 결과와 잘 일치함을 보였다.

Abstract

An almost exact eigenvalue equation for optical fibers with graded-index profile is derived mathematically based on a combination of the modified Airy functions and the WKB trial solution. By applying proper boundary conditions, a phase shift correction term δ is found out which improves the inherent error problems of the conventional WKB method. It is shown through computer simulations that results of the derived eigenvalue equation are in excellent agreement with those of the finite-element method.

I. 서 론

광섬유는 광통신용 전송매체로서 매우 중요한 위치를 차지하고 있다. 특히, 장거리 전송에 있어서 저분산 특성을 갖도록 광섬유를 설계하는 것이 무엇보다 중요하다. 유한요소법(FEM: Finite Element Method)과 같은 수치해석 기법들의 급속한 발전으로 말미암아 현재는 임의의 굴절을 분포를 갖는 광섬유에 대하여도 매

우 정교한 설계가 가능하다. 그러나 수치해석기법들은 미분방정식과 연계된 행렬식 표현에만 의존할 뿐이며, 물리적 개념을 전달하는 데는 한계를 지니고 있다. 반면에, 수학적 해석 방법은 물리적 의미를 전달할뿐 아니라, 간명한 고유방정식을 제공한다라는 장점을 지니고 있다.

Helmholtz 방정식에 기초한 광섬유의 수학적 해석은 코어의 굴절율이 균일할 경우에만 정확한 해를 줄 수 있다. 언덕형 굴절을 분포를 갖는 광섬유의 경우에는 단지 근사적인 방법만이 이용가능하였다. 이들중에서 WKB 방법이 가장 널리 사용된다^[1-6]. WKB 방법은 굴절율의 변화가 파장(λ)에 비해 충분히 천천히 변한다는 가정하에 출발하므로, 그 결과는 요구되는 수준에

* 正會員, 서울市立大學校 電子電氣工學部

(Dept. of Electronics Eng., The University of Seoul)

接受日字: 1999年8月23日, 수정완료일: 2000年1月19日

비해 부정확하다. Field 해는 회귀점에서 발산하고, 분산 곡선은 차단 영역 근처에서 큰 오차를 보인다. 이것은 언덕형 경사내의 회귀점에서 위상 천이 ψ_l 가 구해진 정규화 전파 상수의 상대적 위치에 관계없이 $\pi/4$ 로 고정되었기 때문이다. Srivastava는 WKB 방법의 오차가 이렇게 위상 천이값을 고정시킨것에 기인함을 밝혀냈다^[2]. 그는 회귀점에서의 위상 천이 ψ_l 가, 모드가 차단영역으로 갈수록 0이 되며, 모드가 강하게 confined 될수록 $\pi/4$ 로 근사화됨을 이끌어냈다.

이러한 WKB의 단점을 극복하기 위해 수정된 WKB 방법이 제안되었으며 truncated 언덕형 굴절을 분포를 가지는 평판형 도파로에 적용시켰다. Xiang은 가상 회귀점의 개념을 소개하였고, 굴절율이 불연속인 부근에서의 전계를 정교하게 표현하려고 시도하였다^[4]. Roy는 수정된 Airy 함수를 이용하여 임의의 모양을 가지는 양자우물에서 tunneling 계수들을 표현하기 위해 시도 해로서 Airy 함수의 수정된 형태를 소개하였다^[5].

본 논문에서는 임의의 언덕형 굴절을 분포를 가지는 광섬유에 대하여 정밀한 수학적 해석을 하였다. 가능한 정확한 시도해를 보장하기 위해서, 즉 회귀점에서 수렴하고 클래딩 영역에서 거의 정확한 해를 갖도록, 코어 영역에서는 수정된 Airy 함수를 그리고 클래딩 영역에서는 WKB 시도해를 사용하였다. 이러한 두 함수의 조합으로, 일반적인 WKB 방법의 고유한 오차를 상당히 줄이는 위상 천이 교정항 δ 를 발견해냈다. 이는 field 해로써 Airy 함수의 점근형태를 사용하는 일반적인 WKB 방법과의 분명한 차이를 보여준다.

첫 번째로 임의 형태의 언덕형 굴절을 분포를 가지는 광섬유에 대한 일반적이고도 정밀한 고유방정식을 유도하였다. 이로부터 정의된 field 해는 회귀점에서 수렴할뿐만 아니라 매우 정확한 파의 형태이며, 따라서 회귀점에서 위상 천이의 정밀도를 향상시킴을 알수 있다. 제안된 방법에 의한 결과는 유한요소법에 의한 결과와 고유치뿐만 아니라 고유함수에서도 거의 정확히 일치하였고, 일반적인 WKB 방법을 크게 향상시켰음을 보였다.

II. 광섬유의 횡면 field 해와 고유방정식

광섬유의 파동 형태를 기술하는 횡면 field 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{d^2}{dr^2} R(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R(r) + \left(k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) R(r) = 0 \tag{1}$$

$$l = \begin{cases} \nu - 1 & \text{HE mode } (\nu \geq 1) \\ 1 & \text{TE/TM mode } (\nu = 0) \\ \nu + 1 & \text{EH mode } (\nu \geq 1) \end{cases} \tag{2}$$

ν 는 azimuthal 양자수이고, l 은 $LP_{l,\nu}$ 의 모드수이다.

식 (1)에 다음 식 (3)을 대입하면

$$r = \exp(x) \tag{3}$$

아래식과 같이 변형된다.

$$\frac{d^2}{dx^2} R(x) + \Gamma_x^2(x) R(x) = 0 \tag{4}$$

여기서,

$$\Gamma_x^2(x) = \exp(2x) \left(k^2 n^2(x) - \beta^2 - \frac{l^2}{\exp(2x)} \right) \tag{5}$$

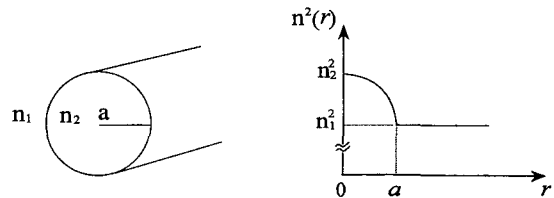


그림 1. 언덕형 광섬유의 굴절율 분포
Fig. 1. Refractive index profile of graded-index optical fiber.

그림 1을 보면 굴절율 분포는 다음과 같이 나타낼수 있다.

$$n^2(r) = n_1^2 + (n_2^2 - n_1^2)f(r), \quad 0 \leq f(r) \leq 1 \tag{6}$$

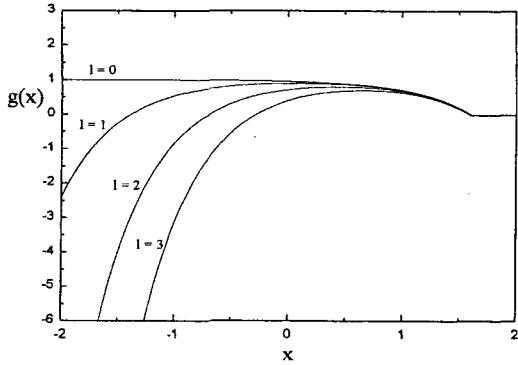
식 (4)의 $\Gamma_x(x)$ 는 정규화 주파수 ν 와 정규화 전파 상수 b 로 다시 쓸수 있다.

$$\Gamma_x^2(x) = \exp(2x) \frac{\nu^2}{a^2} \{g(x) - b\} \tag{7}$$

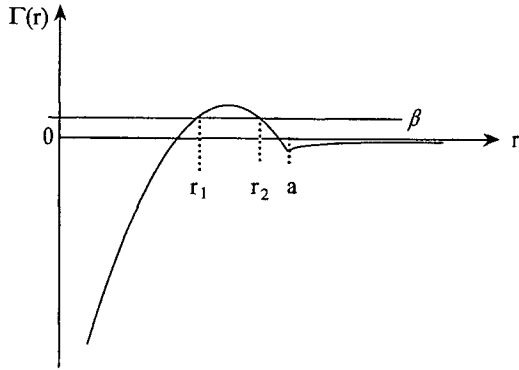
여기서,

$$g(x) = f(x) - \frac{a^2}{v^2} l^2 \exp(-2x) \quad (8)$$

v 와 b 의 정의는 그림 4에 주어진다.



(a)



(b)

그림 2. $a = 5\mu m$, $v = 20$ 일 때 l 값에 따른 $g(x)$ 의 변화

(a) x 의 함수 $g(x)$

(b) $g(x)$ 의 전형적인 그림

Fig. 2. Variation of $g(x)$ for $a = 5\mu m$, $v = 20$

(a) $g(x)$ as a function of x

(b) Typical graph of $g(x)$

그림 2(a)는 l 에 따른 $g(x)$ 가 그려져있고, 회귀점 (x_1, x_2)과 코어 경계 (x_a)의 관점에서 본 $g(x)$ 의 자세한 묘사는 그림 2(b)에 그려져있다. 그림 2(a)를 보면 $l=0$ 인 기본 모드에서는 오직 한 개의 회귀점 (x_2)만이 존재함을 알수 있다.

식 (4)의 시도해는 다음과 같이 각 영역에 따라 수정된 Airy 함수와 WKB 시도해의 조합으로써 표현될 수 있다.

$$R(x) = \begin{cases} \frac{A}{\sqrt{\eta_{x1}'(x)}} Ai(\eta_{x1}(x)) & x \leq x_1 \quad (9a) \\ \frac{A}{\sqrt{\xi_{x1}'(x)}} Ai(-\xi_{x1}(x)) & x_1 \leq x < x_2 \quad (9b) \\ \frac{B}{\sqrt{\xi_{x2}'(x)}} Ai(-\xi_{x2}(x)) + \frac{C}{\sqrt{\xi_{x2}'(x)}} Bi(-\xi_{x2}(x)) & x_1 < x \leq x_2 \quad (9c) \\ \frac{B}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai(\eta_{x2}(x)) + \frac{C}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi(\eta_{x2}(x)) & x_2 \leq x \leq x_a \quad (9d) \\ \frac{D}{\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp(-\int_a^x P_x(x) dx) & x \geq x_a \quad (9e) \end{cases}$$

여기서,

$$\eta_{x1}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_x^{x1} P_x(x) dx \right)^{2/3}, \quad P_x(x) = \sqrt{-\Gamma_x^2(x)} \quad (10a)$$

$$\xi_{x1}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x1}^x Q_x(x) dx \right)^{2/3}, \quad Q_x(x) = \sqrt{\Gamma_x^2(x)} \quad (10b)$$

$$\eta_{x2}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x2}^x P_x(x) dx \right)^{2/3}, \quad P_x(x) = \sqrt{-\Gamma_x^2(x)} \quad (10c)$$

$$\xi_{x2}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_x^{x2} Q_x(x) dx \right)^{2/3}, \quad Q_x(x) = \sqrt{\Gamma_x^2(x)} \quad (10d)$$

식 (10)과 (11)에서 η_{x1} , ξ_{x1} , η_{x2} , 그리고 ξ_{x2} 의 값은 항상 양수이다. 그림 3은 $Ai(y)$ 와 $Bi(y)$ 에 대한 그림이다.

그림 3으로부터, 함수 ξ_{x1} 과 ξ_{x2} 는 두 회귀점 내부 영역에 대응되고, ξ_{x1} 과 ξ_{x2} 는 두 회귀점 밖의 왼쪽과 오른쪽 코어 영역에 대응됨을 볼 수 있다.

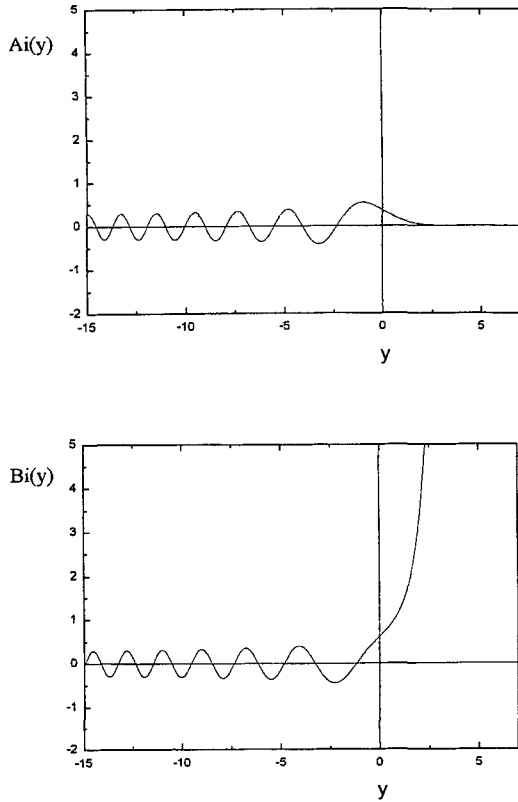


그림 3. Airy 함수 $Ai(y)$, $Bi(y)$
 Fig. 3. Plots of Airy functions $Ai(y)$, $Bi(y)$.

III. 고유방정식의 유도

1. 코어 영역에서의 경계조건

식 (9b)와 (9c)의 점근형태는 각각 다음과 같다.

$$\frac{A}{\sqrt{\xi_{x1}'(x)}} Ai(-\xi_{x1}(x)) \Rightarrow \frac{A}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \sin\left(\int_{x1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{B}{\sqrt{\xi_{x2}'(x)}} Ai(-\xi_{x2}(x)) \\ & + \frac{C}{\sqrt{\xi_{x2}'(x)}} Bi(-\xi_{x2}(x)) \\ \Rightarrow & \frac{B}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \sin\left(\int_x^{x2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ & + \frac{C}{\sqrt{\pi Q_x(x)}} \cos\left(\int_x^{x2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (12b)$$

식 (12)로부터 다음의 연속 조건들을 적용한다.

1) field의 연속

$$\begin{aligned} & A \sin\left(\int_{x1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ & = B \sin\left(\int_x^{x2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ & + C \cos\left(\int_x^{x2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (13)$$

2) field의 미분의 연속

$$\begin{aligned} & A \cos\left(\int_{x1}^x Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ & = -B \cos\left(\int_x^{x2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \\ & + C \sin\left(\int_x^{x2} Q_x(x) dx + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

다음의 관계를 고려하면

$$\int_{x1}^{x2} Q_x(x) dx = \int_{x1}^x Q_x(x) dx + \int_x^{x2} Q_x(x) dx \quad (15)$$

아래와 같은 고유 방정식이 얻어진다.

$$\int_{x1}^{x2} Q_x(x) dx = (\mu - 1)\pi + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) \quad (16)$$

$\mu = 1, 2, 3, \dots$

여기서,

$$\delta = \tan^{-1}\left(-\frac{C}{B}\right)$$

식 (9)에 $C=0$ 을 대입하면, δ 는 0이 되고 고유방정식은 일반적인 WKB 방법의 고유방정식과 같게 된다^[1].

2. x_a 에서의 경계 조건

1) field의 연속

$$\begin{aligned} & \frac{B}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai(\eta_{x2}(x)) \\ & + \frac{C}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi(\eta_{x2}(x)) \Big|_{x=x_a^-} \\ & = \frac{D}{\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp\left(-\int_{x_a}^x P_x(x) dx\right) \Big|_{x=x_a^+} \end{aligned} \quad (18)$$

2) field의 미분이 연속

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left[\frac{B}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai(\eta_{x2}(x)) \right]_{x=x_a^-} \\ & + \frac{d}{dx} \left[\frac{C}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi(\eta_{x2}(x)) \right]_{x=x_a^-} \\ & = \frac{d}{dx} \left[\frac{D}{\sqrt{\pi P_x(x)}} \exp\left(-\int_{x_a}^x P_x(x) dx\right) \right]_{x=x_a^+} \end{aligned} \quad (19)$$

식 (18)과 (19)로부터 다음의 관계식이 얻어진다.

$$-\frac{C}{B} = \frac{\eta_{x2}'(x_a^-)Ai'(\eta_{x2}(x_a^-)) + \rho Ai(\eta_{x2}(x_a^-))}{\eta_{x2}'(x_a^-)Bi'(\eta_{x2}(x_a^-)) + \rho Bi(\eta_{x2}(x_a^-))} \quad (20)$$

식 (20)의 유도 과정은 부록 A에 자세히 나와있다.

식 (16)과 (20)을 조합하면, 다음과 같은 고유방정식을 얻을 수 있다.

$$\int_{x_1}^{x_2} Q_x(x) dx = (\mu - 1)\pi + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\pi + \tan^{-1} \left\{ \frac{\eta_{x2}'(x_a^-)Ai'(\eta_{x2}(x_a^-)) + \rho Ai(\eta_{x2}(x_a^-))}{\eta_{x2}'(x_a^-)Bi'(\eta_{x2}(x_a^-)) + \rho Bi(\eta_{x2}(x_a^-))} \right\} \quad (21)$$

여기서,

$$\rho = \left\{ \frac{1}{2} \frac{P_x'(x_a^+)}{P_x(x_a^+)} + P_x(x_a^+) - \frac{1}{2} \frac{\eta_{x2}''(x_a^-)}{\eta_{x2}'(x_a^-)} \right\} \quad (22)$$

δ 는 일반적인 WKB 방법의 오차를 보정하는 부가적인 요소이므로 위상 천이 보정항으로 간주될 수 있다.

IV. r 에 대한 함수로서의 고유 방정식

1. field 표현식

식 (5), (10), 그리고 (11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Gamma_x^2(x) = r^2 \left(k^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right) = r^2 \Gamma^2(r) \quad (23)$$

$$\eta_{x1}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_x^{x_1} P_x(x) dx \right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2} \int_r^{r_1} P(r) dr \right)^{2/3} = \eta_1(r) \quad (24a)$$

$$\xi_{x1}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x_1}^x Q_x(x) dx \right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2} \int_{r_1}^r Q(r) dr \right)^{2/3} = \xi_1(r) \quad (24b)$$

$$\eta_{x2}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x_2}^x P_x(x) dx \right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2} \int_{r_2}^r P(r) dr \right)^{2/3} = \eta_2(r) \quad (25a)$$

$$\xi_{x1}(x) = \left(\frac{3}{2} \int_{x_1}^x Q_x(x) dx \right)^{2/3} = \left(\frac{3}{2} \int_{r_1}^r Q(r) dr \right)^{2/3} = \xi_1(r) \quad (25b)$$

$$P_x(x) = \sqrt{-\Gamma_x^2(x)} = r\sqrt{-\Gamma^2(r)} = rP(r) \quad (26a)$$

$$Q_x(x) = \sqrt{\Gamma_x^2(x)} = r\sqrt{\Gamma^2(r)} = rQ(r) \quad (26b)$$

식 (24)에서 (26)으로부터, $\eta_x(x)$, $\xi_x(x)$ 의 미분은

$$\frac{d}{dx} \xi_x(x) = \frac{Q_x(x)}{\sqrt{\xi_x(x)}} = r \frac{d}{dr} \xi(r) \quad (27a)$$

$$\frac{d}{dx} \eta_x(x) = \frac{P_x(x)}{\sqrt{\eta_x(x)}} = r \frac{d}{dr} \eta(r) \quad (27b)$$

와 같고, 식 (24)에서 (27)을 이용해서 식 (9)의 field 함수를 변수 r 에 대해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{A}{\sqrt{r\eta_1'(r)}} Ai(\eta_1(r)) \quad r \leq r_1 \quad (28a)$$

$$\frac{A}{\sqrt{r\xi_1'(r)}} Ai(-\xi_1(r)) \quad r \geq r_1 \quad (28b)$$

$$R(x) = \begin{cases} \frac{B}{\sqrt{r\xi_2'(r)}} Ai(-\xi_2(r)) + \frac{C}{\sqrt{r\xi_2'(r)}} Bi(-\xi_2(r)) & r \leq r_2 \end{cases} \quad (28c)$$

$$\frac{B}{\sqrt{r\eta_2'(r)}} Ai(\eta_2(r)) + \frac{C}{\sqrt{r\eta_2'(r)}} Bi(\eta_2(r)) \quad r_2 \leq r \leq a \quad (28d)$$

$$\frac{D}{\sqrt{\pi r P(r)}} \exp\left(-\int_a^r P(r) dr\right) \quad r \geq a \quad (28e)$$

2. 고유 방정식

다음의 관계를 이용해서

$$\frac{d^2}{dx^2} \eta_x(x) = r \frac{d}{dr} \eta(r) + r^2 \frac{d^2}{dr^2} \eta(r) \quad (29)$$

$$\frac{d}{dx} P_x(x) = rP(r) + r^2 \frac{d}{dr} P(r) \quad (30)$$

x 의 함수로 표현된 고유 방정식 (21)은 다음과 같이 r 에 대한 함수로 바뀌어진다.

$$\int_{r_1}^{r_2} Q(r) dr = (\mu - 1)\pi + \left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \delta\right) \quad (\mu = 1, 2, 3, \dots)$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\pi + \tan^{-1} \left\{ \frac{\eta_2'(a^-) Ai'(\eta_2(a^-)) + \frac{\rho}{a} Ai(\eta_2(a^-))}{\eta_2'(a^-) Bi'(\eta_2(a^-)) + \frac{\rho}{a} Bi(\eta_2(a^-))} \right\} \quad (31)$$

여기서,

$$\rho = a \left\{ \frac{1}{2} \frac{P'(a^+)}{P(a^+)} + P(a^+) - \frac{1}{2} \frac{\eta_2''(a^-)}{\eta_2'(a^-)} \right\} \quad (32)$$

식 (31)에서 $\pi/4$ 는 안쪽 회귀점 r_1 에서의 위상 천이로써 그리고 $(\pi/4 + \delta)$ 는 바깥쪽 회귀점 r_2 에서의 위상 천이로써 해석되어진다. 위상 천이 보정항 δ 는 식 (2b)에서 dip point의 존재로 말미암은 것이며 일반적인 WKB에서는 0이 된다. $l=0$ 인 기본 모드에서는 적분식의 아래 구간 r_1 은 0이 되고 단 한 개의 회귀점만이 존재한다.

식 (31)의 고유방정식을 평가하기 위해서는 δ 의 표현식을 좀더 계산 가능한 식으로 바꿀 필요가 있다. 이를 위해 우선 ρ 를 $P(r)$ 에 관한 식으로 유도하고 [부록 B], Airy 함수 Ai, Bi 와 이들의 도함수들을 양의 차수의 Bessel 함수로 표현한다[부록 C]. 마지막으로 분수식 $\tan \delta$ 를 복잡하지 않고 계산하기 쉬운 형태로 바꾼다[부록 D].

$$\delta = \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{-\left(\rho_1 \psi(a^-) + \frac{2}{3}\right) I_{1/3}(\psi(a^-))}{\left(\rho_1 \psi(a^-) + \frac{2}{3}\right) I_{1/3}(\psi(a^-)) + \left(\psi(a^-) + \frac{4}{3} \rho_1\right) I_{2/3}(\psi(a^-))} + \frac{\psi(a^-) + \frac{4}{3} \rho_1}{\psi(a^-) + \frac{4}{3} \rho_1} I_{2/3}(\psi(a^-))} \right. \quad (33)$$

$$\left. \frac{-\psi(a^-) I_{4/3}(\psi(a^-)) + \psi(a^-) I_{4/3}(\psi(a^-)) + \rho_1 \psi(a^-) I_{5/3}(\psi(a^-))}{\psi(a^-) I_{5/3}(\psi(a^-)) + \rho_1 \psi(a^-) I_{5/3}(\psi(a^-))} \right\}$$

여기서,

$$\psi(a^-) = \int_{r_2}^{a^-} P(r) dr \quad (34)$$

그리고

$$\rho_1 = \left\{ \frac{1}{2} \frac{P'(a^+)}{P(a^+)P(a^-)} + \frac{P(a^+)}{P(a^-)} - \frac{1}{2} \frac{P'(a^-)}{P^2(a^-)} + \frac{1}{6\psi(a^-)} \right\}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{a^3} \frac{1}{P(a)^3} \left\{ \frac{a}{2} f'(a^-) \right\} + \frac{1}{6\psi(a^-)}$$

$$\approx 1$$

식 (35)의 근사화 과정에서, 주어진 굴절률 분포가 천천히 변화하고, $1/6\psi(a^-)$ 항은 무시할만하다고 가정하였다. 그러나 모의 전산에서는 모든 항이 고려되었다.

V. 모의 전산

유도된 고유 방정식의 정확성을 평가하기 위해 유한 요소법(FEM)을 수행하였고, 일반적인 WKB도 비교의 목적으로 수행하였다. 그림 4에는 세가지 방법에 대한 $v-b$ 곡선이 그려져 있다.

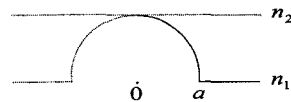
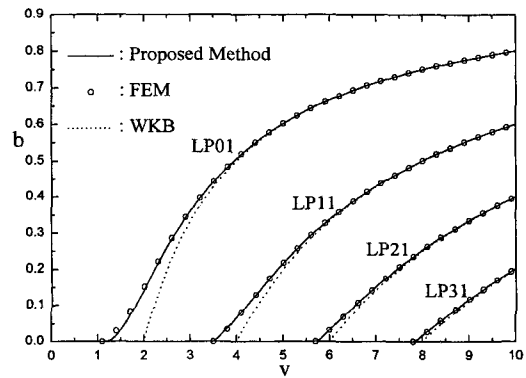


그림 4. 언덕형 굴절률 분포를 가지는 광섬유의 $v-b$ 곡선

Fig. 4. $v-b$ curves for fibers with index profile of.

$$n^2(r) = \begin{cases} n_1^2 + (n_2^2 - n_1^2) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) & 0 \leq r \leq a \\ n_1^2 & r \geq a \end{cases}$$

$$v = k_0 a \sqrt{n_2^2 - n_1^2}, \quad b = (\beta^2/k_0^2 - n_1^2)/(n_2^2 - n_1^2)$$

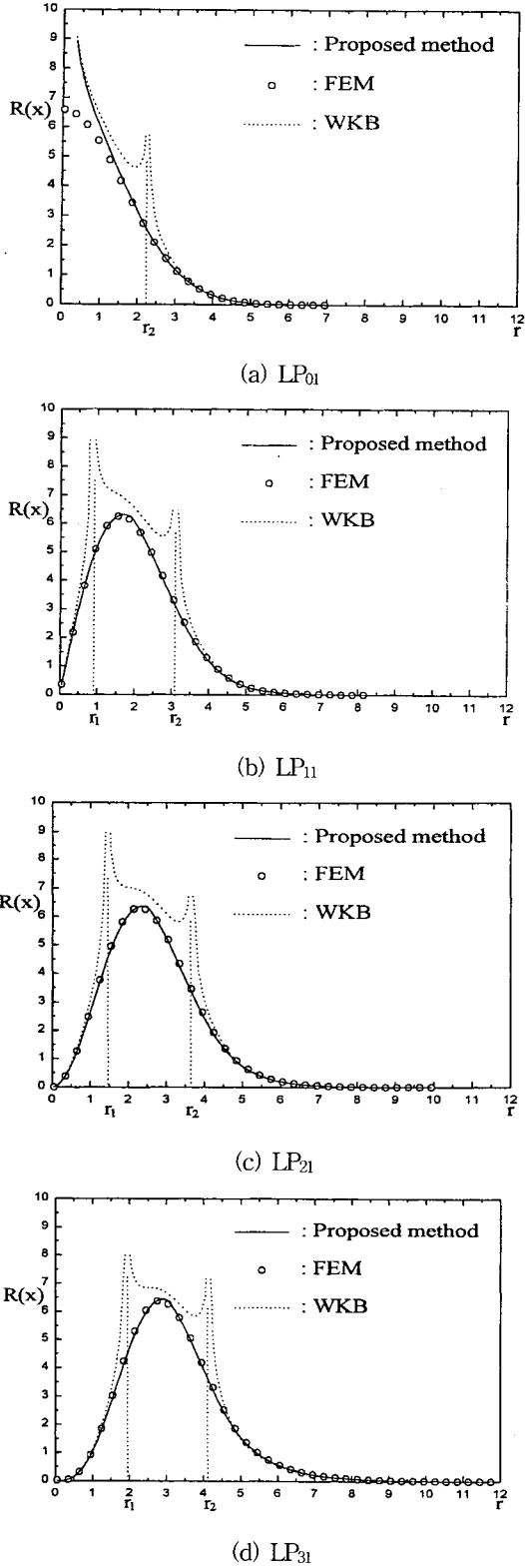


그림 5. $v=9.5$ 에서 횡면 field 함수 $R(r)$
 Fig. 5. Transverse field functions $R(r)$ for $v=9.5$.

FEM의 결과가 정확하다는 가정하에, 본 논문에서 제안된 방법에 의한 결과가 거의 정확함을 알 수 있다. 반면, 일반적인 WKB 방법은 차단 영역 근처에서 꽤 큰 오차를 보이고 있다.

그림 5에는 $v=9.5$ 일때 LP_{01} , LP_{11} , LP_{21} , 그리고 LP_{31} 모드의 횡면 field 함수가 그려져있다. FEM에 의한 정확한 field 해는 점들로 그려져 있다. 실선으로 그려진 제안된 방법에 의한 field 모양은 각 회귀점에서 연속인 반면, 점선으로 그려진 일반적인 WKB에 의한 field 분포는 각 회귀점에서 발산하고 있다. 제안된 방법에 의한 field 해는 단지 기본 모드 LP_{01} 에서 $r=0$ 일때를 제외하고 일반적으로 FEM에 의한 정확한 해와 잘 일치하고 있다. 그러나, $r=0$ 에서의 이러한 발산은 WKB가 관계되는 한 어떤 방법론에서도 발생하는것이라 생각된다. 왜냐하면 발산은 $r=0$ 부근에서 시도해의 분모에 기인되기 때문이다.

VI. 결 론

언덕형 굴절률 분포를 갖는 광섬유를 해석하기 위하여 정밀한 수학적 해석 방법을 제안하였다. 시도해로써, 코어 영역에서는 수정된 Airy 함수를, 그리고 클래딩 영역에서는 WKB 파의 형태를 취하였다. 이러한 시도 해에 기초하여 임의 형태의 굴절률 분포를 가지는 광섬유에 적용 가능한 매우 정확하고 간명한 형태의 고유 방정식을 유도하였다.

유도된 방정식에서 주목할만한 점은 일반적인 WKB에 내재된 오차를 상당히 줄이고, 요구되는 수준까지 정밀도를 높이기 위한 위상 천이 보정항 δ 의 존재이다. 모의 전산을 통하여, 제안된 방법에 의한 고유치와 고유함수가 FEM에 의한 정확한 결과와 거의 일치하는 반면, 일반적인 WKB에 의한 결과는 다소 오차가 있음을 보였다. 제안된 방법의 높은 정밀도는 사용된 시도해가 정확한 해와 매우 비슷하고, 회귀점에서의 위상 천이를 확실히 보정하기 때문이었다.

부록 A : 그림 2(b)의 dip (x_a)에서의 미분 연속성

식 (19)의 각 항을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [\eta_{x2}'(x)^{-1/2} Ai(\eta_{x2}(x))] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\eta_{x2}''(x)}{\eta_{x2}'(x)\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai(\eta_{x2}(x)) \\ & \quad + \frac{\eta_{x2}'(x)}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai'(\eta_{x2}(x)) \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [\eta_{x2}'(x)^{-1/2} Bi(\eta_{x2}(x))] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\eta_{x2}''(x)}{\eta_{x2}'(x)\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi(\eta_{x2}(x)) \\ & \quad + \frac{\eta_{x2}'(x)}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi'(\eta_{x2}(x)) \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} [P(x)^{-1/2} \exp(-\int_{x_a}^x P_x(x) dx)] \\ &= -\frac{1}{2} \frac{P_x'(x)}{P_x(x)\sqrt{P_x(x)}} \exp(-\int_{x_a}^x P_x(x) dx) \\ & \quad - \frac{P_x(x)}{\sqrt{P_x(x)}} \exp(-\int_{x_a}^x P_x(x) dx) \end{aligned} \quad (A3)$$

위의 식들을 이용해서 식 (19)를 다시 쓰면

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \frac{\eta_{x2}''(x)}{\eta_{x2}'(x)} \left\{ \frac{B}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai(\eta_{x2}(x)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{C}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi(\eta_{x2}(x)) \right\} \\ & + \eta_{x2}'(x) \left\{ \frac{B}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Ai'(\eta_{x2}(x)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{C}{\sqrt{\eta_{x2}'(x)}} Bi'(\eta_{x2}(x)) \right\} \Big|_{x=x_a^-} \\ &= \exp(-\int_{x_a}^x P(x) dx) \left\{ -\frac{1}{2} \frac{DP_x'(x)}{P_x(x)\sqrt{\pi P_x(x)}} \right. \\ & \quad \left. - \frac{DP_x(x)}{\sqrt{\pi P_x(x)}} \right\} \Big|_{x=x_a^+} \end{aligned} \quad (A4)$$

와 같고, 식 (A4)는 식 (18)의 도움으로 다시 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{aligned} & \eta_{x2}'(x_a^-) \left\{ \frac{B}{\sqrt{\eta_{x2}'(x_a^-)}} Ai'(\eta_{x2}(x_a^-)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{C}{\sqrt{\eta_{x2}'(x_a^-)}} Bi'(\eta_{x2}(x_a^-)) \right\} \\ &= -\frac{D}{\sqrt{\pi P_x(x_a^+)}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{P_x'(x_a^+)}{P_x(x_a^+)} \right. \\ & \quad \left. + P_x(x_a^+) - \frac{1}{2} \frac{\eta_{x2}''(x_a^-)}{\eta_{x2}'(x_a^-)} \right\} \end{aligned} \quad (A5)$$

식 (A5)를 식 (18)로 나누고 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \eta_{x2}'(x_a^-) \{BAi'(\eta_{x2}(x_a^-)) + CBi'(\eta_{x2}(x_a^-))\} \\ &= -\rho \{BAi(\eta_{x2}(x_a^-)) + CBi(\eta_{x2}(x_a^-))\} \end{aligned} \quad (A6)$$

애거서,

$$\rho = \left\{ \frac{1}{2} \frac{P_x'(x_a^+)}{P_x(x_a^+)} + P_x(x_a^+) - \frac{1}{2} \frac{\eta_{x2}''(x_a^-)}{\eta_{x2}'(x_a^-)} \right\} \quad (A7)$$

식 (20)은 식 (A6)과 같은 형태이다.

부록 B : P(r)에 관한 표현식 ρ

η₂'(r)과 η₂''(r)은 P(r)에 관해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\eta_2'(r) = \left(\frac{3}{2} \int_{r_2}^r P(r) dr \right)^{-1/3} P(r) = \frac{1}{\sqrt{\eta_2(r)}} P(r) \quad (B1)$$

$$\eta_2''(r) = P'(r) \frac{1}{\sqrt{\eta_2(r)}} - \frac{1}{2} \frac{P(r)}{\sqrt{\eta_2(r)}} \frac{P(r)}{\eta_2(r)\sqrt{\eta_2(r)}} \quad (B2)$$

또한,

$$\frac{\eta_2''(r)}{\eta_2'(r)} \Big|_{r=a^-} = \frac{P'(a^-)}{P(a^-)} - \frac{1}{2} \frac{P(a^-)}{\eta_2(a^-)\sqrt{\eta_2(a^-)}} \quad (B3)$$

이 되고, 따라서 ρ는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \rho &= a \left\{ \frac{1}{2} \frac{P'(a^+)}{P(a^+)} + P(a^+) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \frac{P'(a^-)}{P(a^-)} + \frac{1}{4} \frac{P(a^-)}{\eta_2(a^-)\sqrt{\eta_2(a^-)}} \right\} \\ &= a \left\{ \frac{1}{2} \frac{P'(a^+)}{P(a^+)} + P(a^+) - \frac{1}{2} \frac{P'(a^-)}{P(a^-)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{6} \frac{P(a^-)}{\psi(a^-)} \right\} \end{aligned} \quad (B4)$$

$$\psi(a^-) = \int_{r_2}^{a^-} P(r) dr \quad (B5)$$

부록 C : Airy 함수들로 표현된 Ai, Ai', Bi, Bi'

Bessel 함수의 순환식은 다음과 같다.

$$2I_\nu'(y) = I_{\nu-1}(y) + I_{\nu+1}(y) \quad (C1)$$

$$\frac{2y}{y} I_\nu(y) = I_{\nu-1}(y) - I_{\nu+1}(y) \quad (C2)$$

위의 두 식으로부터, 다음의 식들이 나온다.

$$I_{-1/3}(y) = I_{2/3-1}(y) = \frac{4}{3y} I_{2/3}(y) + I_{5/3}(y) \quad (C3)$$

$$I_{-1/3}'(y) = -\frac{4}{9y^2} I_{2/3}(y) - \frac{1}{3y} I_{5/3}(y) + I_{2/3}(y) \quad (C4)$$

$$I_{1/3}'(y) = \frac{1}{3y} I_{1/3}(y) + I_{4/3}(y) \quad (C5)$$

그러면 $Ai(y)$ 와 $Ai'(y)$ 는 다음과 같이 Bessel 함수로 표현된다.

$$\begin{aligned} Ai(y) &= \frac{\sqrt{y}}{3} \{I_{-1/3}(z) - I_{1/3}(z)\} \\ &= \frac{\sqrt{y}}{3z} \left\{ -zI_{1/3}(z) + \frac{4}{3}I_{2/3}(z) + zI_{5/3}(z) \right\} \end{aligned} \quad (C6)$$

$$\begin{aligned} Ai'(y) &= \frac{1}{6\sqrt{y}} \{I_{-1/3}(z) - I_{1/3}(z)\} \\ &\quad + \frac{y}{3} \{I_{-1/3}'(z) - I_{1/3}'(z)\} \\ &= \frac{y}{3z} \left\{ -\frac{2}{3}I_{1/3}(z) + zI_{2/3}(z) - zI_{4/3}(z) \right\} \end{aligned} \quad (C7)$$

또한 $Bi(y)$ and $Bi'(y)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Bi(y) &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3}} \{I_{-1/3}(z) + I_{1/3}(z)\} \\ &= \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{3}z} \left\{ zI_{1/3}(z) + \frac{4}{3}I_{2/3}(z) + zI_{5/3}(z) \right\} \end{aligned} \quad (C8)$$

$$\begin{aligned} Bi'(y) &= \frac{\sqrt{3}}{6\sqrt{y}} \{I_{-1/3}(z) \\ &\quad + I_{1/3}(z)\} + \frac{y}{3} \{I_{-1/3}'(z) + I_{1/3}'(z)\} \end{aligned} \quad (C9)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{y}{\sqrt{3}z} \left\{ \frac{2}{3}I_{1/3}(z) + zI_{2/3}(z) + zI_{4/3}(z) \right\} \\ z &= \frac{2}{3}y^{3/2} \end{aligned} \quad (C10)$$

부록 D : Bessel 함수들과 $P(r)$ 로

표현된 δ

부록 B와 C의 도움으로 식 (31)의 \tan^{-1} 항의 분모

와 분자를 좀더 쉽게 계산할수 있는 형태로 바꿀수 있다.

1. 분자항

$$\begin{aligned} &\eta_2'(a^-)Ai'(\eta_2(a^-)) \\ &= \frac{\sqrt{\eta_2'(a^-)}}{3\psi(a^-)} P(a^-) \left\{ -\frac{2}{3}I_{1/3}(\psi(a^-)) \right. \\ &\quad \left. + \psi(a^-)I_{2/3}(\psi(a^-)) - \psi(a^-)I_{4/3}(\psi(a^-)) \right\} \end{aligned} \quad (D1)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{a} Ai(\eta_2(a^-)) \\ &= \frac{\sqrt{\eta_2'(a^-)}}{3\psi(a^-)} \frac{\rho}{a} \left\{ -\psi(a^-)I_{1/3}(\psi(a^-)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3}I_{2/3}(\psi(a^-)) + \psi(a^-)I_{5/3}(\psi(a^-)) \right\} \end{aligned} \quad (D2)$$

2. 분모항

$$\begin{aligned} &\eta_2'(a^-)Bi'(\eta_2(a^-)) \\ &= \frac{\sqrt{\eta_2'(a^-)}}{\sqrt{3}\psi(a^-)} P(a^-) \left\{ \frac{2}{3}I_{1/3}(\psi(a^-)) \right. \\ &\quad \left. + \psi(a^-)I_{2/3}(\psi(a^-)) + \psi(a^-)I_{4/3}(\psi(a^-)) \right\} \end{aligned} \quad (D3)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\rho}{a} Bi(\eta_2(a^-)) \\ &= \frac{\sqrt{\eta_2'(a^-)}}{3\psi(a^-)} \frac{\rho}{a} \left\{ \psi(a^-)I_{1/3}(\psi(a^-)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3}I_{2/3}(\psi(a^-)) + \psi(a^-)I_{5/3}(\psi(a^-)) \right\} \end{aligned} \quad (D4)$$

식 (31)의 δ 에 식 (D1)에서 (D4)를 대입하고 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta &= \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{-\left\{ (\rho_1\psi(a^-) + \frac{2}{3})I_{1/3}(\psi(a^-)) \right. \right.}{\left. \left. (\rho_1\psi(a^-) + \frac{2}{3})I_{1/3}(\psi(a^-)) \right. \right.} \\ &\quad \left. \left. + \frac{\left(\psi(a^-) + \frac{4}{3}\rho_1 \right) I_{2/3}(\psi(a^-))}{\left(\psi(a^-) + \frac{4}{3}\rho_1 \right) I_{2/3}(\psi(a^-))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{-\psi(a^-)I_{4/3}(\psi(a^-))}{+\psi(a^-)I_{4/3}(\psi(a^-))} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{+\rho_1\psi(a^-)I_{5/3}(\psi(a^-))}{+\rho_1\psi(a^-)I_{5/3}(\psi(a^-))} \right\} \end{aligned} \quad (D5)$$

참 고 문 헌

[1] M. J. Adams, *An introduction to optical*

- waveguides, John Wiley & Sons, Ch. 8, 1981.
- [2] R. Srivastava, C. K. Kao, and R. V. Ramaswamy, "WKB analysis of planar surface waveguides with truncated index profiles", *J. Lightwave Technol.*, Vol. LT-5, No. 11 pp. 1605-1609, November 1987.
- [3] C. M. Kim and R. V. Ramaswamy, "WKB analysis of asymmetric directional couplers and its application to optical switches", *J. Lightwave Technol.*, Vol. LT-6, No. 6, pp. 1109-1118, June 1988.
- [4] F. Xiang and G. L. Yip, "A modified WKB method for the improved phase shift at a turning point", *J. Lightwave Technol.*, Vol. LT-12, No. 3, pp. 443-452, March 1994.
- [5] S. Roy, A. K. Ghatak, I. C. Goyal, and R. L. Gallawa, "Modified Airy function method for the analysis of tunneling problems in optical waveguides and quantum-well structures", *IEEE J. Quantum Electron.*, Vol. QE-29, No. 2, pp. 340-345, February 1993.
- [6] C. M. Kim and M. S. Chung, "Eigenvalue equations of N-parallel graded-index waveguides: WKB analysis", *IEEE J. Quantum Electron.*, Vol. QE-33, No. 9, pp. 1608-1613, September 1997.

 저 자 소 개

鄭 民 燮(正會員)

1970년 11월 20일생. 1995년 2월 서울시립대학교 전자공학과 공학사. 주관심분야는 도파/집적광학, 양자전자 등임

金 永 文(正會員)

1972년 8월 31일생. 1994년 2월 서울시립대학교 전자공학과 졸업. 1999년 2월 동 대학원 전자공학과 석사. 1999년 3월~현재 동 대학원 전자전기공학부 박사과정. 주관심분야는 도파/집적광학, 광 스위치/변조기, BPM, FEM 등 수치해석등임

金 昌 敏(正會員)第 35卷 D編 第 6號 參照

현재 서울시립대학교 전자전기공학부 교수