論文2000-37SC-6-1

비선형 섭동을 갖는 뉴트럴 시스템의 점근 안정을 위한 지연시간 종속 판별식

(Delay-Dependent Criterion for Asymptotic Stability of Neutral Systems with Nonlinear Perturbations)

朴 柱 炫 *

(Ju Hyun Park)

요 약

본 논문에서는 비선형 섭동을 가지는 뉴트럴 시스템의 점근 안정성에 관하여 고찰한다. 리아프노프 방식을 이용하여 시스템의 안정성을 판별할 수 있는 충분조건을 제시한다. 이 조건은 지연시간에 종속이며, 선형 행렬 부등식으로 표시되기 때문에 최적화 알고리즘을 이용하여 부등식 해를 쉽게 구할 수 있다는 장점이 있다. 마지막으로 제시된 이론의 유용성을 보이기 위하여 수치 예제를 보였다

주요어: 뉴트럴 시스템, 비선형 섭동, 시간종속, 리아프노브 방식, 선형행렬부등식

Abstract

In this paper, the problem of the stability analysis for linear neutral delay-differential systems with nonlinear perturbations is investigated. Using Lyapunov second method, a new delay-dependent sufficient condition for asymptotic stability of the systems in terms of linear matrix inequalities (LMIs), which can be easily solved by various convex optimization algorithms, is presented. A numerical example is given to illustrate the proposed method.

I. 서 론

뉴트럴 시스템 (Neutral Delay-Differential System)은 현재의 상태변수의 변화량이 과거의 상태변수의 변화량에 영향을 받는 미분 방정식이다. 다양한 형태의 뉴트럴 시스템에 관한 연구가 1960년대부터 많은 연구자들에 의하여 활발히 진행되어 왔다[1-4]. 주요 연구분야는 시스템의 해(solution)에 관한 존재유무(existence), 유일성(uniqueness), 한계치(boundedness), 공진(oscillation), 안정성(stability)등에 관한 것이었다.

최근에는 리아프노프(Lyapunov) 이론, 특성방정식(characteristic equation) 방법, 상태 궤도 접근법(state trajectory approach) 등을 이용하여 뉴트럴 시스템의 안정성 판별식(stability criteria)에 관한 연구가 많은 관심을 끌어 왔다[5-14]. 제시된 판별식은 지연시간의 포함 유무에 따라 지연시간 독립조건(delay-inpendent criterion)과 지연시간 종속조건(delay-dependent criterion)으로 나눌 수 있다. 그러나 제시된 결과들[5-14] 중 대부분이 시스템 행렬의 메저(matrix measure)나 놈(norm)으로 표현되는 판별식으로 안정성 판별의 적용시 제한적인 요소를 갖는다[6, 7, 8, 9, 11, 13]. 이러한 제한성을 극복하기 위하여 선형행렬부등식 (linear matrix inequality)을 이용한 연구결과가 Park-Won[12]에서 제시되었다. 하지만 뉴트럴 시스템에 비선형 섭동이 존재하는 경우의 연구는 아직까지 미흡한 형편이다. Khua-

* 正會員, 嶺南大學校 電子情報工學部

(Yeungnam University, School of Electrical Engineering and Computer Science)

接受日字:2000年5月29日, 수정완료일:2000年8月25日

sinov-Ynu'kova[13]가 처음으로 이 분야에 대하여 연구하였지만, 비선형 섭동의 크기가 상수의 한계값을 갖는 경우로 제한하였다. 선형행렬부등식을 이용하여 Park-Won[14]에 의해서 비선형 섭동이 상태변수의 항들로 한계값을 갖는 경우로 확장되었다.

본 연구에서는 기존의 두 연구결과에서 제시된 안정 판별식보다 향상된 결과를 리아프노브방식을 이용하여 제시한다. 이 새로운 결과 역시 선형행렬 부등식으로 표현되기 때문에 최근에 개발된 우수한 성능의 최적화 알고리즘[15]을 이용하면 쉽게 해를 구함으로써 안정성을 판별할 수 있다. 본 연구에서 제시된 판별식은 시간지연에 종속적인 조건이므로 안정성을 보장하는 지연시간의 허용 한계치(maximum allowable bound)를 구할 수 있다. 마지막으로 본 연구의 타당성을 보이기 위하여 예제를 통하여 기존의 결과와 비교한다.

이 논문에서는 $(\cdot)^T$는 벡터 또는 행렬의 전치를 의미하고, I은 적절한 차원의 단위행렬이며, $*$는 대칭부분(symmetric part)을 의미하고, $\|\cdot\|$은 유클리디안(Euclidean) 놈을 의미하고, 대칭행렬 X, Y에 대하여 $X > Y$ 혹은 $X \geq Y$은 행렬 $X-Y$가 양한정(positive definite), 준 양한정(postive semi-definite)를 나타낸다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 문제를 설정하고, 뉴트럴 시스템의 안정성을 보장하는 충분조건을 제시하고, III장에서는 예제를 통해서 제시된 결과의 유용성을 살펴본다. 마지막으로 IV장에서 결론을 내린다.

II. 문제의 설정 및 주요 결과

다음과 같이 섭동을 갖는 뉴트럴 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h) + C\dot{x}(t-h) + F(x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)) \tag{1}$$

여기서 초기 조건 함수는 다음과 같으며

$$x(t) = \phi(t), \quad \forall t \in [-h, 0], \tag{2}$$

$x(t) \in R^n$은 상태변수이며, $A, B, C \in R^{n \times n}$은 같은 차원의 상수 행렬이며, h는 양의 값으로 시간지연을 나타내며, $\phi(\cdot)$는 구간 $[-h, 0]$에서 연속적으로 미분 가능한 함수이다.

시스템 행렬 A는 Hurwitz 행렬이라고 가정하며, $F(x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h))$는 시스템에 존재하는 비선형 섭동으로 $x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h)$에 관한 벡터이며 다음의 성질을 만족한다.

$$\|F(x(t), x(t-h), \dot{x}(t-h))\| \leq \beta_0\|x(t)\| + \beta_1\|x(t-h)\| + \beta_2\|\dot{x}(t-h)\|, \tag{3}$$

여기서 β_0, β_1 그리고 β_2는 양의 상수이다.

위의 뉴트럴 시스템 (1)의 자세한 특성 및 안정성에 관한 여러 정의들은 문헌 [1], [4]를 참조하라.

본 연구의 주 목적은 시스템 (1)의 점근 안정을 위한 조건 식을 찾는 것이다. 본 연구에서는 지연시간에 종속인 판별식을 제시하는 것이다.

먼저, 주요 결과를 제시하기에 앞서서, 안정 판별 조건 식을 찾는 과정에 필요로 하는 부등식을 소개한다[16].

벡터 $a(\alpha) \in R^{n_x}, b(\alpha) \in R^{n_y}$와 행렬 $N \in R^{n_x \times n_y}$이 주어진 구간 Ω에서 정의 될 때, 적정 차원의 양한정 행렬 X와 임의의 행렬 Y, Z에 대하여 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned}
&-2\int_\Omega b^T(\alpha)N^T a(\alpha)d\alpha \\
&= \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \\
&\leq \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} 0 & -N \\ -N^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \\
&= \int_\Omega \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y-N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\alpha) \\ b(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha
\end{aligned} \tag{4}$$

여기서 아래의 관계가 이용되었다.

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0.$$

이제, 시스템 (1)의 점근 안정성을 위한 지연시간 종속조건을 다음의 정리에서 제시한다.

정리 1: 주어진 $\overline{h}$에 대하여, 아래의 두 선형행렬 부등식을 만족하는 양한정 행렬 P, Q, X와 대칭행렬 Y, 양의 상수 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$가 존재하면

$$\begin{bmatrix}
U_1 & P & A^T & PB - Y + (1+\overline{h})A^TB & 0 & PC + (1+\overline{h})A^TC & 0 \\
* & -\varepsilon_4 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & -\frac{\varepsilon_1}{1+\overline{h}}I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & U_2 & B^T & (1+\overline{h})B^TC & 0 \\
* & * & * & * & -\frac{\varepsilon_2}{1+\overline{h}}I & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & U_3 & C^T \\
* & * & * & * & * & * & -\frac{\varepsilon_3}{1+\overline{h}}I
\end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{6}$$

시간지연 h가 다음의 구간에서 $0 < h < \bar{h}$에 있을 때, 시스템 (1)은 점근적으로 안정하다.

여기서 $U_1 = A^TP + PA + Y + Y^T + \bar{h}X + Q + (1+\bar{h})A^TA + 3\beta_0^2[(1+\bar{h})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4]$

$U_2 = (1+\bar{h})B^TB - Q + 3\beta_1^2[(1+\bar{h})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4]$

$U_3 = (1+\bar{h})C^TC - I + 3\beta_2^2[(1+\bar{h})(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \varepsilon_4]$

이다.

증명: 시스템 (1)을 위한 리아프노프 함수를 다음과 같이 정의하자.

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \tag{7}$$

여기서,

$$V_1 = x^T(t)Px(t) \tag{8}$$

$$V_2 = \int_{-h}^{0}\int_{t+\beta}^{t} \dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha\,d\beta \tag{9}$$

$$V_3 = \int_{t-h}^{t} x^T(\alpha)Qx(\alpha)\,d\alpha \tag{10}$$

$$V_4 = \int_{t-h}^{t} \dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha\,. \tag{11}$$

이다.

V의 시간에 따른 도함수를 취할 때, 먼저

$$\dot{V}_1 = \dot{x}^T(t)Px(t) + x^T(t)P\dot{x}(t). \tag{12}$$

를 얻을 수 있으며, 다음의 관계를 이용하여

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t) - B\int_{t-h}^{t}\dot{x}(\alpha)\,d\alpha + C\dot{x}(t-h) + F(\cdot), \tag{13}$$

V_1의 도함수를 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 = {} & 2x^T(t)P(A+B)x(t) - 2x^T(t)PB\int_{t-h}^{t}\dot{x}(\alpha)\,d\alpha \\ & + 2x^T(t)PC\,\dot{x}(t-h) + 2x^T(t)PF(\cdot).\end{aligned} \tag{14}$$

여기서, 식 (14)의 우변에 둘째 항에 식 (4)를 적용하기 위하여 다음과 같이

$a(\alpha) \equiv x(t)$, $b(\alpha) \equiv \dot{x}(\alpha)$, $N \equiv PB$, $Z \equiv I$, $\forall \alpha \in [t-h, t]$.

선언하면, 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}& -2x^T(t)PB\int_{t-h}^{t}\dot{x}(\alpha)\,d\alpha \leq \int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(\alpha) \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} X & Y-PB \\ (Y-PB)^T & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(\alpha) \end{bmatrix} d\alpha \\ & = \int_{t-h}^{t}[x^T(t)Xx(t) + 2x^T(t)(Y-PB)\,\dot{x}(\alpha) \\ & \quad + \dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)]\,d\alpha \\ & = hx^T(t)Xx(t) + 2x^T(t)(Y-PB)\int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(\alpha)\,d\alpha \\ & \quad + \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha\,.\end{aligned} \tag{15}$$

식 (15)를 사용하여, $\dot{V}_1$은 아래와 같은 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 & \leq 2x^T(t)P(A+B)x(t) + hx^T(t)Xx(t) + 2x^T(t) \\ & (Y-PB)\int_{t-h}^{t}\dot{x}(\alpha)\,d\alpha + \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha \\ & + 2x^T(t)PC\,\dot{x}(t-h) + 2x^T(t)PF(\cdot) \leq x^T(t)(A^TP \\ & + PA + Y + Y^T + \bar{h}X)x(t) - 2x^T(t)(Y-PB)x(t-h) \\ & + \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha + 2x^T(t)PC\,\dot{x}(t-h) \\ & + 2x^T(t)PF(\cdot).\end{aligned} \tag{16}$$

식 (9)에 다음의 관계를

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 & = h\,\dot{x}^T(t)\,\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T \\ & (\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha \\ & = h[Ax(t) + Bx(t-h) + C\dot{x}(t-h) + F(\cdot)]^T \\ & [Ax(t) + Bx(t-h) + C\dot{x}(t-h) + F(\cdot)] - \int_{t-h}^{t} \\ & \dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha \leq \bar{h}\,[Ax(t) + Bx(t-h) \\ & + C\dot{x}(t-h) + F(\cdot)]^T \\ & [Ax(t) + Bx(t-h) + C\dot{x}(t-h) + F(\cdot)] - \int_{t-h}^{t} \\ & \dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha \\ & = \bar{h}\,[Ax(t) + Bx(t-h) \\ & + C\dot{x}(t-h)]^T[Ax(t) + Bx(t-h) + C\dot{x}(t-h)] \\ & - \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(\alpha)\,\dot{x}(\alpha)\,d\alpha + \bar{h}F^T(\cdot)F(\cdot) \\ & + 2\bar{h}x^T(t)A^TF(\cdot) + 2\bar{h}x^T(t-h)B^TF(\cdot) \\ & + 2\bar{h}\,\dot{x}^T(t-h)C^TF(\cdot).\end{aligned} \tag{17}$$

얻을 수 있으며, 식 (10)으로부터

$$\dot{V}_3 = x^T(t)Qx(t) - x^T(t-h)Qx(t-h) \tag{18}$$

의 관계를 얻고, 또한 식 (11)에서

$$\begin{aligned}\dot{V}_4 &= \dot{x}^T(t)\,\dot{x}(t) - \dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\\ &= [Ax(t)+Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)+F(\cdot)]^T\\ &\quad [Ax(t)+Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)+F(\cdot)]\\ &\quad - \dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\\ &= [Ax(t)+Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)]^T[Ax(t)\\ &\quad +Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)] - \dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\\ &\quad +F^T(\cdot)F(\cdot)+2x^T(t)A^TF(\cdot)\\ &\quad +2x^T(t-h)B^TF(\cdot)+2\,\dot{x}^T(t-h)C^TF(\cdot). \end{aligned} \tag{19}$$

을 얻을 수 있다.

이때, 식 (16)에서 식 (19)까지를 이용하여

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{V}_1+\dot{V}_2+\dot{V}_3+\dot{V}_4\\ &\le x^T(t)(A^TP+PA+Y+Y^T+\bar{h}X+Q)x(t)\\ &\quad -2x^T(t)(Y-PB)x(t-h)+2x^T(t)PC\,\dot{x}(t-h)\\ &\quad +(1+\bar{h})\,[Ax(t)+Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)]^T\\ &\quad [Ax(t)++Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)]+2x^T(t)PF(\cdot)\\ &\quad +(1+\bar{h})F^T(\cdot)F(\cdot)+2(1+\bar{h})x^T(t)A^TF(\cdot)\\ &\quad +2(1+\bar{h})x^T(t-h)B^TF(\cdot)+2(1+\bar{h})\,\dot{x}^T(t-h)C^T\\ &\quad F(\cdot)-x^T(t-h)Qx(t-h)-\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h) \end{aligned} \tag{20}$$

위와 같은 관계를 얻을 수 있다.

여기서, 벡터 U, V에 대하여 아래의 잘 알려진 부등식을 이용하여

$$UV^T+VU^T \le \varepsilon\, UU^T+\varepsilon^{-1}VV^T, \quad \varepsilon>0$$

식 (20)의 우변에 있는 항 $F^T(\cdot)F(\cdot)$을 아래와 같은 부등식으로 대치 할 수 있다.

$$F^T(\cdot)F(\cdot) = \|F(\cdot)\|^2$$

$$\begin{aligned}&\le \beta_0^2\|x(t)\|^2+\beta_1^2\|x(t-h)\|^2+\beta_2^2\|\dot{x}(t-h)\|^2\\ &\quad +2\beta_0\beta_1\|x(t)\|\|x(t-h)\|+2\beta_1\beta_2\|x(t-h)\|\\ &\quad \|\dot{x}(t-h)\|+2\beta_0\beta_2\|x(t)\|\|\dot{x}(t-h)\|\\ &\le \beta_0^2\|x(t)\|^2+\beta_1^2\|x(t-h)\|^2+\beta_2^2\|\dot{x}(t-h)\|^2\\ &\quad +(\beta_0^2\|x(t)\|^2+\beta_1^2\|x(t-h)\|^2)+(\beta_1^2\|x(t-h)\|^2\\ &\quad +\beta_2^2\|\dot{x}(t-h)\|^2)+(\beta_0^2\|x(t)\|^2+\beta_2^2\|\dot{x}(t-h)\|^2)\\ &=3\beta_0^2x^T(t)x(t)+3\beta_1^2x^T(t-h)x(t-h)+3\beta_2^2\\ &\quad \dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h). \end{aligned} \tag{21}$$

위의 식 (21)의 관계를 이용하여, 나머지 항들은 다음과 같은 한계치를 갖는다.

$$\begin{aligned}2x^T(t)A^TF(\cdot) &\le \varepsilon_1^{-1}x^T(t)A^TAx(t)+\varepsilon_1F^T(\cdot)F(\cdot)\\ &\le \varepsilon_1^{-1}x^T(t)A^TAx(t)+\varepsilon_1\big(3\beta_0^2x^T(t)x(t)\\ &\quad +3\beta_1^2x^T(t-h)x(t-h)\\ &\quad +3\beta_2^2\,\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\big) \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}2x^T(t-h)B^TF(\cdot) &\le \varepsilon_2^{-1}x^T(t-h)B^TBx(t-h)\\ &\quad +\varepsilon_2\big(3\beta_0^2x^T(t)x(t)\\ &\quad +3\beta_1^2x^T(t-h)x(t-h)\\ &\quad +3\beta_2^2\,\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\big) \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}2\,\dot{x}^T(t-h)C^TF(\cdot) &\le \varepsilon_3^{-1}\,\dot{x}^T(t-h)C^TC\dot{x}(t-h)\\ &\quad +\varepsilon_3\big(3\beta_0^2x^T(t)x(t)\\ &\quad +3\beta_1^2x^T(t-h)x(t-h)\\ &\quad +3\beta_2^2\,\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\big) \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}2x^T(t)PF(\cdot) &\le \varepsilon_4^{-1}x^T(t)PPx(t)\\ &\quad +\varepsilon_4\big(3\beta_0^2x^T(t)x(t)\\ &\quad +3\beta_1^2x^T(t-h)x(t-h)\\ &\quad +3\beta_2^2\,\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\big) \end{aligned} \tag{25}$$

식 (22)-(25)를 식 (20)에 적용하면 다음의 부등식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\dot{V} \le\ & x^T(t)(A^TP+PA+Y+Y^T+\bar{h}X+Q)x(t)\\ & -2x^T(t)(Y-PB)x(t-h)+2x^T(t)PC\,\dot{x}(t-h)\\ & +(1+\bar{h})\,[Ax(t)+Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)]^T\\ & [Ax(t)+Bx(t-h)+C\dot{x}(t-h)]-x^T(t-h)\\ & Qx(t-h)-\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)+(1+\bar{h})\\ & \varepsilon_1^{-1}x^T(t)A^TAx(t)+(1+\bar{h})\varepsilon_2^{-1}\\ & x^T(t-h)B^TBx(t-h)+(1+\bar{h})\varepsilon_3^{-1}\,\dot{x}^T\\ & (t-h)C^TC\dot{x}(t-h)+\varepsilon_4^{-1}x^T(t)PPx(t)\\ & +3\beta_0^2[(1+\bar{h})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\varepsilon_4]x^T\\ & (t)x(t)+3\beta_1^2[(1+\bar{h})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\varepsilon_4]x^T\\ & (t-h)x(t-h)+3\beta_2^2[(1+\bar{h})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)\\ & +\varepsilon_4]\,\dot{x}^T(t-h)\,\dot{x}(t-h)\\ \equiv\ & \begin{bmatrix} x(t)\\ x(t-h)\\ \dot{x}(t-h)\end{bmatrix}^T \Sigma(P,Q,X,Y,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) \begin{bmatrix} x(t)\\ x(t-h)\\ \dot{x}(t-h)\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{26}$$

여기서 행렬 Σ는 아래와 같고

$$\Sigma(P,Q,X,Y,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A^TP+PA+Y\\ +Y^T+\bar{h}X+Q\\ +\varepsilon_4^{-1}PP+3\beta_0^2\Theta\\ +(1+\bar{h})(1+\varepsilon_1^{-1})A^TA \end{pmatrix} & PB-Y+(1+\bar{h})A^TB & PC+(1+\bar{h})A^TC\\ * & \begin{pmatrix} (1+\bar{h})(1+\varepsilon_2^{-1})B^TB\\ -Q+3\beta_1^2\Theta \end{pmatrix} & (1+\bar{h})B^TC\\ * & * & \begin{pmatrix} (1+\bar{h})(1+\varepsilon_3^{-1})C^TC\\ -I+3\beta_2^2\Theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} \tag{27}$$

또한 $\Theta=(1+\bar{h})(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)+\varepsilon_4$이다.

그러므로, 행렬 $\Sigma(\cdot)$가 음 한정이면 $\dot{V}$는 음이 된다. Schur complement[15]에 의하여 부등식 (5)는 $\Sigma(\cdot)<0$것과 동치이다. 그래서 선형행렬부등식 (5)와 (6)이 만족하면 주어진 시스템 (1)은 점근 안정하다. 이것으로 증명은 완료된다.

언급: Khusainov-Yun'kova[13]는 리아프노프 방정식을 이용하여 시스템 (1)을 위한 지연시간

종속 충분조건을 제시하였다. 그러나 이들의 조건은 리아프노프 방정식의 해와 시스템 행렬들의 놈을 이용하여 조건을 구하였기 때문에 결과가 상당히 제한적이다. 또한 그들은 비선형 섭동을 상수의 한계치 갖는다고 가정하였다. 즉, $F(\cdot)<\eta$. 이는 식 (3)의 가정보다 덜 현실적이다.

정리 1로부터 안정성을 보장하는 허용 가능한 최대 지연 시간의 값을 얻기 위해서는 $P>0, Q>0, X>0, Y$, $\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0, \varepsilon_3>0, \varepsilon_4>0, \bar{h}>0$, 그리고 식 (5)와 (6)에 대하여 $\bar{h}$를 최대화하는 quasi-convex 최적화 문제를 풀면 된다. 이러한 최적화 문제에 관한 자세한 사항은 문헌 [15]를 참조하라.

Ⅲ. 수치예제

이 절에서는 앞 절에서 제시된 결과의 유용성을 보이기 위하여 [14]의 논문에서 이용된 예제를 갖고 본 연구의 결과와 비교한다. 다음과 같은 뉴트럴 시스템을 생각하자.

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0 & 0.4\\ 0.4 & 0\end{bmatrix}x(t-h)+\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix}\dot{x}(t-h)+F(x(t),x(t-h),\dot{x}(t-h)), \tag{28}$$

여기서 비선형 섭동은 다음의 조건을 만족한다고 하자.

$$\|F(x(t),\ x(t-h),\ \dot{x}(t-h))\| \le 0.1\|x(t)\| + 0.05\|x(t-h)\| + 0.05\|\dot{x}(t-h)\|.$$

정리 1의 선형 행렬 부등식을 Matlab의 LMI Toolbox를 이용하여, 시스템 (28)의 안정성을 보장하는 허용 가능 최대 지연시간 값으로 $\bar{h}=12.003$을 얻었다. 이때의 부등식 (5)와 (6)의 해들은 다음과 같다.

$$P=\begin{bmatrix}26.9260 & -0.2140\\ -0.2140 & 26.9260\end{bmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}11.5465 & -0.1786\\ -0.1786 & 11.5465\end{bmatrix},$$
$$X=\begin{bmatrix}0.0272 & -0.0270\\ -0.0270 & 0.0272\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix}-0.1008 & 0.1008\\ 0.1008 & -0.1008\end{bmatrix},$$
$$\varepsilon_1=2.6457,\ \varepsilon_2=0.5291,\ \varepsilon_3=1.1159,\ \varepsilon_4=35.3336.$$

그러나, [14]의 연구결과에서의 허용최대치는 $\bar{h}=0.218$로, 본 연구의 결과보다 매우 제한적인 결과를 얻는다.

Ⅳ. 결론

본 논문에서는 선형 뉴트럴 시스템에 비선형 섭동을 갖는 경우에 점근 안정성 보장하는 판별식에 대하여 조사하였다. 리아프노프 해석법을 이용하여 지연시간 종속 판별식을 구하였다. 이 조건 식은 선형행렬 부등식으로 표현되기 때문에 여러 최적화 알고리즘으로 쉽게 풀 수 있다. 또한 제시된 결과가 기존의 결과보다 향상된 것을 수치 예제를 통하여 검증하였다.

참 고 문 헌

[1] J. K. Hale, and S.M. Verduyn Lunel, "Introduction to functional differential equations", Springer-Verlag, New York, 1993.

[2] J.K. Hale., E.F. Infante, and F.-S.P. Tsen, "Stability in linear delay equations", *J. Math Anal. and Appl.*, Vol. 105, pp. 533-555, 1985.

[3] V. Kolmanovskii and A. Myshkis, "Applied theory of functional differential equations", *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 1992.

[4] K. Gopalsamy "Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics", *Kluwer Academic Publishers*, Boston, 1992.

[5] R. K. Brayton, and R.A. Willoughby "On the numerical integration of a symmetric system of difference-differential equations of neutral type", *J. Math. Anal. and Appl.*, Vol. 18, pp. 182-189, 1967.

[6] J. X. Kuang, J. X. Xiang, and H.J. Tian, "The asymptotic stability of one-parameter methods for neutral differential equations", *BIT*, Vol. 34, pp. 400-408, 1994.

[7] L.M. Li, "Stability of linear neutral delay-

differential systems", *Bull. Austral. Math. Soc.*, Vol. 38, pp. 339-344, 1988.

[8] G. Di. Hu and G.Da. Hu, "Some simple stability criteria of neutral delay-differential systems", *Appl. Math. and Comput.*, Vol. 80, pp. 257-271, 1996.

[9] G. D. Hui and G.D. Hu, "Simple criteria for stability of neutral systems with multiple delays", *Int. J. Sys.* Sci., Vol. 28, pp. 1325-1328, 1997.

[10] J. H. Park and S. Won, "A note on stability of neutral delay-differential systems", *J. Frank. Inst.*, Vol. 336, pp. 543-548, 1999.

[11] C. H. Lien, "Asymptotic criterion for neutral systems with multiple time delays", *Electron. Lett.*, Vol. 35, pp. 850-852, 1999.

[12] J. H. Park and S. Won, "Stability analysis for neutral delay-differential systems", *J. Frank. Inst.*, Vol. 337, pp. 1-9, 2000.

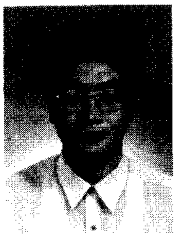
[13] D. Khuasinov and E.V. Yun'kova "Investigation of the stability of linear systems of neutral type by the Lyapunov function method", Diff. Uravn., Vol. 24, pp. 613-621, 1988.

[14] J. H. Park and S. Won, "Stability of neutral delay-differential systems with nonlinear perturbations", *Int. J. Sys. Sci.*, Vol. 31, to appear, 2000.

[15] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, "Linear matrix inequalities in systems and control theory", in 'Studies in applied mathematics', Vol. 15, SIAM, Philadelphia, 1994.

[16] Y. S. Moon, "Robust control of time-delay system using linear matrix inequalities", PhD Dissertation, Seoul National University, Korea, 1998.

저 자 소 개



朴 柱 炫(正會員)

1990년, 1992년 경북대학교 전자공학과 공학사, 공학석사, 1997년 포항공과대학교 공학박사, 1997-2000년 포항공과대 지능자동화연구센터 연구원, 2000년~현재 영남대학교 전자정보공학부 교수. 연구분야: 강인제어, 공정 자동화