論文2000-37SC-2-1

SISO 비선형 시스템의 적응 추종제어 기법

(An Adaptive Tracking Control of SISO Nonlinear Systems)

梁 玄 錫 *

(Hyun Suk Yang)

요 약

본 논문에서는 입-출력 모델로 표현되는 SISO(Single-Input-Single-Output) 비선형 시스템의 적응제어 기법을 제시한다. 시스템에 포함된 미지의 파라미터는 알고 있는 콤펙트(compact) 볼록(convex) 집합 내에 있다고 가정한다. 기존의 결과와는 달리 이 집합은 원점을 포함하는 원이나 초입방체(hypercube)를 포함한 임의의 콤펙트 볼록 집합이 될 수 있다. 제시하는 갱신(update) 법칙으로 얻어지는 파라미터 추정치는 항상 알고 있는 집합 내에 존재하며 이를 이용한 제어 입력을 적용하면 시스템의 출력과 원하는 신호와의 위치, 속도, 그리고 가속도 오차가 시간에 따라 영으로 수렴함을 이론적으로 그리고 시뮬레이션을 통하여 입증한다.

Abstract

In this paper, an adaptive control law for nonlinear systems represented by input-output models are proposed under the assumption that unknown system parameters are in a known compact and convex set. Contrary to the previous results, the compact and convex set is not restricted to a ball whose center is at the origin or convex hypercube. It is proven that the proposed parameter update rule produces a sequence of parameters which reside in the set and guarantees that the position, velocity, and acceleration error converges to zero as time goes to infinity. This theoretical result was justified through simulations.

I. 서 론

1980년대에 들어서면서 비선형 시스템의 제어기 설계에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 대부분의 연구는 선형시스템의 경우와 같이 상태변수를 이용한 궤환제어 방법으로 이 경우에는 상태변수를 측정할 수 있다는 가정이 필요하다. 만약 출력을 이용한 제어기를 설계하기 위해서는 출력으로부터 상태변수를 예측할 수 있는 상태변수 관측기가 필요하다. 그러나 비선형 시스템의 경우는 선형시스템의 경우와 달리 관측기 설계와 제어기 설계가 분리될 수 없다. 즉 분리법칙(separation principle)이 적용될 수 없다. 만약에 시스템에 미지의 변수가 포함된 경우에는 선형 시스템의 경우에도 분리법칙이 적용될 수 없다. 이 경우에는 소위 적응제어기법을 이용하게 된다. 적응제어 기법은 시스템의 파라미터를 모르는 상황에서 주어진 시스템을 안정화시키거나 주어진 신호를 시스템의 출력이 따라가게 하는 제어기를 설계하는데 필요한 기법으로 1980년대에 들어서면서 적응제어 기법의 안정성의 입증 및 제어 알고리즘 개발이 활발하게 이루어졌다[1-4]. 이러한 연구는 주로 선형시스템을 대상으로 이루어졌는데 최근에 비선형 시스템의 분석기법에 관한 연구가

* 正會員, 弘益大學校 電子電氣工學科

(Dept. of Electronic and Electric Engineering, Hongik University)

接受日字:1999年 10月 19日,수정완료일 : 2000年 2月7日

활발히 진행되면서 비선형 시스템에 대한 적응제어에 대한 연구결과가 많이 발표되고 있다[5-7].

본 논문은 미지의 파라미터들을 갖는 SISO (Single-Input-Single-Output) 비선형시스템의 출력이 원하는 신호를 따라가게 하는 제어 기법으로 출력을 이용한 궤환제어법칙을 제시한 [5]의 결과에서 미지의 변수를 갱신하는 법칙을 일반화시키고 자 한다. [5]에서는 입출력으로 표현된 비선형 시스템에 여러 개의 적분기를 도입하여 이를 상태방정식으로 변환한 후 상태변수 궤환제어 방법과 출력을 이용한 궤환제어 방식을 제시하였다. 시스템에는 미지의 파라미터가 포함되어 있는데 [5]에서는 이 파라미터들이 알고 있는 콤펙트 볼록 집합에 있다고 가정하여 이들의 갱신 법칙을 제시하였다. 파라미터들이 알고 있는 콤팩트 볼록 집합에 있다는 가정은 시스템의 특성상 특정한 조건을 만족해야하는 관계로 파라미터가 임의의 값이 될 수 없기 때문이다. 그런데 이러한 콤펙트 볼록 집합으로 원점을 중심으로 하는 원과 볼록 초입방체 만으로 국한시켜 특정한 조건을 만족하게 하는 집합을 얻을 수 없는 경우가 발생한다. 따라서 원이나 초입방체의 집합을 임의의 콤팩트 볼록 집합으로 일반화시킬 필요가 있다. 본 논문에서는 이 문제를 해결하기 의하여 임의의 콤펙트 볼록 집합에 대한 갱신 법칙을 제시하고 이를 [5]에서 원인 경우와 초입방체의 경우에 각각 다르게 제시한 갱신 법칙들과의 관계를 보이고 자 한다.

본 논문은 2장에서 [5]에서의 결과를 간략히 설명하고 여기에서의 문제점을 제시하며 3장에서는 이러한 문제점을 보완한 새로운 법칙을 제시하고 이를 이론적으로 입증한다. 그리고 4장에서는 시뮬레이션을 통하여 제시하는 법칙의 타당성을 보이고 마지막으로 5장에서 결론을 맺는다.

II. 기존 결과

본 연구에서 고려하는 비선형 시스템은 SISO (Single-Input-Single-Output) 시스템으로 다음과 같다.

$$y^{(n)}=f_0(\cdot)+\sum_{i=1}^{p}f_i(\cdot)\theta_i+(g_0+\sum_{i=1}^{p}\theta_i g_i)u^{(m)} \tag{1}$$

여기에서 u는 제어입력, y는 측정된 출력, $y^{(i)}$는 y의 i번째 미분을 의미하며 $m < n$이라 가정한다. 함수 f_i는 $y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n)}, u, u^{(1)}, \cdots, u^{(m)}$를 변수로 하는 유연한(smooth) 비선형 함수이며 f_0는 $y, y^{(1)}, \cdots, y^{(n-1)}, u, u^{(1)}, \cdots, u^{(m-1)}$을 변수로 하는 함수이다. g_0와 g_i는 알고 있는 상수이며 $\theta=[\theta_1\ \theta_2 \cdots \theta_p]^T$는 모르는 벡터로 적응제어 기법에서 변화시키는 변수가 된다. 여기에서는 θ는 R^p 공간 내에 있는 알고 있는 콤펙트 볼록 집합 Ω내에 있다고 가정한다.

비선형 시스템에 대한 적응제어 기법은 [5]에서 제시되었다. 제시된 제어기법은 다음의 가정이 필요하다. 여기에서 $\widehat{\Omega}$은 R^p 공간 내에 있으며 Ω를 포함하는 콤펙트 볼록 집합이다.

가정 1 : $(g_0+\theta^T g)\neq 0\quad \forall\theta\in\widehat{\Omega}$. □

제어의 목표는 모든 신호들이 한정되어 있으며 출력이 주어진 참조신호(reference signal) $y_r(t)$를 $t\to\infty$일 때 쫓아가게 하는 출력궤환(output feed-back) 제어입력을 설계하는 것이다. 이를 위하여 변수 θ를 적당한 방법으로 계속적으로 갱신해야 하는데 [5]에서는 다음과 같은 방법을 제시하였다. 우선 $Y\in R^n$과 $Y_R\in R^{n+1}$을 임의의 콤펙트 집합이라 하고 $Y(T)$, $Y_r(T)$, 그리고 $Y_R(t)$을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned}
Y(t)&=[\,y(t), y^{(1)}(t), \cdots, y^{(n-1)}(t)\,]^T\\
Y_r(t)&=[\,y_r(t), y_r^{(1)}(t), \cdots, y_r^{(n-1)}(t)\,]^T\\
Y_R(t)&=[\,y_r(t), y_r^{(1)}(t), \cdots, y^{(n-1)}(t), y_r^{(n)}(t)]^T
\end{aligned}$$

본 제어의 목적은 임의의 초기조건 $Y(0)\in Y$, 임의의 한정된(bounded) 참조신호 $Y_R(t)\in Y_R$, 그리고 임의의 변수 $\theta\in\Omega$에 대하여 $\lim_{t\to\infty}|y(t)-y_r(t)|=0$을 만족하는 출력궤환 제어기를 설계함에 있다. 이를 위하여 논문 [5]에서는 다음과 같이 시스템 (1)을 변환시켰다.

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i&=x_{i+1},\quad 1\le i\le n-1\\
\dot{x}_n&=f_0(x,z)+\theta^T f(x,z)+(g_0+\theta^T g)v\\
\dot{z}_i&=z_{i+1},\quad 1\le i\le m-1\\
\dot{z}_m&=v\\
y&=x_1
\end{aligned} \tag{2}$$

여기에서 $z_1 = u$, $x = [x_1, \cdots, x_n]^T$, $z = [z_1, \cdots, z_m]^T$, $f = [f_1, \cdots, f_p]^T$, 그리고 $g = [g_1, \cdots, g_p]^T$. 이 식을 이용하면 추종 오차 식은 $e_i = x_i - y_r^{(i-1)}$, $i = 1, \cdots, n$ 이 된다. 오차를 $e = [e_1, e_2, \cdots, e_n]^T$라 하면 다음을 얻게 된다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + b\{f_0(e+Y_r, z) + \theta^T f(e+Y_r, z) \\ &\quad + (g_0 + \theta^T g)v - y_r^{(n)}\} \qquad (3) \\ \dot{z} &= A_2 + b_2 v \end{aligned}$$

여기에서 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \cdot & & \cdot & & \\ & \cdot & & \cdot & & \\ & \cdot & & \cdot & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 로 정의된다.

만약 $A_m = A - bK$가 안정한 행렬이 되도록 행렬 K를 선택하면 수식 (3)은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_m e + b\{Ke + f_0(e+Y_r, z) \\ &\quad + \theta^T f(e+Y_r, z) + (g_0 + \theta^T g)v - y_r^{(n)}\} \qquad (4) \\ \dot{z} &= A_2 + b_2 v \end{aligned}$$

또한 이미 잘 알려진 바와 같이 $PA_m + A_m^T P = -Q$을 만족하는 정정행렬(positive definite matrix) P와 Q가 존재하게 된다. 그러면 임의의 정정 행렬 $\Gamma = \Gamma^T$와 변수의 예측을 $\hat{\theta}$, 오차를 $\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \theta$라 할 때 이를 이용한 Lyapunov 함수를 다음과 같이 정의할 수 있다[5].

$$V = e^T Pe + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma \tilde{\theta} \qquad (5)$$

그러면 이 함수의 미분은 다음과 같다.

$$\dot{V} = -e^T Qe + \tilde{\theta}^T \Gamma [\dot{\hat{\theta}} - \Gamma^{-1}\phi] \qquad (6)$$

여기에서 ϕ와 그와 연관된 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= 2e^T Pb[f(e+Y_r, z) + g\psi(e, z, Y_R, \hat{\theta})] \\ &= \phi(e, z, Y_R, \hat{\theta}) \\ v &= \frac{-Ke + y_r^{(n)} - f_0(e+Y_r, z) - \hat{\theta}^T f(e+Y_r, z)}{g_0 + \hat{\theta}^T g} \\ &\equiv \psi(e, z, Y_r, \hat{\theta}) \end{aligned}$$

제어의 목적을 이루기 위한 충분조건은 $\tilde{\theta}^T \Gamma [\dot{\hat{\theta}} - \Gamma^{-1}\phi] \le 0$인데 이 조건을 만족시키기 위하여 [5]에서는 변수 $\hat{\theta}$의 갱신 방식을 다음과 같이 제시하였다.

$$\dot{\hat{\theta}} = \mathrm{proj}(\hat{\theta}, \phi)$$

$$\mathrm{proj}(\hat{\theta}, \phi) = \begin{cases} \Gamma^{-1}\phi & \text{if } \hat{\theta}^T\hat{\theta} \le k \text{ or} \\ & \text{if } \hat{\theta}^T\hat{\theta} > k \\ & \text{and } \hat{\theta}^T\Gamma^{-1}\phi \le 0 \\ \Gamma^{-1}\overline{\phi} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad (7)$$

$$\overline{\phi} = \phi - \frac{(\hat{\theta}^T\hat{\theta} - k)\,\hat{\theta}^T\Gamma^{-1}\phi}{\delta\hat{\theta}^T\Gamma^{-1}\hat{\theta}}\,\hat{\theta}$$

이 경우 $\Omega = \{\theta \mid \theta^T\theta \le k\}$이고 $\delta > 0$인 상수이다. 그러면 주어진 시스템은 출력의 오차인 $e(t)$는 시간 t가 무한대로 갈 때 영으로 수렴하게 되며 변수 $\hat{\theta}$는 $\Omega_\delta = \{\theta \mid \theta^T\theta \le k + \delta\}$ 내에 존재한다. [5]에서는 변수 θ가 $\Omega = \{\theta \mid \theta^T\theta \le k\}$이 아닌 볼록 초입방체 $\Omega = \{\theta \mid a_i \le \theta_i \le b_i,\ 1 \le i \le p\}$ 내에 존재하는 경우 (7)과 유사한 방법을 제시하였다.

이상의 결과에는 다음과 같은 문제점이 있다. [5]에서 변수 θ를 포함하는 집합 Ω의 일례로 $\Omega = \{\theta^T\theta \le k\}$와 같은 닫힌 볼(closed ball)로 간주한 것은 집합 Ω가 콤팩트 볼록 집합이고 이의 대표적인 집합이 닫힌 볼이기 때문이다. 그러나 가정 1의 조건으로 이러한 닫힌 볼이 콤팩트 볼록 집합을 일반화할 수 없게 된다. 예를 들면 다음과 같다.

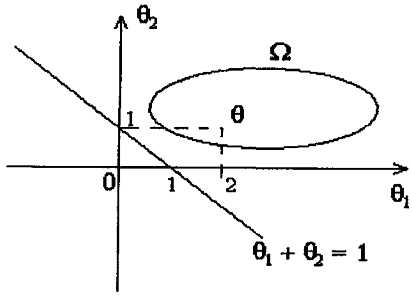

그림 1. 집합 Ω의 영역
Fig. 1. The region of a set.

(예제) $\theta = [\theta_1\ \ \theta_2]^T$, $g_0 = -1$, 그리고 $g = [1\ \ 1]^T$라 하자. 비선형 시스템 (1)의 변수가 $[2\ \ 1]^T$라 가정하자. 가정 1에 의하여 $g_0 + \theta^T g \ne 0$

을 만족해야 하므로 파라미터 θ를 포함하는 콤펙트 볼록 집합 Ω는 그림에서처럼 직선 $g_0+\theta^T g=0$의 위쪽에 있어야 한다. 그러면 그림 1에서 알 수 있듯이 원점을 포함하는 집합 $\Omega=\{\theta|\theta^T\theta\le k\}$가 존재할 수 없게 된다. 또한 콤펙트 볼록 집합 Ω이 초입방체인 경우 예를 들어 각 파라미터가 실제 값에서 ±1.5내에 있다고 하자. 즉 $\Omega=\{\theta|0.5\le\theta_1\le3.5,\ -0.5\le\theta_2\le2.5\}$라 하자. 그러면 이 집합은 $g_0+\theta^T g=0$을 통과하게 되어 가정 1을 만족할 수 없게 된다. □

예제 1과 같은 사실로 [5]에서 제시하는 적응제어 기법은 일반적인 방법이 될 수 없을 뿐만 아니라 원인 경우와 초입방체 경우에 서로 다른 갱신 법칙을 제시하는 것은 일반성이 없으므로 이의 개선책이 필요하다. 가정 1을 생략하면 제어 입력 v가 정의될 수 없는 경우가 생기거나 이 입력의 값이 너무 커져서 포화되는 문제점이 있으므로 이 가정을 생략할 수는 없다. 따라서 변수 θ가 가정 1을 만족하는 임의의 볼록 집합 내에 있는 경우의 새로운 갱신 방법을 제시하여야 한다.

Ⅲ. 적응제어 기법 제시

변수 θ가 임의의 볼록 집합 내에 있는 경우의 적응제어기법을 제시하고자 한다. 우선 집합 Ω_δ를 다음과 같이 정의하자.

$$\Omega_\delta=\cup_{\theta\in\Omega}B^c(\theta,\delta) \tag{8}$$

여기에서 $B^c(\theta,\delta)$는 θ를 중심으로 반경이 δ인 닫힌 볼이다. 다음의 가정이 필요하다.

가정 2. $\Omega\subset\Omega_\delta\subset\hat{\Omega}$ 을 만족하는 $\delta>0$이 존재한다. $\hat{\Omega}$는 가정 1에서 정의된 집합이다. □

임의의 콤펙트 볼록 집합 Ω에 대하여 다음과 같은 함수를 정의하자.

$$\begin{aligned} dist(\theta,\Omega) &= \min_{w\in\Omega}\|\theta-w\| \\ \arg\_dist(\theta,\Omega) &= \{w^*\in\Omega|\, dist(\theta,\Omega)=\|\theta-w^*\|\} \end{aligned} \tag{9}$$

새로운 변수의 갱신 법칙은 주어진 Lyapunov 함수 (5)는 모든 시간 $t\ge0$에 대하여 항상 $\hat{\theta}(t)^T\Gamma[\dot{\hat{\theta}}(t)-\Gamma^{-1}\phi]\le0$를 만족하도록 제시되어야 한다. 이를 위하여 다음과 같은 법칙을 제시한다. 여기에서 $w^*=\arg_dist(\hat{\theta}(t),\Omega)$이다.

$$\dot{\hat{\theta}}(t)=\begin{cases}\Gamma^{-1}\phi & \text{if } \hat{\theta}(t)\in\Omega \\ \Gamma^{-1}\phi & \text{if } \hat{\theta}(t)\in\Omega_\delta\ \& \\ & \hat{\theta}(t)\notin\Omega\ \&\ \beta^T\Gamma^{-1}\phi<0 \\ \Gamma^{-1}\overline{\phi} & \text{if } \hat{\theta}(t)\in\Omega_\delta\ \& \\ & \hat{\theta}(t)\notin\Omega\ \&\ \beta^T\Gamma^{-1}\phi\ge0\end{cases} \tag{10}$$

$$\overline{\phi}=\phi-\frac{dist(\hat{\theta}(t),\Omega)\beta^T\Gamma^{-1}\phi}{\delta\beta^T\Gamma^{-1}\beta}\beta \tag{11}$$

여기에서 $\beta=(\hat{\theta}(t)-w^*)$이다. 식 (10)과 (11)은 다음과 같은 정리를 만족한다.

정리 1. 변수 $\hat{\theta}$의 갱신 법칙이 (10)과 (11)과 같이 주어져 있다. 그러면

(가) $\hat{\theta}(0)\in\Omega_\delta$이면 모든 $t>0$에 대하여 $\hat{\theta}(t)\in\Omega_\delta$을 만족한다.

(나) 조건 $\hat{\theta}(t)^T\Gamma[\dot{\hat{\theta}}(t)-\Gamma^{-1}\phi]\le0$을 만족한다.

(증명) 각각의 경우를 나누어 증명한다. 우선 $\hat{\theta}(t)\in\Omega$인 경우는 $\dot{\hat{\theta}}$이 어떻게 주어지더라도 매우 작은 시간 내에서 $\hat{\theta}(t)\in\Omega_\delta$를 만족한다는 사실은 명백하다. 따라서 수식 (10)의 두 번째와 세 번째 경우를 고려하자. 먼저 $\hat{\theta}(t)\in\Omega_\delta$, $\hat{\theta}(t)\notin\Omega$, 그리고 $(\hat{\theta}(t)-w^*)^T\Gamma^{-1}\phi<0$인 경우 $\dot{\hat{\theta}}(t)$가 $\Gamma^{-1}\phi$로 주어진 경우를 살펴보자. 시간 t에서 매우 작은 α 시간이 경과한 후의 변수 $\hat{\theta}(t+\alpha)$는 $\hat{\theta}(t)+\alpha\dot{\hat{\theta}}(t)+O(\alpha)=\hat{\theta}(t)+\alpha\Gamma^{-1}\phi+O(\alpha)$로 나타낼 수 있다. 여기에서 $O(\alpha)$는 $\lim_{\alpha\to0}\|O(\alpha)\|/\alpha=0$을 만족한다. 그러면

$$\begin{aligned}\|\hat{\theta}(t+\alpha)-w^*\|^2 &= \|\hat{\theta}(t)-w^*+\alpha\Gamma^{-1}\phi+O(\alpha)\|^2 \\ &\le \|\hat{\theta}(t)-w^*\|^2+2\alpha(\hat{\theta}(t)-w^*)^T\Gamma^{-1}\phi \\ &\quad +\alpha^2\|\Gamma^{-1}\phi\|^2+\|O(\alpha)\|m\end{aligned} \tag{12}$$

을 만족한다. m은 $\|O(\alpha)\|$항을 포함하는 계수이다. 이때 $(\hat{\theta}(t)-w^*)^T\Gamma^{-1}\phi=-\gamma<0$이라 하면 $\lim_{\alpha\to0}\|O(\alpha)\|/\alpha=0$이 만족되므로 어떤 $\overline{\alpha}>0$이 존재하여 모든 $0<\alpha<\overline{\alpha}$에 대하여 위의 식은 $\|\hat{\theta}(t+\alpha)-w^*\|^2\le\|\hat{\theta}(t)-w^*\|^2-\alpha\gamma$를 만족한

다. 즉 $\| \hat{\theta}(t+\alpha) - w^* \|^2 < \| \hat{\theta}(t) - w^* \|^2$이 만족되어 $\hat{\theta}(t+\alpha)$는 w^*에 더 접근하게 되므로 $\hat{\theta}(t+\alpha) \in \Omega_\delta$를 만족하게 된다. 또한 $\dot{\hat{\theta}}(t) = \Gamma^{-1}\phi$이면 조건 (나)가 성립됨은 명백하다.

마지막으로 $\hat{\theta}(t) \in \Omega_\delta$, $\hat{\theta}(t) \not\in \Omega$, 그리고 $(\hat{\theta}(t) - w^*)^T \Gamma^{-1}\phi \ge 0$인 경우를 살펴보자. 이미 언급한 바와 같이 어떤 작은 $\alpha > 0$에 대하여 $\hat{\theta}(t+\alpha) = \hat{\theta}(t) + \alpha\Gamma^{-1}\overline{\phi} + O(\alpha)$라 하자. 그러면 수식 (12)가 성립된다. 그런데 $\delta > dist(\hat{\theta}(t), \Omega) = \| \hat{\theta}(t) - w^* \| = \|\beta\|$이므로 다음을 만족한다.

$$
\begin{aligned}
\beta^T\Gamma^{-1}\overline{\phi} &= \beta^T\Gamma^{-1}\phi - \frac{dist(\hat{\theta}(t), \Omega)\beta^T\Gamma^{-1}\phi}{\delta} \\
&= \left(1 - \frac{dist(\hat{\theta}(t), \Omega)}{\delta}\right)\beta^T\Gamma^{-1}\phi \\
&\equiv -\gamma\beta^T\Gamma^{-1}\phi
\end{aligned}
$$

여기에서 $\gamma > 0$을 만족한다. 그러면

$$
\begin{aligned}
\| \hat{\theta}(t+\alpha) - w^* \|^2 &= \|\beta\|^2 - 2\alpha\gamma\beta^T\Gamma^{-1}\phi \\
&\quad + \alpha^2 \| \Gamma^{-1}\overline{\phi} \|^2 + \| O(\alpha) \| m
\end{aligned}
$$

이 만족되므로 이전의 경우와 마찬가지 이유로 어떤 $\overline{\alpha} > 0$이 존재하여 모든 $0 < \alpha < \overline{\alpha}$에 대하여 위의 식은 $\| \hat{\theta}(t+\alpha) - w^* \|^2 \le \| \hat{\theta}(t) - w^* \|^2 - \alpha\beta\gamma$를 만족한다. 따라서 $\hat{\theta}(t+\alpha) \in \Omega_\delta$를 만족하게 된다. 조건 (나)는 다음과 같이 증명된다.

$$
\begin{aligned}
&\hat{\theta}(t)^T\ \Gamma[\ \dot{\hat{\theta}}(t) - \Gamma^{-1}\phi] \\
&\quad = -\frac{dist(\hat{\theta}(t), \Omega)\beta^T\Gamma^{-1}\phi\hat{\theta}(t)^T}{\delta\beta^T\Gamma^{-1}\beta}\beta
\end{aligned}
$$

으로부터 $\beta^T\Gamma^{-1}\phi \ge 0$, $\beta^T\Gamma^{-1}\beta \ge 0$, $dist(\theta, \Omega) \ge 0$, 그리고 $\delta > 0$이 성립하므로 오직 $\hat{\theta}^T(t)\beta \ge 0$을 보이면 된다. 이를 증명하기 위하여 $\hat{\theta}^T(t)\beta = \hat{\theta}^T(t)(\hat{\theta}(t) - w^*) < 0$이라 가정하자. 우선 시스템의 변수 θ와 w^*는 콤펙트 볼록 집합 Ω에 있으므로 모든 $\lambda \in [0, 1]$에 대하여 벡터 $w^* + \lambda(\theta - w^*) \in \Omega$을 만족하게 된다. 그러면

$$
\begin{aligned}
&\| \hat{\theta}(t) - w^* - \lambda(\theta - w^*) \|^2 \\
&\quad = \| \hat{\theta}(t) - w^* \|^2 - 2\lambda(\hat{\theta}(t) - w^*)^T(\theta - w^*) \\
&\qquad + \lambda^2 \| \theta - w^* \|^2
\end{aligned}
$$

이 만족한다. 이때 $\hat{\theta}^T(t)(\hat{\theta}(t) - w^*) < 0$의 가정에 의하여

$$
\begin{aligned}
&(\theta - w^*)^T(\hat{\theta}(t) - w^*) \\
&\quad = -\hat{\theta}^T(\hat{\theta}(t) - w^*) + \| \hat{\theta}(t) - w^* \|^2 > 0
\end{aligned}
$$

을 만족하게 된다. 따라서 λ가 $0 < \lambda < \min\left(\frac{(\hat{\theta}(t) - w^*)^T(\theta - w^*)}{\| \theta - w^* \|^2}, 1\right)$의 구간에 존재하면 $\| \hat{\theta}(t) - w^* - \lambda(\theta - w^*) \|^2 < \| \hat{\theta}(t) - w^* \|^2$을 만족하게 된다. 그런데 가정에 의하여 w^*는 $\min_{w \in \Omega} \| \hat{\theta}(t) - w \|^2$을 만족하는 벡터인데 $\hat{\theta}(t)$에서 벡터 $w^* + \lambda(\theta - w^*) \in \Omega$ 까지의 거리가 더 짧다는 것은 가정에 위배가 되므로 $\hat{\theta}^T(t)(\hat{\theta}(t) - w^*) < 0$이라는 가정은 성립할 수 없다. 따라서 $\hat{\theta}^T(t)(\hat{\theta}(t) - w^*) \ge 0$이 만족된다. □

시스템의 추종 오차에 대해서는 다음과 같은 결과를 얻는다.

정리 2. 비선형 시스템 (1)에 시스템의 변수 갱신 법칙으로 (10)과 (11)을 적용하자. 그러면 시스템의 추종 오차 $e(t)$는 시간이 무한대로 감에 따라 0으로 접근하게 된다.

(증명) 이미 언급한 바와 같이 Lyapunov 함수 $V(t)$가 $\dot{V}(t) \le -e^T Q e$를 만족하므로 $t \to \infty$일 때 $e(t) \to 0$이 됨은 명백하다. □

(10)과 (11)에서 제시하는 갱신 법칙과 [5]에서 제시하는 갱신 법칙의 차이를 살펴보자. 우선 $\Omega = \{\theta | \theta^T\theta \le k\}$인 경우를 살펴보자. 파라미터 $\hat{\theta}$가 집합 Ω 내에 있는 경우에는 두 가지 법칙이 동일하며 파라미터 $\hat{\theta}$가 집합 Ω 외에 있는 경우에는 집합 Ω가 원이므로 $dist(\hat{\theta}, \Omega)$는 $\| \hat{\theta} \| - \sqrt{k}$가 되며 $\arg_dist(\hat{\theta}, \Omega)$는 $\frac{\sqrt{k}}{\| \hat{\theta} \|}\hat{\theta}$가 된다. 따라서 수식 (11)에 의하여

$$
\overline{\phi} = \phi - \frac{(\| \hat{\theta} \| - \sqrt{k})\hat{\theta}^T\Gamma^{-1}\hat{\theta}}{\delta\hat{\theta}^T\Gamma^{-1}\hat{\theta}}\hat{\theta}
$$

이 되어 [5]에서 제시하는 법칙과는 두 번째 항의 상수 값만 다르게 된다.

이번에는 집합이 $\Omega = \{\theta | a_i \le \theta_i \le b_i\}$인 경우를 살펴보자. 만약 (10)과 (11)을 파라미터 $\hat{\theta}$의 각 항별

로 적용하면 $\widehat{\theta}_i \in \Omega_i = \{ a_i \le \widehat{\theta}_i \le b_i \}$일 때는 두 법칙이 동일하고 $\widehat{\theta}_i > b_i$일 때는 $dist(\widehat{\theta}_i, \Omega_i)$와 $\arg_dist(\widehat{\theta}_i, \Omega_i)$는 각각 $\widehat{\theta}_i - b_i$와 b_i가 되고 $\widehat{\theta}_i < a_i$일 때는 각각 $a_i - \widehat{\theta}_i$와 a_i가 된다. 그러면 Γ가 identity 행렬이면 두 법칙은 동일하게 된다. 즉 본 논문에서 제시하는 갱신 법칙은 [5]의 법칙을 통합할 뿐만 아니라 일반적인 콤펙트 볼록 집합의 경우에 적용할 수 있는 갱신 법칙이다.

Ⅳ. 시뮬레이션

논문 [5]에서 고려한 다음과 같은 비선형 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \zeta_2 + \theta \eta_1^2 \\ \dot{\zeta}_2 &= u + \zeta_3 \\ \dot{\zeta}_3 &= -\zeta_3 + y \\ y &= \zeta_1 \end{aligned} \tag{13}$$

여기에서 θ는 미지의 파라미터이다. 수식 (13)은 다음과 같이 수식 (1)의 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} y^{(3)} &= (u + y - \ddot{y}) \\ &\quad + 2\theta(y\dot{y} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}) + \dot{u} \end{aligned} \tag{14}$$

수식 (14)는 수식 (2)와 같은 상태방정식으로 쉽게 변환될 수 있다. 행렬 $K = [2\ 3\ 4]$를 선택하면 행렬 $A_m = A - bK$은 고유치(eigenvalue)가 -1과 $-1 \pm j$가 되어 안정하며 $PA_m + A_m^T P = -I$를 만족하는 정정 행렬 P가 존재하게 된다. 그러면 함수 ϕ와 $v = \dot{u}$은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \phi &= 2e^T Pb(y\dot{y} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}) \\ v &= -Ke - u - y + \ddot{y} \\ &\quad - 2\widehat{\theta}(y\dot{y} + \dot{y}^2 + y\ddot{y}) + y_r^{(3)} \end{aligned} \tag{15}$$

여기에서 y_r은 시스템의 출력이 따라가고자 하는 신호를 의미한다. 여기에서는 $y_r = 0.1 \sin t$로 하였다.

미지의 변수 θ가 $\Omega = \{ \theta \mid \|\theta - 1\|^2 \le 1 \}$ 내에 있다고 가정하자. 또한 가정 2의 δ는 0.1로 한다. 미지의 변수 θ에 대한 추정치인 $\widehat{\theta}$를 갱신하는 법칙으로 (10)과 (11)을 선택하였을 때 그 오차는 그림 2와 같다. 여기에서 미지의 변수 값은 1로 하였다. 그림에서 알 수 있듯이 위치, 속도, 그리고 가속도 오차 모두가 영으로 수렴함을 알 수 있다. 그림 3은 이 시스템의 입력 $u(t)$이다. 그림 4는 변수 $\widehat{\theta}(t)$이다. 그림에서 알 수 있듯이 이 변수의 값은 실제 값인 1로 수렴하지 않는다. 변수의 수렴에 대한 연구는 현재 진행중이다.

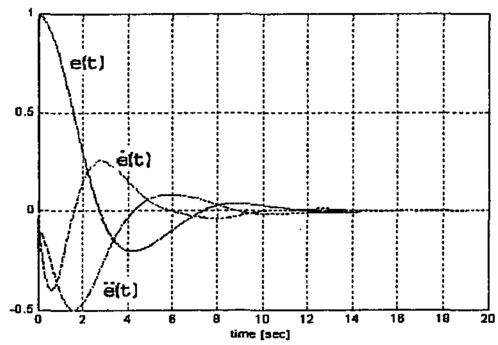

그림 2. 위치, 속도, 그리고 가속도의 추종 오차

Fig. 2. Position, velocity, and acceleration tracking errors.

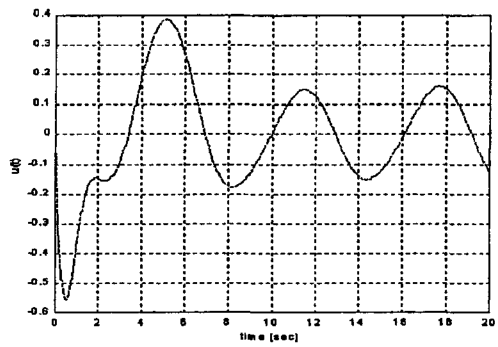

그림 3. 입력

Fig. 3. The input of the system.

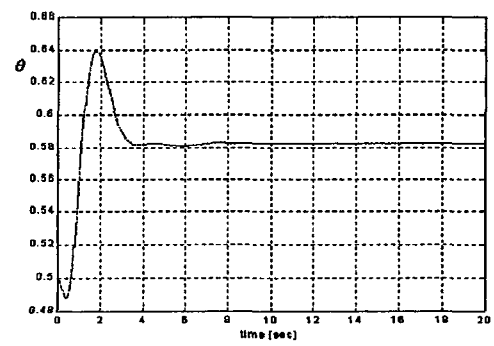

그림 4. 변수 $\widehat{\theta}$

Fig. 4. the parameter $\widehat{\theta}$.

V. 결 론

본 연구에서는 비선형 시스템의 적응 제어 기법을 제시하였다. 기존의 방법은 변수가 존재하는 영역으로 원점을 포함하는 닫힌 볼 또는 초입방체인 경우만을 고려하였으나 본 연구에서는 임의의 콤펙트 볼록 집합인 경우를 고려하였다. 예측하는 변수 $\hat{\theta}(t)$가 이 집합의 외부에 존재하면 변수의 갱신 법칙은 이 변수를 원하는 집합 내부로 보내고 시스템의 추종 오차는 시간에 따라 줄어들도록 제어 기법을 제시하였다. 이러한 성질은 이론적으로 그리고 예제를 통한 시뮬레이션을 통하여 증명되었는데 변수의 갱신 법칙으로 생성되는 변수의 예측치가 실제 변수로 수렴하는 지는 추후 과제로 남아 있다. 일반적으로 변수의 수렴성을 보이기 위해서는 지속적 여진조건(persistency of excitation condition)이 필요한데 이러한 조건을 찾는 것이 추후의 과제이다.

참 고 문 헌

[1] A. Morse, "Global stability of parameter adaptive control systems," IEEE Trans. Automat. Contr. vol.25, pp. 433-439, 1980.

[2] P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic, "Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control," Automatica, vol.20, pp. 583-594, 1984.

[3] S. S. Sastry and M. Bodson, Adaptive Control: Stability, Convergence, and Robustness. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.

[4] A. Datta and P. A. Ioannou, "Performance analysis and improvement in model reference adaptive control," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.39, pp. 2370-2387, 1994.

[5] H. K. Khalil, "Adaptive Output Feedback Control of Nonlinear Systems Represented by Input-Output Models," IEEE Trans. Automat. Contr., vol.41, pp.177-188, 1996.

[6] A. Isidori, Nonlinear Control Systems, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989.

[7] R. Marino and P. Tomei, "Global adaptive output-feedback control of nonlinear systems-Part 1: Linear parameterization," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, pp. 17-32, 1993.

저 자 소 개

梁 玄 錫(正會員)

1961年 4月 7日生. 1984年 5月 Purdue University 전기전자 공학과 졸업 (공학석사). 1991年 12月 University of California, Berkeley 전기전자공학과 졸업 (공학박사). 1992年 3月~1998년 8월 홍익대학교 전자공학과 조교수. 1998년 9월~현재 홍익대학교 전자전기공학부 부교수. 1999년 8월~2000년 7월 University of Washington 객원교수. 주관심 분야는 적응제어, 비선형 제어 이론 및 알고리즘