

## 통제변수를 이용한 PERT 네트워크에서 프로젝트 완료확률의 추정\*

### Control Variates for Percentile Estimation of Project Completion Time in PERT Network

권치명\*\*  
Chimyung Kwon

#### Abstract

Often system analysts are interested in the estimation of percentile for system performance. For instance, in PERT network system, the percentile that the project is to be completed in *targer-time* is important information to evaluate the project. Typically the control variate method is used to reduce the variability of mean response using the correlation between the response and the control variates with a little additional cost during the course of simulation.

In the same spirit, we apply this method to estimate the percentile of project completion time in PERT system, and evaluate the efficiency of the controlled estimator for its percentile. Simulation results indicate that the controlled estimators are more effective in reducing the variances of estimators than the simple estimators, however those tend to a little underestimate the percentiles for some critical values. We need more simulation experiments to examine such a kind of bias problem. We expect this research presents a step forward in the area of variance reduction techniques of stochastic simulation.

\* 이 논문은 1998년도 동아대학교 학술연구조성비(국외파견)에 의해 연구되었음.

\*\* 동아대학교 경영대학 경영정보과학부

## 1. 서론

이산 사건 시뮬레이션에서 분산감소기법(variance reduction technique)에 대한 연구는 대부분 시스템의 평균 성과측정치에 대한 것이었다. 그러나 실용적인 측면에서 평균 성과측정치와 함께 시스템의 반응이 일정시간 내에 일어날 확률은 시스템의 성과를 평가하는 의미 있는 정보를 제공한다. 예를 들어 온 라인 데이터 베이스를 구축하는 경우 시스템 반응시간이 특별히 긴 경우를 알고자 하거나, 대형 프로젝트를 관리 통제하는 기법으로 많이 활용되고 있는 PERT 네트워크 시스템에서 프로젝트가 특정 시점까지 완료될 가능성은 분석자가 관심을 가지는 성과 측도이다.

확률적인 특성을 가지는 성과측정치의 변이성을 감소시키는 방법인 분산감소기법에서 시뮬레이션 도중에 얻어진 변수들 간의 상관성을 이용하는 방법으로 상관계수 유도기법(correlation induction method)과 통제변수기법(control variates method)을 들 수 있다 [1, 2]. 상관계수 유도기법은 시뮬레이션의 입력영역을 변화시켜 성과측정치 사이에 선형상관성(correlation)을 유도하여 성과측정치의 변이성을 개선하고자 한다. Avramidis와 Wilson은 상관계수 유도기법을 이용하여 성과측정치의 판타일(quantile)을 추정하였다 [3, 4].

상관계수 유도기법과는 다르게 통제변수기법은 시뮬레이션 도중에 적은 비용으로 관심 성과측정치와 관련이 있는 부가적인 정보, 즉 통제변수(control variates)를 수집하고 성과측정치와 통제변수간의 상관성을 이용하여 성과측정치의 정확도를 개선시키려는 목적으로 개발되었다. 통제변수를 사용하여 성과측정치의 퍼센타일(percentile)이나 판타일을 추정을 개선하는 연구로는 대표적으로 Hsu와 Nelson[5, 6], Hesterberg와 Nelson [7], Ashford와 Gueses[8] 등의 연구를 들 수 있다. Hsu와 Nelson은 성과측정치와 통제변수가 정규분포 가정을 만족하지 않는 경우에 이들의 결합확률함수(joint probability distribution)로부터 성과측정치의 판타일을 최대우도검정(maximum likelihood test)을 통하여 추정하는 새로

운 통제추정량을 제안하여 M/M/1 대기행렬모형과 간단한 확률 네트워크 시스템에 적용하여 통제추정량의 효율성을 평가하였다. Hesterberg와 Nelson은 통제변수를 변환하여 판타일을 효과적으로 추정하는 방법을 제안하고 이를 대기행렬모형, 재고관리모형, 일정관리 모형에 적용하였다. Ashford와 Gueses는 성과측정치와 통제변수의 결합확률함수에 기초한 퍼센타일 통제추정량(controlled estimator)을 제안하고 이를 투자자본 포트폴리오(portfolio of capital investment)의 위험수준을 평가하는데 사용하여 추정량의 효율성을 평가하였다.

일반적으로 통제변수기법의 효율성은 성과측정치의 종류(예를 들어 평균, 분산, 중앙치, 판타일 또는 특정통계량) 및 그에 대한 분포, 통제변수의 특성(종류, 수, 형태, 분포 등), 시스템의 동적인 발전과정 등에 따라 달라지는 시뮬레이션 모형에 의존적인 측도라고 볼 수 있다[1, 9, 10, 11, 12, 13]. 관심 성과치가 시스템의 성과 평균일 경우에는 평균을 알고 시스템의 성과와 상관성이 높은 변수를 통제변수로 선택할 수 있지만 성과치의 퍼센타일이나 판타일을 추정할 경우에는 통제변수와 성과치의 결합확률에 대한 정보가 필요하므로 통제변수의 분포를 알아야한다. 그러나 통제변수가 여러 개인 경우 현실적으로 이들의 선형결합으로 나타나는 통제변수의 분포를 해석적으로 구하기가 쉽지 않다. 따라서 시뮬레이션 결과로부터 얻어진 성과치와 통제변수의 표본에 기초하여 성과치의 누적확률과 통제변수의 누적확률이 유사한 형태를 보이는 통제변수를 선택하여 성과측정치의 퍼센타일을 추정하는데 적용하면 효과적일 수 있다.

본 연구에서는 대형 프로젝트의 일정관리에서 널리 사용되는 확률적 PERT 네트워크에서 PERT 네트워크의 특성을 이용하여 프로젝트의 총 완료시간(completion time)이 어떤 일정한 값(critical value)을 넘지 않을 확률, 즉 퍼센타일을 추정하는데 효과적인 통제변수기법을 제안하고 이를 PERT 네트워크 시스템에 적용하여 기법의 효율성을 분석하고자 한다.

## 2. 통제변수기법

시스템의 관심 성과변수  $Y$ 에 대해 시뮬레이션 결과 얻어진  $i$ 번째 성과추정치를  $y_i$ 라 할 때  $n$ 회 독립적인 시뮬레이션 런을 실행하여  $Y$ 의 평균성과,  $\mu = E(Y)$ 를 추정하는 단순 추정치는 다음과 같다.

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^n y_i / n = \bar{y} \quad (1)$$

만일  $i$ 번째 시뮬레이션 과정에서  $y_i$ 와 상관관계를 가지는  $m$ 차원의 통제변수 벡터  $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$ 를 관찰할 수 있고 이들의 평균을 알고 있다면(편의상  $E(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ 으로 가정),  $y_i$ 와  $\mathbf{x}_i$ 의 선형결합으로 나타나는  $\mu$ 의 선형 통제추정치(controlled estimator),  $\hat{\mu}(\mathbf{a})$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mu}(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_i \mathbf{x}_i) / n = \bar{y} - \mathbf{a} \bar{\mathbf{x}} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ 는  $\mathbf{x}_i$ 의 선형결합계수 벡터이며  $\bar{\mathbf{x}}$ 는  $\mathbf{x}_i$ 의 평균이다. 이 때 통제추정치  $\hat{\mu}(\mathbf{a})$ 는  $\mu$ 의 불편추정치로 알려져 있으며 통제추절량의 분산은 아래와 같이 주어진다 [9].

$$\text{Var}[\hat{\mu}(\mathbf{a})] = [\text{Var}(\bar{y}) - 2\mathbf{a}\text{Cov}(y, \mathbf{x}) + \mathbf{a}'\text{Var}(\mathbf{x})\mathbf{a}] / n \quad (3)$$

만일 위 식에서  $2\mathbf{a}\text{Cov}(y, \mathbf{x}) > \mathbf{a}'\text{Var}(\mathbf{x})\mathbf{a}$ 이면 통제변수를 사용하여  $\mu$ 를 추정하는 것이 단순추정치에 비해 효과적이다.

$\text{Var}[\hat{\mu}(\mathbf{a})]$ 을 최소로 하는  $\mathbf{a}$ 는

$\mathbf{a} = \text{Var}(\mathbf{x})^{-1}\text{Cov}(y, \mathbf{x})$ 이며, 이 때의 최소분산은

$$\text{Var}[\hat{\mu}(\mathbf{a})] = (1 - R^2)\text{Var}(\bar{y}) \quad (4)$$

이다[9, 10]. 단  $R^2$ 는  $y_i$ 와  $\mathbf{x}_i$ 사이의 다중상관계수(multiple correlation coefficient)의 제곱이다.

일반적으로  $\text{Var}(\mathbf{x})$ 와  $\text{Cov}(y, \mathbf{x})$ 는 알 수 없으므로 시뮬레이션을 통하여 얻어진 표본으로부터 추정하여야 한다.  $\widehat{\text{Var}}(\mathbf{x})$ 와  $\widehat{\text{Cov}}(y, \mathbf{x})$ 를 각각 이들의 추정치라 하면 선형결합 계수벡터의 추정치는

$$\hat{\mathbf{a}} = \widehat{\text{Var}}(\mathbf{x})^{-1}\widehat{\text{Cov}}(y, \mathbf{x}) \quad (5)$$

이다. 시스템의 평균성과를 추정할 경우, 대부분의 연구에서 통제변수의 함수를 선형식으로 가정하는데 Moy와 Ashford[14, 15]는 2차식으로 된 통제변수의 효율성을 연구하여 큰 성과가 없음을 밝혔다. 이러한 이유는 통제변수  $\mathbf{x}$ 의 평균 근처에서 통제변수의 함수는 선형함수로 잘 근사될 수 있고  $y$ 와  $\mathbf{x}$ 의 결합분포가 정규분포를 가지는 경우  $y$ 는  $\mathbf{x}$ 의 선형함수로 잘 표현될 수 있기 때문인 것으로 알려져 있다.

본 연구에서는 선형 통제변수를 이용하여 PERT 네트워크에서 특정한 기간 내에 프로젝트를 완료할 확률을 추정하는데 요구되는 적절한 통제변수를 제안하고 통제변수기법의 적용성과 그 효율성을 분석하고자 한다.

## 3. 프로젝트 완료확률의 추정

시스템 성과치  $Y$ 의 누적확률이  $p$ 가 되는 임계치(critical value)를  $y$ 라 할 때  $Y$ 의  $p$  퍼센타일은 다음과 같이 주어진다.

$$p = \Pr(Y \leq y) = F_y(y) \quad (6)$$

PERT 네트워크에서 프로젝트 완료시간  $Y$ 가 기간  $y$  이내에 완료될 확률을 구하기 위해 독립적으로 시뮬레이션을  $n$ 회 실행하면  $p$ 의 단순 추정치는 표본으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^n I_y(y_i) / n \quad (7)$$

이 식에서  $I_y(y_i)$ 는 지시자함수(indicator function)로  $y_i \leq y$ 이면 1이며 아니면 0의 값을 가진다. 확률변수  $\hat{p}$ 는 성공확률이  $p$ 인 베르누이분포를 가지므로 그 분산은  $p(1-p)/n$ 이다.

시스템의 평균성과치를 추정할 경우와 같이  $Y$ 의 퍼센타일  $p$ 를 추정할 경우에도  $p$ 의 통제 추정치,  $\hat{p}_c$ 는  $p$ 와 적지 않은 상관관계를 가지고 평균이 알려진 통제변수를 선택하여  $I_y(y_i)$ 에서 적절한 통제변수의 선형함수를 빼 줌으로서  $p$ 의 변이성을 감소시킬 수 있을 것으로 기대할 수 있다. 그러나 평균성과치와 달리 성과치의 퍼센타일을 추정할 경우에는 통제변수의 평균대신 그 분포를 알고 있어야 한다.  $i$ 번째 시뮬레이션에서 얻은 통제변수의 함수를  $f_x(\mathbf{x}_i)$ 라 할 때  $p$ 의 통제추정치,  $\hat{p}_c$ 가  $p$ 의 불편추정량이 되기 위해서는 일반적으로 다음과 같은 형태를 가져야 한다.

$$\hat{p}_c = \sum_{i=1}^n [I_y(y_i) - f_x(\mathbf{x}_i)] / n, \quad (8)$$

$$\text{단 } E(f_x(\mathbf{x}_i)) = 0.$$

시스템 분석자는 보통, 시스템 통제변수를 설정할 때 성과추정치와 어느 정도 상관관계를 가지는 변수를 짐작할 수 있는데 성과추정치의 퍼센타일을 추정하는 가장 바람직한 통제변수는  $I_y(y_i) = 1$ 인 경우에 1이 되고  $I_y(y_i) = 0$ 인 경우에 0인 되는 함수로 생각할 수 있다. 확률적

PERT 시스템의 특성에서 살펴보면 주경로(critical path) 상의 활동의 평균 소요시간들은 프로젝트 완료기간  $Y$ 와 밀접한 관계를 가진다. 따라서 본 연구에서는 통제변수의 함수를  $I_y(y_i)$ 와 비슷한 형태의 지시자로 선택하고 주경로활동 소요시간  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 의 함수로 정의하였다.

$$f_x(\mathbf{x}_i) = a [I_x(x_1 + x_2 + \dots + x_m) - q], \quad (9)$$

단  $a$ 는 상수 파라미터이며

$$q = \Pr[I_x(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = 1]$$

$$I_x = 1, \text{ 만일 } (x_1 + x_2 + \dots + x_m) \leq Q$$

$$I_x = 0 \text{ 만일 } (x_1 + x_2 + \dots + x_m) > Q.$$

제안된 통제변수를 식 (8)에 대입하여  $p$  퍼센타일 추정량(controlled estimator)을 구하면 다음과 같다.

$$\hat{p}_c = \sum_{i=1}^n [(I_y(y_i) - aI_x(x_1 + x_2 + \dots + x_m)) - aq] / n \quad (10)$$

퍼센타일 추정량  $\hat{p}_c$ 의 효율성을 평가하기 위해  $\hat{p}_c$ 의 분산을 구하면

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{p}_c) &= \sum_{i=1}^n [\text{Var}(I_y) - 2a\text{Cov}(I_y, I_x) \\ &\quad + a^2\text{Var}(I_x)] / n^2 \\ &= [\text{Var}(I_y) - 2a\text{Cov}(I_y, I_x) + a^2\text{Var}(I_x)] / n \end{aligned} \quad (11)$$

이다. 위의 식에서  $I_y$ 와  $I_x$ 는 각각 성공확률이  $p$ 와  $q$ 인 베르누이 분포를 따르므로  $\text{Var}(I_y) = p(1-p)$ 이고  $\text{Var}(I_x) = q(1-q)$ 임을 쉽게 알 수 있고, 또한

$$\text{Cov}(I_y, I_x) = E(I_y, I_x) - E(I_y)E(I_x) = r - pq$$

$$\text{단, } r = \Pr(Y \leq y, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq Q) \quad (12)$$

위의 결과를 식 (11)에 대입하면

$$\text{Var}(\hat{p}_c) = [p(1-p) - 2a(r-pq) + a^2q(1-q)]/n \quad (13)$$

이 식에서 만일  $2a(r-pq) > a^2q(1-q)$ 이면  $\text{Var}(\hat{p}_c) < \text{Var}(\hat{p})$ 가 되어 통제변수를 사용하여 얻은  $p$ 의 추정치가  $p$ 의 단순 추정치보다 효율적이다. 따라서 프로젝트 완료기간  $Y$ 와 예상 주경로활동의 소요시간 합  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)$ 의 결합확률에서  $r$ 의 값이 크면 통제추정량  $\hat{p}_c$ 가 효과적인 추정량이 될 가능성이 크다고 생각할 수 있다. 시뮬레이션 결과,  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m) \leq Q$  일 때  $Y \leq y$ 이고  $(x_1 + x_2 + \dots + x_m) > Q$  일 때  $Y > y$ 인 점들이 상대적으로 그 반대인 경우보다 많이 나타나면 지시자함수  $I_x(x_i)$ 는  $I_y(y_i)$ 와 상호관련성이 높은 좋은 통제변수가 될 것이다. 식 (13)을  $a$ 와  $q$ 에 대해 미분하여  $\text{Var}(\hat{p}_c)$ 를 최소화하는  $a$ 와  $q$ 는 조건을 구하면 다음과 같다.

$$a = (r - pq) / (q(1 - q)) \quad (14)$$

$$\frac{dr}{dq} - a(1/2 - q) - p = 0 \quad (15)$$

그러나 현실적으로 이러한 값을 찾기 위해서는 위의 식에서  $q, r, dr/dq$ 를 추정해야 함으로 최적  $a$ 와  $q$ 를 발견하는 것은 쉬운 일이 아니다. 식 (14)와 (15)를 풀어서 최적  $a$ 와  $q$ 를 구하는 대신 PERT 네트워크의 특성을 이용하여  $a$ 와  $q$ 를 구하는 휴리스틱 방법을 제안하고자 한다. PERT 시스템에서 프로젝트의 완료기간은 예상 주경로활동의 소요시간 합과 매우 밀접한 상관성을 보이며 [16], 그 차이도 아주 적은 값으로 예상할 수 있으

므로  $p = \Pr(Y \leq y)$ 와  $q = \Pr(x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq Q)$  사이의 선형상관관계도 적지 않을 것으로 가정할 수 있을 것이다. 이러한 가정 하에서 우선  $p = q$ 로 두고  $q = \Pr(x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq Q)$ 에서 시뮬레이션 결과로부터  $Q$ 의 추정치  $\hat{Q}$ 를 이용하여 결합확률  $r$ 의 추정치  $\hat{r}$ 를 구한 다음 통제변수의 계수  $a$ 를 아래와 같이 추정하였다.

$$\hat{r} = \Pr(Y \leq y, x_1 + x_2 + \dots + x_m \leq \hat{Q}) \quad (16)$$

$$\hat{a} = (\hat{r} - \hat{p}\hat{p}) / (\hat{p}(1 - \hat{p})) \quad (17)$$

식 (10)에 위에서 구한 추정치를 대입하여  $p$  퍼센타일 추정량  $\hat{p}_c$  구하고 이의 분산은 다음 식으로 추정하였다.

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{p}_c) = \sum_{i=1}^n [(I_s - \bar{I})^2] / (n(n-1)) \quad (18)$$

여기서

$$I_s = \sum_{i=1}^n [(I_y(y_i) - \hat{a}I_x(x_1 + x_2 + \dots + x_m))$$

$$\bar{I} = \sum_{i=1}^n I_i / n.$$

만일  $\widehat{\text{Var}}(\hat{p}_c)$ 가  $\widehat{\text{Var}}(\hat{p})$ 보다 적으면 통제변수를 이용한 통제추정량이 단순 추정량보다 효율적이다.

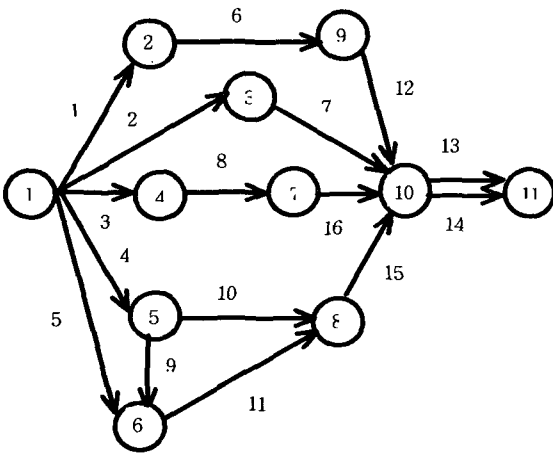
## 4. 시뮬레이션 모형 및 실험결과

### 4.1 PERT 네트워크 모형

통제변수기법에 의하여 프로젝트 완료기간이  $y$  이내일 확률, 즉  $p$  퍼센타일 추정치의 효율성을 평가하기 위해 자원(resource)에 제약이 있는

확률적인 PERT 네트워크 모형에 대해 시뮬레이션을 실행하고 이로부터 얻은 결과를 분석하였다.

<그림 1>에 주어져 있는 PERT 네트워크 모형은 Kwon과 Tew [16]에서 사용했던 것으로 11개의 마디와 16개의 활동으로 구성되었다.



<그림 1> PERT 네트워크 모형

각 활동을 수행하는 데 필요한 자원의 종류와 수는 <표 1>과 같으며, 가용자원 mechanic과 technician의 수는 각각 5명과 3명이다. 또한 각 활동의 소요시간(duration time)은 가상활동(dummy activity) 9를 제외하고 모두 지수분포(exponential distribution)를 따르며 지수분포의 평균은 <표 1>에서와 같다. 각 활동은 그 활동에 앞선 선행활동이 완료되지 않으면 시작될 수 없으며 또한 활동에 필요한 가용자원이 확보되어야 활동을 착수할 수 있다. 선행활동이 모두 완료되고 가용자원 mechanic과 technician이 확보되어 시작 가능한 여러 개의 활동이 있을 경우에는 활동의 기대 작업소요시간이 짧은 활동(shortest expected processing time) 순서로 가용자원이 할당한다.

이 네트워크에서 성과치는 프로젝트 완료시간  $Y$ 로써 프로젝트가 일정시간  $y$ 이내에 완료될 확률  $p$ 를 구하고자 한다. 통계변수는 활동 2, 7,

14의 작업소요시간의 합으로 생각하였다. 이 통계변수는 Kwon과 Tew[16]에서 제안된 것으로 프로젝트 완료시간  $Y$ 와 깊은 상관관계를 가지는 변량이다. 활동 2, 7, 14를 수행하기 위해 대기하는 시간은 여기서 제외하였다. SLAM II 네트워크를 사용하여 이 모형을 기술하였으며 실험은 독립적인 런을 100회 실시하여 100개의  $(y_i, x_1, x_2, x_3)$ 에 대한 표본을 얻었다.

<표 1> 활동의 소요시간 및 수행 필요자원

활동	활동 소요시간	필요 mechanic	필요 technician
1	expon(3.0)	3	0
2	expon(9.0)	0	2
3	expon(2.0)	2	0
4	expon(1.0)	1	0
5	expon(2.0)	2	0
6	expon(4.0)	4	1
7	expon(8.0)	0	2
8	expon(1.0)	2	0
9	Dummy	0	0
10	expon(1.0)	1	0
11	expon(2.0)	1	0
12	expon(5.0)	3	0
13	expon(1.0)	1	1
14	expon(2.0)	1	2
15	expon(1.0)	1	1
16	expon(3.0)	2	0

4.2 시뮬레이션 실험결과

프로젝트 완료시간  $Y$ 에 대한 임계치  $y$ 를 4개 선택하여 ( $y=20, 30, 40, 50$ ), 완료시간이  $y$ 이내일 확률  $p = \Pr(Y \leq y)$ 을 추정하였다. 통계변수는 독립적으로 수행되는 활동 2, 4, 7의 소요시간의 합으로 주어졌으므로 이는 평균이 서로 다

른 독립적인 3개의 지수분포로부터 추출된 확률 변수의 합으로 정의된다. 따라서 통제변수의 평균과 분산은 쉽게 구할 수 있으나 분포함수는 여러 계산과정을 거쳐 얻어질 수 있는 복잡한 형태의 함수로 알려진 분포가 아니다.

시뮬레이션 결과, 프로젝트 완료시간  $Y$ 와 통제변수  $X(=x_1+x_2+x_3)$ 의 범위는 각각 (8.59, 88.5), (1.94, 61.6)로 큰 편차를 보였는데, 이는 프로젝트의 각 활동에 소요되는 시간이 지수분포를 따르기 때문으로 생각된다. 또한  $Corr(Y, X)$ 는 약 0.82 정도로 높은 상관관계를 보이고 있다. 퍼센타일  $p$ 값의 단순추정치  $\hat{p}$ 는 식 (6)에 의해 구하였고  $\hat{p}$ 의 분산은  $\hat{p}(1-\hat{p})/(n-1)$ 로 추정하였다. 복잡한 형태를 가지는 확률변수  $X$ 의 분포를 이용하여  $q=p$ 가 되는  $Q$ 를 구할 수 있으나 PERT 네트워크의 특성상 통제변수  $X$ 의 값은 항상 프로젝트 완료시간  $Y$ 보다 적으며 또한  $X$ 와  $Y$ 의 퍼센타일 사이의 선형상관계수의 값이 0.74 정도로 적지 않아  $Q=y$ 으로 두고  $q$ 를 추정하였다.  $r$ 의 추정치  $\hat{r}$ 는 식 (12)에 의해 구하였으며  $\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}$ 를 식 (14)에 대입하여  $a$ 를 추정하였다. 이로부터  $p$ 의 통제된 추정치  $\hat{p}_c$ 는 식 (10)을 이용하여,  $\hat{p}_c$ 의 분산은 식 (11)을 이용하여 각각 추정하였다.

<표 2>  $p$  퍼센타일 추정치와 분산

임계치	단순추정치		통제추정치			
	$\hat{p}$	$Var(\hat{p})$	$\hat{p}_c$	$\hat{q}$	$\hat{a}$	$Var(\hat{p}_c)$
20	0.44	0.0024	0.42	0.65	0.63	0.0014
30	0.78	0.0017	0.76	0.84	0.78	0.0006
40	0.88	0.0011	0.87	0.90	0.83	0.0002
50	0.96	0.0039	0.95	0.97	0.75	0.0001

100회의 독립적인 시뮬레이션 런을 통해 4개의 임계치  $y$ 에 대하여 추정된  $\hat{p}, \hat{p}_c, \hat{q}, \hat{a}$

의 시뮬레이션 결과는 <표 2>와 같다. 이 표의 결과에서 통제추정치  $\hat{p}_c$ 의 분산은 단순추정치  $\hat{p}$ 의 분산에 비해 40%~80% 정도 감소되었다. 그러나 퍼센타일을 추정하는데 통제추정치가 단순추정치에 비해 다소 하향추정(underestimate)하는 경향을 보이고 있다. 이는 PERT 네트워크에서  $q$ 를 추정할 때  $X$ 의 임계치로  $Y$ 의 임계치인  $y$ 를 사용함으로써 기인한 것으로 해석할 수 있을 것 같다.

### 5. 결론

시스템 시뮬레이션에서 시스템의 평균성과치와 아울러 성과치의 퍼센타일은 시스템의 성과를 평가하는 중요한 정보를 제공한다. 특히 시스템의 신뢰성을 평가하는 경우 성과치가 일정수준에 도달하는 퍼센타일의 추정은 필수적이라 하겠다. 본 연구에서는 PERT 네트워크에서 프로젝트의 완료시간이 특정한 기간 내에 완료될 확률을 추정하는 문제에 통제변수기법을 적용하여 기법의 효율성을 조사하였다.

통제변수기법을 사용하여 평균성과치를 추정할 때는 성과치와 상관성이 높으며 평균이 알려진 통제변수를 도입할 수 있지만 퍼센타일을 추정할 때는 통제변수의 평균과 아울러 그에 대한 분포함수의 정보가 필요함으로 통제변수의 선택이 평균성과치를 추정할 때보다 제한적이 된다.

본 연구는 PERT 네트워크에서 각 활동이 지수분포를 따르며 각 활동을 수행하는 데 자원이 필요한 경우에 프로젝트가 일정기간 내에 완료할 확률을 추정하는데 효과적인 통제변수를 제시하였다. 제안된 통제변수는 시스템의 활동 소요시간이 확정적일 경우 주경로(critical path) 활동의 소요시간이 되며 따라서 이 통제변수는 실제로 전체 프로젝트 완료시간과 높은 상관성을 가지게 된다. 시뮬레이션 결과, 퍼센타일을 추정하는데 통제추정치가 단순추정치에 비해 다소 하향추정하는 경향을 보였으며 통제추정치  $\hat{p}_c$ 의 분산은 단순추정치  $\hat{p}$ 의 분산에 비해 훨씬 감소되었다.

통제변수기법은 현장 시뮬레이션 실질적으로

적용되는 효과적인 분산감소기법이라고 볼 수 있는데 이러한 측면에서 비록 제한적인 PERT 네트워크에서 얻은 것이지만 이러한 결과는 시스템의 신뢰성을 평가하는 다른 모형에 효과적으로 적용될 수 있는 가능성을 제시하고 있다.

#### 참고문헌

- [1] Wilson, J.R, "Variance Reduction Techniques for Digital Simulation", *American Journal of Mathematical Management Sciences* Vol.4(1984), pp. 227-312.
- [2] Law, A.M. and W.D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis* (2nd Ed.), McGraw Hill, 1991.
- [3] Avramidis, T. N., "Variance Reduction for Quantile Estimation via Correlation Induction," *Proceedings of the Winter Simulation Conference*(1992), pp.572-576.
- [4] Avramidis, T. N. and J.R. Wilson, "Correlation Induction Techniques for Estimating Quantile in Simulation Experiments," *Operations Research*, forth-coming.
- [5] Hsu, J.C. and B.L. Nelson, "Control Variate for Quantile Estimation", *Management Science* Vol.36(1990), pp.835-851.
- [6] Hsu, J.C. and B.L. Nelson, "Control Variate for Quantile Estimation," *Proceedings of the Winter Simulation Conference* (1987), pp.434-444.
- [7] Hesterberg, T.C. and B.L. Nelson, "Control Variates for Probability and Quantile Estimation," *Management Science* Vol.44 (1998), pp.1295-1312.
- [8] Ashford, R. W. and M. C. M. Guedes, "Using control Variates to Improve the Efficiency of Percentile Estimation in Stochastic Simulation", *Journal of Operational Research Society* Vol.39 (1989), pp. 919-932.
- [9] Lavenberg, S.S., T.L. Moeller and P. D. Welch, "Statistical Result on Control Variates with Applications to Queueing Network Simulation," *Operations Research* Vol.30 (1982), pp.182-202.
- [10] Lavenberg, S.S. and P.D. Welch, "A Prospective on the Use of Control Variates to Increase the Efficiency of Monte Carlo Simulations," *Management Science*, Vol.27 (1981), pp.322-335.
- [11] Nova, A.M.P., A Generalized Approach to Variance Reduction in Discrete Event Simulation Using Control Variates, Unpublished Ph. D. dissertation, Department of Mechanical Engineering, The University of Texas, Austin, Texas, 1990.
- [12] Nozari, A., S.F. Arnold and C.D. Pegden, "Control Variates for Multipopulation Simulation Experiments," *IIE Transactions* Vol.16(1984), pp.159-169.
- [13] Tew, J. D, "Correlation Induction Techniques for Fitting Second-Order Meta-models in Simulation Experiments," *Proceedings of the Winter Simulation Conference* (1989), pp.538-546.
- [14] Moy, W.A, "Practical Variance Reducing Procedures for Monte Carlo simulations," *Computer Simulation Experiments with Models of Economic Experiments*(1971), pp.269-289, John Wiley & Sons, New York.
- [15] Ashford, R. W. and E. M. Beale. "Using Martingale to Make Stochastic Simulation More Precise", *European Journal of Operational Research* Vol.38 (1989), pp.86-93.
- [16] Kwon, C.M. and J.D. Tew, "Combining Antithetic and Control Variates in Designed Simulation Experiment," *Management Science* Vol.40(1994), pp. 1021-1034.



● 저자소개 ●



권치명

1978년 서울대학교 산업공학과 졸업

1983년 서울대학교 대학원 산업공학과 졸업

1991년 VPI & SU 산업공학과 박사

현재 동아대학교 경영정보과학부 교수

관심분야: Simulation Modeling & Output Analysis, Simulation Optimization, FMS