

▣ 응용논문

산업설비의 내용년수 추정을 위한 Weibull 생존곡선의 적용†
 A Study on the Application of Weibull Survivor Curves to Estimate
 Mortality Characteristics of Industrial Property

오 현 승 *
 Oh, Hyun-Seung

Abstract

A mixture of two distributions, each belonging to the same known Weibull distributions, is proposed and a simple graphical method for estimating the parameters of the Weibull distribution is applied. It appears from the results of this study that the mixed Weibull distribution is an appropriate expression for describing industrial property mortality characteristics.

1. 서론

산업설비자산은 국가 경제발전에 중요한 투입요소이므로 그 특성에 대한 정확한 분석이 필요하다. 산업설비는 일정기간 동안 내구성을 지니므로 자산별 특성의 차이를 파악하기 위해서는 폐기분포의 형태 및 내용년수를 정확히 분석하여야 한다. 동일한 종류의 자산이라도 폐기되는 시점은 서로 다르므로 시간경과에 따라 자산의 가치가 감소되는 추세를 보여주는 폐기분포는 매우 중요한 기초 통계자료가 된다. 외국의 경우는 자산별 폐기분포가 1930년대부터 연구되고 있으나, 우리 나라의 경우는 자산별 폐기분포에 대한 연구가 미진하고, 자산의 중고시장이 활성화되어 있지 않고 더구나 많은 경우 중고자산의 가격이 왜곡되어 있기 때문에 자산별로 폐기분포를 구체적으로 파악할 수 없는 실정이다.

설비자산의 폐기분포를 추정하기 위한 과정은 크게 설비수명분석(Life analysis) 과정과 설비수명추정(Life estimation) 과정으로 구분된다. 설비수명분석 과정이란 해당 자산의 폐기 상황에 대한 사실적 자료를 분석하여 자산 가치 감소의 특성을 수학적으로 또는 도식적으로 측정하는 기법이다. 설비수명분석 과정의 목적은 자산의 미래 폐기 형태를 예측할 수 있는데 필요한 정보를 제공하는 것이다. 설비수명추정 과정이란 설비수명분석에 의하여 구해진 결과를 이용하여 경제적인 추세, 기술상의 변화 정도, 경영상의 변화 등을 고려하여 설비자산의 정확한 미래 폐기 형태를 추정한다. 이러한 설비수명분석 과정은 설비자산의 폐기 형태에 따른 연도별 자료를 알 수 있을 때는 Actuarial 방법을 사용하고 연도별 자료가 주어지지 않을 때는 Nonactuarial 방법을 사용한다.

† 이 논문은 1999년도 한남대학교 학술연구조성비 지원에 의하여 연구되었음.

* 한남대학교 산업공·기계공학부 교수

Nonactuarial 방법으로는 Simulated Plant Record(SPR) 법, Computed Mortality(CM) 법, Turnover 방법이 사용된다. SPR 법이란 설비자산의 연도별 폐기 자료가 주어지지 않을 경우, Iowa형 생존곡선(Iowa type survivor curve)을 이용하여 설비자산의 생존모형을 임의적으로 추정한다. White[25]는 설비자산의 잔존가치와 기간별 감손율을 이용하여 설비자산의 생존곡선을 추정하였다. CM법[9]이란 설비자산의 생존곡선이 부분적으로 파악되지 않을 때 이를 보충하여 완전한 생존곡선을 추정하는 것을 말한다. Turnover 방법[14]은 설비자산의 연간 폐기율(annual retirements), 연말 잔존액(annual balances), 연간 구입액(annual additions)을 이용하여 설비자산의 생존곡선을 추정한다. 즉, 설비자산들의 설치와 폐기가 이루어지며 일정 수를 유지할 때까지의 자산의 일회전 기간을 기준으로 자산의 수명을 추정하는 방법이다. 그러나 Nonactuarial 방법은 설비자산의 설치와 폐기에 대한 연도별 자료가 주어지지 않았을 경우에 사용하는 차선의 방법이라 할 수 있다.

설비자산의 정확한 생존모형을 추정하기 위해서는 Actuarial 방법을 사용하여야 한다. Kimball[11]은 절단형 정규분포(Truncated Normal distribution)에 기초한 생존곡선을 개발하여 h-curve라 명명하였다. Krane[12]은 설비의 누적되는 폐기율(Retirement rate)을 다항식(polynomial)의 형태로 표현하여 생존곡선을 구하였고 Scigliano[21]는 Cowles[3]가 개발한 생존모형을 Weibull 고장함수(hazard function)를 이용하여 구하였다. Lamp[13]는 폐기율이 독립적인 확률표본이고 기대치가 일정한 경우 이를 직교다항식을 이용하여 정확한 생존모형을 추정할 수 있는 방안을 제시하였다. Henderson[8]은 누적 Weibull 함수를 이용하여 설비자산의 생존곡선을 구하였다. 그러나, 최근의 자동화 생산 시스템에서의 첨단 설비들은 물리적 훼손보다는 기술상의 진부화나 새로운 기술과의 경쟁력이 설비교체의 큰 원인이 되고 있으며, Fitch[6]와 Wolf[26]는 설비교체의 원인들을 개별화시킴으로써 적절한 생존곡선을 찾고자 하였다. Wolf[26]는 Ocker[17]의 연구를 발전시켜서 정보통신 산업에서는 기술상의 진부화가 가장 큰 원인이 된다고 주장하였다. White[24]는 경제적인 원인들을 고려함으로써 가장 경제적인 생존모형을 구할 수 있다고 예를 들어 제시하였다. Dandekar[4]는 생존모형 개발시 사용수명 뿐만 아니라 연대기적인 시간을 고려하여야 한다고 주장하였으며, 제품수명주기(Product life cycle)를 고려한 생존모형을 제안하였다. Kateregga[10]는 정보산업 분야의 생존모형으로는 Gompertz 생존곡선[1]과 Fisher-Pry 생존모형[5]이 가장 부합한 모형이라고 주장하였다. Oh[18]는 기술예측모형(Technological Forecasting Model)을 이용한 생존모형을 제시하고 설비의 자산 감소형태에 따른 각각의 생존곡선을 선정하는 절차를 제안하였다. 따라서, 본 연구에서는 설비자산들의 생존형태를 추정하기 위하여 여러 가지 생존곡선을 분석하여 가장 적절한 생존곡선을 제시하고자 한다,

2. 산업설비의 생존모형

동일한 설비라 할지라도 각각의 내용년수는 같지 않으며 동일한 종류의 많은 설비가 있을 때 각각의 내용년수는 일정하지 않고 널리 분산된다. 이러한 설비의 생존형태는 폐기도수곡선(Retirement frequency curve), 폐기곡선(Retirement curve) 및 폐기율곡선(Retirement rate curve)으로 표현된다. 확률변수 X 를 폐기되는 시간을 나타낸다면 누적 분포함수(Cumulative distribution function)는

$$F(x) = P(X \leq x) \quad (1)$$

이고 이를 폐기함수(Retirement function)라 한다. 그러나 자산설비의 설비수명분석에서는 보조적인 함수형태로 변환하여

$$S(x) = 1 - F(x) = P(X > x) \tag{2}$$

를 사용하며 이를 생존함수(Survivor function) 또는 생존곡선(Survivor curve)이라 부르며 어느 시점까지 설비가 사용될 확률을 의미한다. 일반적으로 설비수명분석에서 확률변수 X는 음의 값을 가질 수 없으므로 S(0) = 1.0 이라고 가정한다.

이러한 생존곡선은 왜도성과 모수 추정방법에 따라 선형 생존곡선모형과 비선형 생존곡선모형으로 구분하여 분석한다. 설비의 연도별 폐기 형태를 분석하기 위한 대표적인 생존곡선모형은 아래와 같다.

(1) Pearl 생존곡선(PL : Pearl survivor curve)

비선형 함수 형태인 Pearl 생존곡선[20]은,

$$S(t) = \frac{1.0}{1 + a \cdot \exp(\beta \cdot t)} + \epsilon(t) \tag{3}$$

여기서, S(t) = t시점에서의 생존율,

t = 관측시점,

a (a > 0) = 위치 모수,

β (β > 0) = 형태 모수,

ε(t) ~ i. i. d. N(0, σ²).

(2) Gompertz 생존곡선(GZ : Gompertz survivor curve)

비선형 함수 형태의 Gompertz 생존곡선[1]은,

$$S(t) = \exp(-G \cdot e^{-kt}) + \epsilon(t) \tag{4}$$

여기서, S(t) = t시점에서의 생존율,

t = 관측시점,

G, k (G, k > 0) = 모형의 모수,

ε(t) ~ i. i. d. N(0, σ²).

(3) Weibull 생존곡선(WB : Weibull survivor curve)

비선형 함수 형태인 Weibull 생존곡선[23]은,

$$S(t) = 1.0 - e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta} + \epsilon(t) \tag{5}$$

여기서, S(t) = t시점에서의 생존율,

t = 관측시점,

α (α > 0) = 위치 모수,

β (β > 0) = 형태 모수,

ε(t) ~ i. i. d. N(0, σ²).

- (4) 선형화 된 Fisher-Pry 생존곡선(LFP : Linearized Fisher-Pry survivor curve)
 만약 Fisher-Pry 생존곡선[5]을 아래와 같이 선형화 하면,

$$U(t) \equiv \ln \left[\frac{S(t)}{1.0 - S(t)} \right] = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \epsilon(t) \quad (6)$$

여기서, $U(t)$ = 선형화된 Fisher-Pry 생존모형,
 $S(t)$ = t 시점에서의 생존율,
 t = 관측시점,
 $\epsilon(t) \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$.

- (5) 선형화 된 Gompertz 생존곡선(LGZ : Linearized Gompertz survivor curve)
 Gompertz 생존곡선[1]을 아래와 같이 선형 함수로 변환하면,

$$V(t) \equiv -\ln [-\ln(S(t))] = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \epsilon(t) \quad (7)$$

여기서, $V(t)$ = 치환된 선형 Gompertz 생존모형,
 $S(t)$ = t 시점에서의 생존율,
 t = 관측시점,
 $\epsilon(t) \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$.

- (6) 선형화 된 Weibull 생존곡선(LWB : Linearized Weibull survivor curve)
 Weibull 생존곡선을 아래와 같이 선형화 하면[22],

$$W(t) = \ln [-\ln [1.0 - S(t)]] = \beta_0 + \beta_1 \cdot t + \epsilon(t) \quad (8)$$

여기서, $W(t)$ = 치환된 선형 Weibull 성장곡선
 $S(t)$ = t 시점에서의 생존율,
 t = 관측시점,
 $\epsilon(t) \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$.

생존곡선의 자료로는 과거의 시계열 폐기 자료가 이용될 수 있으며, 비선형 생존곡선의 오차항($\epsilon(t)$)들이 동일한 분포를 따르지 않는 경우가 있으므로 GMM(Generalized Method of Moments)[7]에 의해서 모수를 추정한다. 구해진 산업설비들의 폐기 자료에 의하여 적합도가 가장 좋은 생존곡선의 선정은 수정 평균제곱오차(Mean Estimate Error) 값이 최소가 되는 모형을 선정한다[16].

$$\text{Mean Estimate Error} = \sum_{t=1}^N \frac{(S(t) - \widehat{S}(t))^2}{N} \times 1000 \quad (9)$$

여기서, $S(t)$ = t 시점에서의 생존율,
 $\widehat{S}(t)$ = t 시점에서의 추정된 생존율,
 N = 연도별 폐기 자료.

3. 생존곡선의 분석 결과

산업설비들의 사용 연도에 따른 생존곡선을 구하기 위하여 각 산업 분야에서 수집된 22개의 생존곡선을 사용한다[19].

3.1 Kruskal-Wallis 검정

제안된 6개의 생존곡선에 대하여 비모수적인 Kruskal-Wallis 검정[2]을 한 결과는 <표 1>과 같다.

<표 1> Kruskal-Wallis 검정 결과

생존율	test value	p-value
10%	11.83	0.0373*
25%	15.84	0.0073*
50%	22.57	0.0004*
75%	22.13	0.0005*
100%	44.87	0.0001*
* : significantly different with confidence		

<표 1>에서 보는 바와 같이 검정 결과 생존율이 높아질수록 즉 폐기 자료가 많아질수록 각 모형간에 차이가 있는 것으로 분석된다.

3.2 Tukey 검정

Kruskal-Wallis 검정 결과 각 모형간에 차이가 있으므로 산업설비들의 생존율 추정을 위하여 위에서 언급한 수정 평균제곱오차에 의하여 최선의 생존모형을 선정하고자 Tukey 검정[15]을 한 결과가 <표 2>와 같다.

<표 2> 생존모형의 분산분석표

요인	자유도	sum of squares	mean square
모형	5	516.62	
오차	126	1219.77	9.68
소계	131	1736.39	

<표 2>를 이용하여 구해진 Tukey 검정치는 0.04895이므로 이를 이용하여 22개 폐기자료에 적용한 각 모형간의 적합도 검정을 한 결과가 <표 3>과 같다.

<표 3> 각 모형간의 Tukey 검정 결과

모형(m.s)	LFP	LGZ	LWB	PL	GZ	WB
LFP(6.23)	-	2.09	0.38	4.18*	4.70*	4.75*
LGZ(4.14)		-	1.71	2.09	2.61	2.66
LWB(5.86)			-	3.81*	4.33*	4.38*
PL(2.05)				-	0.52	0.57
GZ(1.53)					-	0.05
WB(1.48)						-

* : indicate significant difference exists between models

<표 3>에서 보는 바와 같이 Weibull 생존곡선의 수정 평균제곱오차가 1.48로 가장 적으며 선형화된 Fisher-Pry 생존곡선이나 선형화된 Weibull 생존곡선보다 더 적합한 것으로 나타났다.

4. 혼합 Weibull 생존곡선의 적용

Tukey 검정 결과 산업설비의 생존곡선으로 Weibull 생존곡선이 가장 적합한 것으로 분석되었으므로 이를 바탕으로 설비들의 시간 경과에 따른 실제적인 가치 상각을 정확하게 파악하기 위하여 혼합 Weibull 생존곡선을 고려한다.

4.1 혼합 Weibull 생존곡선

산업설비의 좀 더 정확한 폐기 형태를 나타내기 위하여 혼합 Weibull 생존곡선을 다음과 같이 적용한다.

$$S(x) = v \cdot S_1(x) + (1 - v) \cdot S_2(x)$$

여기서, v ($0 < v < 1$) = 혼합 Weibull 생존곡선의 비율

$S_1(t)$ = 혼합 Weibull 생존곡선의 첫 번째 부분

$S_2(t)$ = 혼합 Weibull 생존곡선의 두 번째 부분

4.2 혼합 Weibull 생존곡선의 적합도 검정

각 산업분야에서 수집된 33개의 폐기자료에 일반적인 Weibull 생존곡선과 혼합 Weibull 생존곡선을 적용한 결과는 <부록 1>와 같다. 구해진 폐기자료를 이용하여 좀더 적합한 생존곡선을 구하기 위하여 다음과 같은 적합도 검정을 한다.

$$H_0: \text{Weibull 생존곡선이 더 적합하다} (\mu_W \leq \mu_M)$$

$$H_1: \text{혼합 Weibull 생존곡선이 더 적합하다} (\mu_W > \mu_M)$$

검정통계량

$$T = \frac{AD_{M-w}}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}}$$

여기서, μ_M = 혼합 Weibull 생존곡선을 적용한 평균 값

μ_w = Weibull 생존곡선을 적용한 평균 값

AD_{M-w} = 두 생존곡선의 차이의 평균 값

S_d = 차이의 표준편차

n = 표본의 수

<부록 1>의 결과를 이용하여 두 생존곡선간의 쌍대비교를 한 결과,

$$AD_{M-w} = 22,372.95,$$

$$S_d = 45,794.94,$$

$$n = 33,$$

이고 이를 이용한 T 값은 2.806이 되어 t 분포의 기각치인 2.037 ($\alpha = 0.05, n-1 = 32$) 보다 큰 값이 되어 귀무가설이 기각된다. 즉 새로 제안된 혼합 Weibull 생존곡선이 산업설비의 내용년수를 추정하는데 더 적합한 것으로 나타났다.

5. 결론

일반 투자안의 의사결정에서와 마찬가지로 산업설비 분석에 있어서도 가장 중요한 결정요소 중의 하나가 설비의 내용년수의 추정이다. 설비의 자산 가치가 감소하는 원인은 여러 가지가 있을 수 있으나 여러 원인 중 물리적 훼손이 과거의 산업설비에서는 가장 중요한 원인이었으므로 기존의 생존모형 분석에서는 고장율을 이용하여 설비의 내용년수를 추정하였다. 그러나 새로운 기술상의 변화로 인한 첨단 생산시스템에서의 설비 교체 분석시에는 적합치 않다. 따라서, 본 연구에서 제안된 혼합 Weibull 생존곡선을 이용하여 설비의 폐기 형태를 추정함으로써 설비들의 시간 경과에 따른 실제적인 가치상각을 정확히 파악할 수 있다.

참고문헌

- [1] Booth, H.; "Transforming Gompertz's Function for Fertility Analysis: The Development of a Standard for the Relational Gompertz Function", *Population Studies*, 38: 495-506, 1984.
- [2] Concover, W. J.; *Practical Nonparametric Statistics*, 2nd Edition, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [3] Cowles, H. A.; "Prediction of Mortality Characteristics of Industrial Property Groups", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1957.

- [4] Dandekar, M.; "Investigation the Product Life Cycle Concepts: An Application to Capital Recovery Evaluation within the Telephone Industry", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1987.
- [5] Fisher, J. C., and Pry, R. H.; "A Simple Substitution Model of Technological Change", *Technological Forecasting and Social Change*, 3: 75-88, 1971.
- [6] Fitch, W. C.; "Conceptual Framework for Forecasting the Useful Life of Industrial Property", *Proceedings of the Iowa State University Regulatory Conference*, Ames, Iowa, U.S.A., 1984.
- [7] Hansen, L. P.; "A Method of Calculating Bounds on the Asymptotic Covariance Matrices of Generalized Method of Moments Estimators", *Journal of Econometrics*, 30: 203-238, 1985.
- [8] Henderson, A. J.; "Actuarial Methods for Estimating Mortality Parameters of Industrial Property", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1968.
- [9] Jenson, S. D.; "An Investigation of the Simulated Plant Record(SPR) Balances Life Analysis Model", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1983.
- [10] Kateregga, K. A.; "Technological Forecasting Models in Capital Recovery", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1987.
- [11] Kimball, B. F.; "A System of Life Tables for Physical Property Based on the Truncated Normal Distribution", *Econometrica*, 15: 342-360, 1947.
- [12] Krane, S. A.; "Analysis of Survival Data by Regression Techniques", *Technometrics*, 5: 161-174, 1963.
- [13] Lamp, G. E.; "Dispersion Effects in Industrial Property Life Analysis", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, 1968
- [14] Marston, A., R. Winfrey and J. C. Hempstead; *Engineering Valuation and Depreciation*, Iowa State University Press, Ames, Iowa, U.S.A., 1979.
- [15] May, J. M.; "Extended and Corrected Tables of the Upper Percentage Points of the Studentized Range," *Biometrika*, 39: 192-193, 1952.
- [16] Nager, A. L.; "Statistical Testing of the Accuracy of Forecasts," *Statistical Neerlandica*, 16(3): 237-249, 1962.
- [17] Ocker, A. C.; "Life Cycle Approach to Depreciation Analysis," *Proceedings of the Iowa State University Regulatory Conference*, Ames, Iowa, U.S.A., 1983.
- [18] Oh, H. S.; "The Selection of Technological Forecasting Models in Life Analysis", Unpublished Ph.D. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1988.
- [19] Oh, H. S., and Moon, G. J.; "A Comparison of Technological Growth Models", *Journal of the Korean Society for Quality Management*, 22(2): 51-68, 1994.
- [20] Pearl, R. and Reed, L. J.; "A Futher Note on the Mathematical Theory of Population Growth," *Proceeding of the National Academy of Science*, 8: 365-368, 1922.

- [21] Scigliano, J. M.; "An Evaluation of the Weibull Distribution as Estimation Industrial Property Mortality," Unpublished M.S. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1965.
- [22] Shaif, M. N. and Islam, M. N.; "The Weibull distribution as a General Model for Forecasting Technological Change," *Technological Forecasting and Social Change*, 18: 247-256, 1980.
- [23] Weibull, W.; "A Statistical Distribution Function of Wide Applicability," *Journal of Applied Mechanics*, 18: 293-297, 1951.
- [24] White, B. E.; "Economic Forces of Retirement", *Proceedings of the Iowa State University Regulatory Conference*, Ames, Iowa, 1986.
- [25] White, R. E.; "The Multivariate Normal Distribution and the Simulated Plant Record Method of Life Analysis", Unpublished M.S. thesis, Iowa State University of Science and Technology, Ames, Iowa, U.S.A., 1968.
- [26] Wolf, F.; "Forecasting Force of Mortality", *Proceedings of the Iowa State University Regulatory Conference*, Ames, Iowa, U.S.A., 1985.

부록 1. 생존곡선의 fitting 결과(1000% 연수-면적)

test 생존곡선	Weibull 생존곡선	혼합 Weibull 생존곡선	fitting 차이
1	35726.7	6976.6	28750.1
2	10781.0	7017.6	3763.4
3	20410.3	7928.2	12482.1
4	158291.7	28640.5	129651.2
5	16292.1	3201.8	13090.3
6	8024.5	7888.1	136.4
7	1023.5	1023.5	0.0
8	6020.9	6020.9	0.0
9	292159.1	63023.0	229136.1
10	16404.6	3441.7	12962.9
11	14306.1	14553.3	- 247.2
12	14550.6	3907.8	10642.8
13	155.7	155.7	0.0
14	4643.5	4643.5	0.0
15	3694.5	3694.5	0.0
16	75900.7	7486.0	68414.7
17	7235.7	5299.7	1936.0
18	18312.2	1886.2	16426.0
19	1705.3	1705.3	0.0
20	16832.0	7463.7	9368.3
21	6301.4	6301.4	0.0
22	11084.7	4674.6	6410.1
23	14660.9	1585.7	13075.2
24	15112.5	3965.5	11147.0
25	74456.8	5018.2	69438.6
26	17030.0	8632.6	8397.4
27	22105.9	4197.2	17908.7
28	34215.1	815.0	33400.1
29	31111.3	4342.2	26769.1
30	29658.5	9260.9	20397.6
31	2196.0	2196.0	0.0
32	4793.7	4793.7	0.0
33	10567.0	15716.4	- 5149.4