⊠연구논문

Resolution Ⅳ 3^t 요인실험법에서 교호작용 효과의 존재에 대한 검정방법연구*

김상익
건국대학교 응용통계학과

Testing on the Existence of Interaction Effects in 3^t Resolution Ⅳ Factorial Experiments

Sang-Ik Kim
Dept. of Applied Statistics, Konkuk University

Abstract

In analysis of resolution Ⅳ fractional factorial experiments, the main effects only are analyzed, even though we can get some useful information on the confounded 2-factor interactions. In this paper, we introduce an exploiting method of the confounded structure of interactions, especially for the near minimal resolution Ⅳ 3^t fractional factorial designs developed by Anderson and Thomas (1979). Moreover, in this paper the application way of the proposed method is also discussed by analyzing some simulated data.

Ⅰ. 서론

인자의 수가 t이고, 각 인자의 수준수가 p로 동일한 p^t 요인실험법(factorial design)에서 t가 커짐에 따라 처리조합(treatment combination)의 수는 현실적으로 수용할 수 없으리 만큼 증가하게 된다. 따라서 고차의 교호작용 효과들이 무시될 수 있는 경우, 일부의 처리조합만을 선택하는 부분실험법(fractional design)이 사용된다. 이러한 부분 실험법을 분류하는 방법으로 Box와 Hunter(1961)는 resolution이라는 용어를 사용하였다.

Box와 Hunter는 k가 $r/2$보다 작은 수들 중에서 가장 큰 정수값을 의미하고 $(r-k)$ 차

* 본 논문은 1999년도 건국대학교 연구년 지원에 의한 논문임.

수 이상의 교호작용이 모두 무시할 수 있는 경우, k차 까지의 교호작용들이 분석 가능한 실험계획을 resolution r 부분실험법이라고 정의하였다. 예를 들어 resolution III 부분실험법은 $r=3$, $k=1$이므로 2차(혹은 2인자) 이상의 교호작용은 모두 무시할 수 있는 경우로서, 주효과만 분석할 수 있는 계획을 의미한다. 그리고 resolution IV 부분실험법에서는 $r=4$, $k=1$이므로 3인자 이상의 교호작용은 모두 무시할 수 있다는 가정 하에서 주효과만 분석이 가능하며, 2인자 교호작용들은 서로 교락(confounding)되어 있어 일반적인 분산분석법에 의해서는 분석이 되지 않는다.

따라서 엔지니어들이나 실험설계자들이 현실적으로 resolution IV 부분실험을 사용하는 경우, 교락되어 있는 2인자 교호작용들이 직접 분석되지 않으므로 resolution III 부분실험법과의 차이점을 이해하지 못하는 경우가 많으며, 특히 서로 교락되어 있는 2인자 교호작용들에 대한 정보를 어떻게 분석하여 응용할 수 있는가에 대한 의문점을 갖게 된다.

부분실험을 설계하는 방법에 대한 연구는 Finney(1945)를 비롯하여 Plackett과 Burman (1946), Rao(1947) 등에 의해 연구되기 시작하여 resolution 값에 따라 많은 설계방법이 발표되었으나, 부분실험법에서 서로 교락되어 있는 교호작용효과들을 분석하는 방법에 대한 연구는 미미한 상황이다. 따라서 본 연구에서는 부분실험법에서 교락되어 있는 교호작용들에 대한 분석방법에 대한 연구로서, resolution IV 부분실험법에서 교락되어 있는 2인자 교호작용들의 관계를 분석하여 어떤 인자의 교호작용들이 존재하는가에 대한 추가적인 정보를 분석하는 방법을 제시하고자 한다.

특히 본 연구에서는 t개의 인자들의 수준이 모두 3으로 동일한 경우의 3^t요인 실험법에서 Anderson과 Thomas(1979)에 의해 설계된 resolution IV 부분실험법에서 교락된 2인자 교호작용의 분석방법을 제시하고자 한다. 이 부분실험법은 실험의 크기인 처리조합의 수가 $N=6t+3$으로써 Margolin(1969)에 의해 입증된 이론적인 최소값인 $6t-3$과 근사하여, 실험의 크기가 최소에 가까울 뿐만 아니라 실험설계 및 교락관계의 파악이 용이하다는 이점이 있어 현실적으로 많이 이용되는 부분실험법이다.

II. Resolution III 3^t 부분실험법의 설계와 교락구조

3^t 요인 실험에서 인자들의 수준은 0, 1, 2로 나타내고, 처리조합은 $\underline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_t)$, $x_i=0,1,2$로 표기하자. 그러면 차수가 3인 Galois Field(GF(3))에서 다음과 같은 방정식을 만족하는 $\underline{x}$를 처리조합으로 하는 실험설계 Γ는 처리조합의 수가 $N=6t+3$인 resolution IV 부분실험법이 된다.(Anderson과 Thomas (1979)).

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{t} \Gamma_i$$

$$\Gamma_i = \{\underline{x} : A_i \underline{x} = \underline{0}\} \qquad (2.1)$$

여기서 (1) $\underline{0}' = (0, 0, \cdots, 0)$.

(2) A_i는 $(t-2)\times t$ 행렬로서 i번째 행(column)은 $\underline{0}$이고,

(3) A_1의 두 번째 행과 $A_i(i\neq 1)$의 첫 번째 행의 원소는 모두 2이고 나머지 행들은 $(t-2)\times(t-2)$의 단위행렬(Identity Matrix)과 동일하다.

(2.1)식의 Γ_i에서 $A_i\underline{x}=\underline{0}$의 방정식을 만족하는 해 $\underline{x}$는 9개가 존재하게 되며, 이러한 해를 행(처리조합)으로 하는 Γ_i는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{array}{r} \text{첫번째부터 } (i-1)\text{번째 인자의 수준} \\ i\text{번째 인자의 수준} \\ (i+1)\text{번째 부터 마지막 인자의 수준} \end{array} \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

<실험설계의 예> 인자의 수가 $t=4$인 경우 행렬 A_i는 다음과 같다.

$$A_1=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

그리고 $A_i\underline{x}=\underline{0}$, $i=1,2,3,4$를 만족하는 $\underline{x}$를 행(처리조합)으로 하는 집합(실험설계) Γ_i는 (2.2)식과 같이 구성할 경우 다음과 같다.

$$\Gamma_1=\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&2&2&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_2=\begin{bmatrix} 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&0&0&1&1&1&2&2&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_3=\begin{bmatrix} 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&0&0&1&1&1&2&2&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_4=\begin{bmatrix} 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&1&2&0&1&2&0&1&2 \\ 0&0&0&1&1&1&2&2&2 \end{bmatrix}$$

따라서 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$에 포함되어 있는 9개의 행들인 처리조합에서 $(0,0,0,0)$, $(1,1,1,1)$, $(2,2,2,2)$가 공통이므로 $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_i$로 설계되는 부분실험법에서 처리조합의 수는 $N=6t+3=27$이다.

Resolution IV 3^t부분 실험법에서 전체 평균은 μ, 인자 혹은 인자의 주효과를 F_i, 2인자 교호작용은 $F_i\times F_j$ $i,j=1,2,\cdots t$, $i<j$로 나타내고, 3인자 이상의 교호작용들은 모두 무시될 수 있다고 하자. 그러면 주효과 F_i의 자유도는 2이고 교호작용 $F_i\times F_j$는 자유도가 4이므로, 교호작용은 각각 자유도 2를 갖는 두 개의 교호작용요소 F_iF_j, $F_iF_j^2$으로 구성되며, F_iF_j는 제1교호작용요소(first interaction component), $F_iF_j^2$은 제2교호작용요소(second interaction component)를 나타낸다고 하자. 그러면 9개의 처리조합으로 구성되어 있는 Γ_i에서 각 효과들의 교락관계는 부분실험법의 교락이론(Raghavarao(1971))에 의해 다음과 같이 5개의 집합으로 분류되며, 같은 집합에 속해있는 요소들은 서로 교락되게 된다(Anderson과 Thomas(1980)).

$$S_{0i}=\{\mu,\ F_jF_k^2,\ j<k,\ j\neq i,\ k\neq i\}$$
$$S_{1i}=\{F_i\}$$
$$S_{2i}=\{F_j,\ j\neq i,\ F_jF_k,\ j<k,\ j\neq i,\ k\neq i\}$$
$$S_{3i}=\{F_iF_j,\ j\neq i\}$$
$$S_{4i}=\{F_iF_j^2,\ j\neq i\} \quad (2.3)$$

따라서 Γ_i에서 주효과 F_i는 다른 효과와 교락되지 않으므로 $\Gamma=\bigcup_{i=1}^{t}\Gamma_i$의 부분실험법에서는 모든 F_i에 대한 분석이 가능하게 되고 2인자 교호작용들은 서로 교락되어 resolution IV 계획이 된다. 그리고 주효과요소 F_i와 교호작용요소 F_iF_j, $F_iF_j^2$의 자유도는 모두 2이므로 각 요소들은 자유도 1을 갖는 1차 효과(linear effect)와 2차 효과(quadratic effect)로 구성되며, F_i의 1차 효과를 $(F_i)^1$, 2차 효과는 $(F_i)^2$과 같은 방법으로 표기하자.

그러면 (2.2)에서 S_{0i}는 자유도 1을 가지게 된다. 그리고 나머지 교락요소 집합들은 자유도 2를 갖게 되므로 자유도 1을 갖는 1차 효과와

2차 효과로 구성되게 되어, (2.2)식의 추정가능 함수식(estimable function)은 다음과 같이 유도될 수 있다(Anderson과 Thomas(1980)).

$$ES_{0i} = \mu + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k,}}^{t} \sum_{\substack{k=1 \\ j,k\neq i}}^{t} ((F_j F_k^2)^1 + (F_j F_k^2)^2)$$

$$\underline{ES}_{1i} = \begin{pmatrix} (ES_{1i})^1 \\ (ES_{1i})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (F_i)^1 \\ (F_i)^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{ES}_{2i} = \begin{pmatrix} (ES_{2i})^1 \\ (ES_{2i})^2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{t} \begin{pmatrix} (F_j)^1 \\ (F_j)^2 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{j=1 \\ j<k,}}^{t} \sum_{\substack{k=1 \\ j,k\neq i}}^{t} \begin{bmatrix} 1/2 & -3/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (F_j F_k)^1 \\ (F_j F_k)^2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{ES}_{3i} = \begin{pmatrix} (ES_{3i})^1 \\ (ES_{3i})^2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{t} \begin{pmatrix} (F_i F_j)^1 \\ (F_i F_j)^2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{ES}_{4i} = \begin{pmatrix} (ES_{4i})^1 \\ (ES_{4i})^2 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{t} \begin{pmatrix} (F_i F_j^2)^1 \\ (F_i F_j^2)^2 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

III. 교락된 교호작용의 분석방법

(2.1)식으로 설계되는 부분실험법 Γ에서는 주효과 F_i들은 다른 효과들과 교락되지 않으므로 일반적인 분산분석법에 의해 분석이 가능하며, 나아가 2인자 교호작용들의 교락관계도 파악할 수 있어 resolution III 설계방법에 비해 보다 많은 정보를 제공해 줄 수 있다. 본 연구에서는 교락된 2인자 교호작용들을 분석하여 resolution III 계획에 비해 보다 많은 정보를 획득하는 방법으로서, 어떤 인자의 교호작용들이 존재하는가에 대한 분석방법과, 가능한 경우 유의한 교호작용을 구체적으로 식별하는 방법을 제시하고자 한다.

먼저 분석방법을 유도하는데 필요한 가정으로서, (2.4)식의 각 추정가능함수식을 검정하여 유의하지 않은 경우, 그 함수식을 구성하고 있는 모든 요소들이 모두 유의하지 않다고 가정하자. 예를 들어 (2.4)식에서 $\underline{ES}_{3i} = \underline{0}$인 경우, 이러한 가정 하에서는 $\underline{ES}_{3i}$를 구성하고 있는 $(F_iF_j)^1$, $(F_iF_j)^2$들이 모두 0이 된다. 이러한 가정은 현실적으로 매우 타당성을 가지며 특히 추정가능 함수식을 구성하고 있는 각 요소들이 연속적인 확률변수인 경우에는 항상 성립하게 된다.

따라서 실험설계 Γ_i를 이용하여 다음의 (3.1)식의 가설을 검정하여 귀무가설이 채택되면 $\underline{ES}_{3i}$를 구성하고 있는 $(F_iF_j)^1$, $(F_iF_j)^2$, $j\neq i$, $j=1,2\cdots,t$가 모두 0이 되므로 인자 F_i의 제 1 교호작용요소는 유의하지 않다고 판단할 수 있게 된다.

$$H_0 : \underline{ES}_{3i} = \underline{0} \quad \text{대} \quad H_1 : \underline{ES}_{3i} \neq \underline{0} \qquad (3.1)$$

또한 같은 원리에 의해 다음의 (3.2)식의 가설검정을 통해 인자 F_i의 제 2 교호작용요소의 유의성을 판단할 수 있게 된다.

$$H_0 : \underline{ES}_{4i} = \underline{0} \quad \text{대} \quad H_1 : \underline{ES}_{4i} \neq \underline{0} \qquad (3.2)$$

그러므로 (3.1), (3.2)식의 두 개의 가설을 검정한 결과 모두 유의하지 않은 경우 인자 F_i의 교호작용은 존재하지 않는다고 판단할 수 있으며, 그렇지 않은 경우 인자 F_i는 다른 인자와 교호작용효과를 갖는다고 결론지을 수 있으며, 유의한 가설에 해당하는 교호작용요소가 존재한다고 판단할 수 있다.

그리고 (3.1)식의 가설을 검정하기 위한 검정통계량은 다음과 같이 유도될 수 있다. Γ_i에 속해 있는 9개의 처리조합에 해당하는 관측치들의 벡터를 $\underline{Y}_i$라 하고, $\underline{Y}_i$에 상응하는 선형모형의 계획행렬(design matrix)을 X_3라 하면, $\underline{ES}_{3i}$의 최소제곱추정량 $\widehat{\underline{ES}}_{3i}$과 변동량(sum of square) $SS(\underline{ES}_{3i})$는 선형모형의 이론에 의해 다음과 같이 구할 수 있다(Searl(1971)).

$$\widehat{\underline{ES}}_{3i} = (X_3'X_3)^{-1}X_3'\,\underline{Y}_i$$

$$SS(\underline{ES}_{3i}) = \underline{Y}_i'X_3(X_3'X_3)^{-1}X_3'\,\underline{Y}_i \quad (3.3)$$

(3.3)식에서 (9×2) 계획행렬 X_3는 다음과 같은 방법에 의해 구축될 수 있다. 먼저 (2.3)식의 S_{3i} 집합에 속해 있는 하나의 효과 F_iF_j를 선택하면, 처리조합 $(x_1, x_2, \cdots, x_t)$의 F_iF_j의 수준은 $x_i + x_j$ (mod(3))가 된다. 그리고 S_{3i}의 추정가능 함수식 $\underline{ES}_{3i}$는 1차 효과(linear effect), 2차 효과(quadratic effect)로 구성되어 있으므로 (3.4)의 Helmert 직교다항식 계수행렬 H를 이용하여, F_iF_j 수준이 0인 처리조합은 (1,1)로, 1인 처리조합은 (0,-2)로, 2인 처리조합은 (-1,1)로 변환하여 (9×2) 인 행렬을 구성하면 된다. 그리고 모든 Γ_i, $i=1,2,\cdots,t$에서 교락관계가 동일하므로, (2.2)와 같이 Γ_i를 구성한 경우 각 Γ_i에서 계획행렬 X_3도 동일하게 된다.

$$H = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(1차 효과)}\ \text{(2차 효과)} \end{array} \begin{array}{l} :0\text{수준} \\ :1\text{수준} \\ :2\text{수준} \\ \ \end{array} \tag{3.4}$$

그리고 선형모형에서 오차항들이 독립적이고 평균이 0이고 분산이 σ^2으로 동일한 정규분포를 하는 경우, 다음 통계량은 (3.1)식의 귀무가설이 사실인 경우 자유도 2를 갖는 카이제곱 분포에 따르게 된다.

$$\frac{SS(\underline{ES}_{3i})}{2\sigma^2} = \frac{MS(\underline{ES}_{3i})}{\sigma^2} \tag{3.5}$$

$$\text{단, } MS(\underline{ES}_{3i}) = \frac{SS(\underline{ES}_{3i})}{2}$$

따라서 (3.5)식을 (3.1)식의 가설을 검정하기 위한 검정통계량으로 사용하기 위해서는 σ^2에 대한 추정량이 필요하게 된다. σ^2에 대한 추정량을 얻는 현실적인 방법으로 본 연구에서는 resolution IV 부분실험법의 일반적인 분석방법에 따라 교호작용이 모두 없다는 가정 하에서 resolution IV 부분실험 Γ를 분석하여, 분산분석표로부터 σ^2에 대한 추정량인 오차의 평균변동량(Mean Square of Error : MSE)을 사용하여 다음과 같은 검정통계량을 제안하고자 한다.

$$F = \frac{MS(\underline{ES}_{3i})}{MSE} \tag{3.6}$$

그러나 (3.6)식에서 MSE와 $MS(\underline{ES}_{3i})$는 확률적으로 독립적이지 못하므로 표본분포는 정확한 F-분포가 되지 않고 근사적인 F-분포가 된다. 따라서 유의수준이 α로 주어진 경우, (3.6)식의 F값이 자유도 $(2, N-2t-1)$의 F-분포에서 우측꼬리 면적 α에 해당하는 임계값 $F(2, N-2t-1, \alpha)$보다 큰 경우 귀무가설을 기각하는 방법에 의해 근사적으로 (3.1)식의 가설을 검정할 수 있게 된다.

그러나 이러한 근사적인 방법에서 유의하여야 할 점은 영향력이 큰 교호작용효과가 존재하는 경우 (3.6)식에서 MSE는 실제 σ^2값보다 크게 평가되는 경향이 있게 되므로, (3.6)식을 검정통계량으로 사용하는 경우 귀무가설이 채택하는 경향이 높게 되는 보수적인 방법이 된다. 이러한 점과 함께 여러 개의 가설을 축차적으로 검정하는 것을 고려한다면, 유의수준 α값은 비교적 큰 값을 사용하는 것이 바람직하다고 하겠다.

또한 (3.2)식의 가설을 검정하는 방법도 유사하게 유도될 수 있다. 먼저 (2.3)식의 S_{4i} 집합에 속해있는 하나의 효과 $F_iF_j^2$을 선택하면, 처리조합 $(x_1, x_2, \cdots, x_t)$의 $F_iF_j^2$의 수준은 $x_i + 2x_j$ (mod(3)) 가 된다. 그리고 각 처리 조합의 수준에 따라 (3.4)식의 행렬 H에 의해 계획행렬 X_4를 구성하여, (3.7)식과 같이 변동량 $SS(\underline{ES}_{4i})$와 검정통계량 F를 구한 후, 자유도 $(2, N-2t-1)$의 F분포를 이용하여 근사적으로 검정할 수 있다. 그리고 (2.2)와 같이

Γ_i를 구성한 경우 계획행렬 X_4도 모든 Γ_i에서 똑같이 구성된다.

$$SS(\underline{ES}_{4i}) = \underline{Y}_i' X_4 (X_4' X_4)^{-1} X_{4i}' \underline{Y}_i$$
$$F = \frac{SS(\underline{ES}_{4i})/2}{MSE} \tag{3.7}$$

따라서 resolution IV 계획인 (2.1)식의 부분실험 Γ를 분석하는데 있어서, 주효과 분석과 아울러 교호작용효과에 대한 추가적인 정보를 분석하는 방법은 다음과 같이 2단계로 요약될 수 있다.

<단계 1> 일반적인 resolutionⅣ 부분실험의 분산분석법에 의해 교호작용들이 모두 무시할 수 있다는 가정아래 실험계획 Γ를 분석하여 주효과에 대한 분석을 실시한다. 그리고 오차의 평균변동량 MSE를 계산한다.

<단계 2> Γ의 부분집합 $\Gamma_i,\ i=1,2,\cdots,t$에 속해있는 9개의 처리조합을 이용하여 인자 F_i에 대하여 (3.1), (3.2) 식의 두 개의 가설을 검정한다. 두 개의 가설검정에서 귀무가설이 모두 채택되면 인자 F_i의 교호작용효과는 없다고 판단하고, 그렇지 않은 경우 F_i의 교호작용효과가 존재한다고 판단한다.

이러한 분석을 수행하면 어떤 인자의 교호작용이 존재하는지 파악할 수 있을 뿐만 아니라, 특수한 경우에는 구체적으로 유의한 교호작용효과의 식별도 가능하게 된다. 예를 들어 <단계 2>의 수행결과 두 개의 인자 F_1, F_3에 대해서만 교호작용이 있다고 판단되는 경우 유의한 교호작용은 $F_1 \times F_3$ 하나만이 존재한다고 결론지울 수 있다.

IV. 모의예제 분석

본 연구에서 제시한 분석방법에 대한 실증적인 예로서, 인자의 수가 $t=4$인 경우 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 모의 실험을 설계하여 응용방법을 고찰하고자 한다. 먼저 실험설계의 $N=27$개의 처리조합은 II절의 예제에서 설명한 실험설계와 같이 구성하였으며, 설정된 모형은 4개의 주효과 F_1, F_2, F_3, F_4와 한 개의 교호작용효과 $F_1 \times F_3$ 만 포함되어 있는 다음과 같은 모형으로 설정하였다.

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + (\alpha\gamma)_{ik} + \varepsilon_{ijkl} \tag{4.1}$$

그리고 각 처리조합에서의 관측값을 생성하기 위하여 (4.1)식에서 전체 평균 μ의 값은 40으로 하였다. 그리고 각 수준 및 수준조합에서의 α_i를 비롯한 각 효과들의 설정값은 <표 1>과 같으며, 컴퓨터 패키지 SAS(Ver 6.12)의 정규분포 난수 생성 프로그램에 의해 오차항 ε_{ijkl}를 생성하여 관측값 y_{ijkl}를 <표 2>와 같이 모의 생성하였다. 그리고 <표 1>에서 보는 바와 같이 유의한 주효과는 F_1, F_3, F_4로 설정하였다.

< 표 1 > 주효과와 교호작용효과의 각 수준 및 수준조합에서의 설정 값

수준 \ 주효과	α_i	β_j	γ_k	δ_l
0	9.5	0.2	-10.4	2.7
1	0.5	0.1	3.8	4.3
2	-10	-0.3	6.6	-7.0

주효과의 각 수준의 값

k \ i	0	1	2
0	3.2	1.5	-4.7
1	-2.2	1.0	1.2
2	-1.0	-2.5	3.5

교호작용 $(\alpha\gamma)_{ik}$의 각 수준조합에서의 값

< 표 2 > 각 처리조합에서 모의 생성된 관측값

처리조합	(0,0,0,0)	(0,1,1,1)	(0,2,2,2)	(1,0,0,0)	(1,1,1,1)	(1,2,2,2)	(2,0,0,0)	(2,1,1,1)	(2,2,2,2)
관측값	45.718	56.201	47.935	35.547	50.269	35.801	17.366	38.229	33.802
처리조합	(1,0,1,1)	(2,0,2,2)	(0,1,0,0)	(2,1,2,2)	(0,2,0,0)	(1,2,1,1)	(1,1,0,1)	(2,2,0,2)	(0,0,1,0)
관측값	50.056	31.894	46.001	32.209	44.469	48.806	36.519	8.186	53.518
처리조합	(2,2,1,2)	(0,0,2,0)	(1,1,2,1)	(1,1,1,0)	(2,2,2,0)	(0,0,0,1)	(2,2,2,1)	(0,0,0,2)	(1,1,1,2)
관측값	27.272	57.594	47.974	49.013	43.855	46.187	43.334	35.678	37.481

<표 2>의 모의 생성된 데이터를 컴퓨터 패키지 SAS(Ver. 6.12)를 이용하여 주효과만 분석한 <단계 1>의 분산분석의 결과는 <표 3>과 같으며, 유의수준 $\alpha=0.1$에서, 4개의 주효과 중 설정한 모형과 동일하게 3개의 주효과 F_1, F_3, F_4가 유의한 것으로 판단된다. 그리고 MSE의 값은 10.840이다.

< 표 3 > 주효과에 대한 분산분석표

요인	변동량	자유도	평균 변동량	F-값	P-value
F_1	1367.256	2	683.628	63.07*	0.0001
F_2	2.043	2	1.021	0.09	0.9105
F_3	1093.893	2	546.946	50.46*	0.0001
F_4	599.166	2	299.583	27.64*	0.0001
Error	195.117	18	10.839		

* : 유의수준 $\alpha=0.1$에서 유의한 인자로 판단되는 검정 통계량 값.

다음 단계의 분석으로, (2.2)식의 Γ_1을 구성하고 있는 9개의 처리조합의 F_1F_2의 수준은 차례로 (0, 1, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 1)이 된다. 따라서 계획행렬 X_3는 (3.4)식의 변환관계에 따라 다음과 같이 구성된다.

$$X_3^{'}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

그리고 (2.2)식의 Γ_i에 속해있는 처리조합에 대한 관측치 벡터를 $\underline{Y}_i$, $i=1,2,3,4$라 하면 제 1 교호작용요소에 대한 (3.1) 식의 가설을 검정하기 위한 변동량 $SS(\underline{ES}_{3i})$는 (3.3)식에 의해 구해지며, 그에 따른 평균 변동량 $MS(\underline{ES}_{3i})$와 검정 통계량 F-값의 계산 결과는 <표 4>의 제1교호작용요소 항목에 정리되어 있다. 또한 Γ_1을 구성하고 있는 9개의 처리조합에서 $F_1F_2^2$의 수준은 차례로 (0, 2, 1, 1, 0, 2, 2, 1, 0)이 되며 계획행렬 X_4는 (4.2)식과 같이 구성된다. 따라서 제2교호작용요소에 대한 (3.2)식의 가설을 검정하기 위한 $SS(\underline{ES}_{4i})$와 $MS(\underline{ES}_{4i})$, F-값의 계산결과는 <표 4>로 요약되어 진다.

$$X_4^{'}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

<표 4>에서 알 수 있는 바와 같이 유의수준 $\alpha=0.1$에서 인자 F_1과 F_3만이 제 2교호작용요소에서 다른 인자와 교호작용관계를 가지고 있는 것으로 판단된다. 그리고 두 인자만이

< 표 4 > 각 인자의 교호작용 존재 여부에 대한 분석결과

구분	F_1		F_2		F_3		F_4	
	제1교호 작용요소	제2교호 작용요소	제1교호 작용요소	제2교호 작용요소	제1교호 작용요소	제2교호 작용요소	제1교호 작용요소	제2교호 작용요소
변동량 (SS)	16.746	70.513	2.244	2.096	10.345	68.015	1.963	0.926
평균변동량 (MS)	8.373	35.257	1.122	1.048	5.173	34.008	0.982	0.463
F-값	0.773	3.253 *	0.104	0.097	0.477	3.138 *	0.091	0.043

*: 유의수준 $\alpha=0.1$에서 임계값 $F(2, 18, 0.1)=2.62$보다 커서 유의한 결과를 나타내는 검정통계량의 값

서로 교호작용관계에 있으므로 유의한 교호작용은 $F_1 \times F_3$ 한 개라고 결론 지을 수 있다. 따라서 분석결과는 종합적으로 3개의 주효과 F_1, F_3, F_4와 한 개의 교호작용효과 $F_1 \times F_3$가 유의하다고 할 수 있으며, 이러한 분석 결과는 (4.1)식과 <표 1>의 설정모형에서 유의한 효과와 일치하게 된다.

V. 결론

부분실험법에서 resolution 값이 커짐에 따라 실험을 설계하는데 필요한 처리조합의 수는 급속히 증가하게 된다. 따라서 고차의 교호작용들이 무시될 수 있는 경우 resolution 값이 작은 부분실험법이 효과적으로 사용될 수 있으나, resolution III와 resolution IV 두 개의 부분실험법을 비교해 볼 때, 일반적 분산분석의 방법에 의해서는 두 방법 모두에서 주효과만이 분석되므로 분석에 있어서 차이점이 없게 된다. 그러나 resolution IV부분실험에서 서로 교락관계를 가지고 있는 2인자 교호작용들에 대한 분석이 가능한 경우, resolution III 계획보다 효과적인 설계방법이 될 수 있다.

본 연구에서는 3수준계 요인 배치법의 resolution IV 부분실험법에서 교락된 교호작용 효과를 분석하여 새로운 정보를 획득하는 방법으로 각 인자의 교호작용효과의 존재 여부에 대한 분석방법을 제시하였다. 이러한 특정 인자의 교호작용 효과의 존재 여부에 대한 정보는 주효과에 대한 유의성 검정에 중요한 정보를 부가적으로 제공해 줄 수 있다. 특히 Neter와 Wasserman 그리고 Kutner(1985)가 지적한 바와 같이, 어떤 교호작용 효과가 아주 큰 경우, 그러한 교호작용에 포함되어 있는 인자들의 주효과에 대한 유의성 검정은 신뢰할 수 없게 되는 경우도 있게 된다. 따라서 교호작용효과가 존재한다고 판단되는 인자들의 주효과를 분석하고자 할 때는 보다 신중을 기하여야 할 것이다. 따라서 주효과만 분석하던 기존의 resolution IV 분석방법과는 달리, 본 연구에서 제시된 방법에 의해서는 주효과 뿐만 아니라 교호작용효과의 존재여부를 분석할 수 있게 되므로, 적은 수의 실험횟수에 의해 주효과 및 교호작용에 대한 정보를 분석하고자 할 때 보다 효과적으로 응용될 수 있을 것이다.

참고문헌

[1] Anderson, D. A., and Thomas, A. M. (1979), "Near Minimal Resolution IV

Designs form the S^n Factorial Experiment," *Technometrics*, vol. 21, pp 331-336.

[2] Anderson, D. A., and Thomas, A. M. (1980), "Weakly Resolvable Ⅳ.3 Search Designs for the p^n Factorial Experiment," *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. 4, pp. 299-312.

[3] Box, G. E. P., and Hunter, J. S. (1961), "The 2^{k-p} Fractional Factorial designs Ⅰ," *Technometrics*, vol. 3, pp. 311-351.

[4] Finney, D. J.(1945), "The Fractional Replication of Factorial Arrangements," *Annals of Eugenics*, vol. 12, pp. 291-301.

[5] Margolin, B. H.(1969), "Results on Factorial of Resolution Ⅳ for the 2^n and 2^n3^n Series," *Technometrics*, vol. 11, pp. 431-444

[6] Neter, J., Wasserman, W., and Kutner, M. H.(1985), *Applied Linear Statistical Models*, 2nd Ed., IRWIN, Homewood, Illinois.

[7] Plackett, R. L., and Burman, J.P. (1946), "The Design of Optimum Multifactorial Experiments," *Biometrica*, vol. 33, pp. 305-325.

[8] Raghavarao, D.(1971), *Construction and Combinatorial Problems in Design of Experiments*, Wiley, New York.

[9] Rao, C. R.(1947), "Factorial Experiments Derivable from Combinatorial Arrangements of Arrays," *Journal of the Royal Statistical Society*, *Ser. B*, vol. 9, pp. 128-140.

[10] Searl, S. R.(1971), *Linear Models*, Wiley, New York.