

변량표본크기와 변량표본추출구간을 이용한 \bar{X} 관리도의 경제적 설계

김계완 · 윤덕균
한양대학교 산업공학과

An Economic Design of \bar{X} Control Charts with Variable Sample Size and Sampling Interval

Kye-Wan Kim · Deok-Kyun Yoon
Dept. of Industrial Engineering, Hanyang University

Abstract

Recent studies have shown that the \bar{X} chart with variable sampling intervals(VSI) and the \bar{X} chart with variable sample size(VSS) are much quicker than Shewhart \bar{X} chart in detecting shifts in the process. Shewhart \bar{X} chart has been beneficial to detect large shifts but it is hard to apply Shewhart \bar{X} chart in detecting moderate shifts in the process mean.

In this article the \bar{X} chart using variable sample size(VSS) and variable sampling intervals(VSI) has been proposed to supplement the weak point mentioned above. So the purpose of this paper is to consider finding the design parameters which minimize expected loss costs for unit process time and measure the performance of VSSI(variable sample size and sampling interval) \bar{X} chart.

It is important that assignable causes be detected to maintain the process controlled. This paper has been studied under the assumption that one cycle is from starting of the process to eliminating the assignable causes in the process.

The other purpose of this article is to represent the expected loss costs in one cycle with three process parameters(sample size, sampling interval and control limits) function and find the three parameters.

1. 서론

통계적 공정관리(Statistical Process Control)는 공정에서 요구되는 품질이나 생산성 목표를 달성하기 위하여 PDCA 사이클을 돌려가면서 통계적 방법으로 공정을 효율적으로 운영해 나가는 관리방법이다. 통계적 공정관리는 끊임없는 공정의 개선추구 활동이며, 고객이 만족하는 제품을 생산성 높게 생산할 수 있도록 하는 현장의 관리기법이다. 통계적 공정관리의 기법 중에서 관리도(Control Chart)기법이란 일정한 시간 간격으로 추출된 표본으로부터 얻은 자료를 이용하여 점을 찍어가면서 이 점들의 위치 또는 움직임의 양상을 미리 정하여진 관리한계선과 비교하여 공정의 이상유무에 대해 판단을 내리며 그 원인을 찾아내는 통계적 기법을 말한다.

일반적으로 관리도의 설계는 설계모수(표본크기, 관리한계선, 표본추출간격)를 선정하는데 있으며, 관리도의 효율적인 설계는 통계적인 측면에서의 설계와 경제적인 측면에서의 설계로 나누어 볼 수 있다.

통계적인 설계는 관리상태에서 이상신호를 주기까지의 평균 표본크기와 표본추출 간격이 일정할 때 이상상태에서 이상신호를 주기까지의 평균 표본크기와 표본추출간격을 최소화하는 설계모수를 선정하는 관리도의 설계 방법이다.

경제적인 설계는 공정모수와 비용모수들의 함수인 비용함수를 최소화시키는 설계모수를 선정하는 관리도의 설계 방법이다. 경제적 설계에 있어서 표본추출과 검정에 드는 비용, 이상상태를 조사하고 수정하는데 드는 비용, 공정에서 잘못 생산된 제품 단위에 대한 회수 및 처리에 드는 비용 등이 공정모수의 선택에 영향을 준다.

본 연구에서 사용된 관리도는 공정평균에 대한 변화를 검색하기 위해 \bar{X} 관리도를 설정하였으며, 여기에서 사용하는 표본크기와 표본추출구간은 바로 이전 시점의 표본 통계량 값에 따라 달라지는 변량표본크기와 변량표본추출구간을 사용한다. 변량표본크기와 변량표본추출구간의 선택은 표본통계량이 관리한계선에 근접한

정도에 따라 결정되도록 고안되었다. 변량표본크기와 변량표본추출구간을 사용할 때, 공정의 변화에 민감하게 되어 평균손실비용을 최소화 할 수 있다는 것을 보이코자 한다.

2. VSSI \bar{X} 관리도

관리도를 작성할 때 만일 표본 평균이 관리한계선 가까이 타점 된다면, 다음의 점들은 실제로 관리한계선 밖으로 나갈 가능성이 크기 때문에 표본크기를 크게 하고 표본추출구간은 짧게 한다. 반대로 중심선 가까이 타점 된다면 표본크기는 작게 하고 표본추출구간은 길게 하는 VSSI \bar{X} 관리도를 사용하는 것이 필요하다.

VSSI \bar{X} 관리도에서는 표본크기를 최소 표본크기 n_1 , 최대 표본크기 n_2 로 택하고 ($n_1 < n < n_2$), 표본추출구간을 최소 표본추출구간 h_1 , 최대 표본추출구간 h_2 로 택한다. ($h_1 < h < h_2$) 최소 변수와 최대 변수사이에 대한 선택은 바로 이전 관측값에 의존한다. 관리도상에 임계 한계선(threshold limit)은 현재 관측값 i 에 대한 표본크기와 표본추출구간을 결정한다.

w_1 을 표본크기에 대한 임계값이라고 하자. $LCL < -w_1 < CL$ 이고 $CL < w_1 < UCL$ 이다. 최대 표본크기 (n_2)는 ($i-1$)번째 관측값이 임계 한계선과 관리 한계선사이에 타점이 되면 사용된다. ($(LCL, -w_1) \cup (w_1, UCL)$) 그리고 최소 표본크기 (n_1)는 바로 이전 관측값이 두 개의 임계값사이에 타점이 되면 사용된다. ($[-w_1, w_1]$) 다음과 같은 변량표본크기 함수

$$n(i) = \begin{cases} n_2 & \text{if } w_1 < Z_{i-1} < UCL \\ n_1 & \text{if } -w_1 < Z_{i-1} < w_1 \\ n_2 & \text{if } LCL < Z_{i-1} < -w_1 \end{cases} \quad (1)$$

로 정의할 수 있다. 여기에서 $Z_i = (\bar{X}_i - \mu_0) / \sigma / \sqrt{n(i)}$ 이다.

w_2 를 표본추출구간에 대한 임계값이라고 하자. $LCL < -w_2 < CL$ 이고 $CL < w_2 < UCL$ 이다. 최소 표본추출구간 (h_1)은 ($i-1$)번째 관측값이 임계 한계선과 관리 한계선사이에 타점이 되면 사용된다. $((LCL, -w_2) \cup (w_2, UCL))$ 그리고 최대 표본추출구간 (h_2)은 바로 전 관측값이 두 개의 임계값사이에 타점이 되면 사용된다. $([-w_2, w_2])$ 다음과 같은 변량표본크기 함수로 정의할 수 있다.

$$h(i) = \begin{cases} h_1 & \text{if } w_2 < Z_{i-1} < UCL \\ h_2 & \text{if } -w_2 < Z_{i-1} < w_2 \\ h_1 & \text{if } LCL < Z_{i-1} < -w_2 \end{cases} \quad (2)$$

위의 설계방법을 단일화하기 위해서 하나의 임계 한계선을 선택하여야 한다. 이것은 두 임계값을 한 개의 한계선으로 결합하고 두 함수를 아래와 같은 새로운 함수로 표현할 수 있다.

$$(n(i), h(i)) = \begin{cases} (n_2, h_1) & \text{if } w < Z_{i-1} < UCL \\ (n_1, h_2) & \text{if } -w < Z_{i-1} < w \\ (n_2, h_1) & \text{if } LCL < Z_{i-1} < -w \end{cases} \quad (3)$$

표본크기와 표본추출구간의 두 집합은 바로 이전 관측값에 의존한다. <그림 1>은 표준화된

변수 Z_i 를 가지는 일반적인 VSSI \bar{X} 관리도를 보여주고 있다.

<그림 1>에서 보면, 영역 $[-w, w]$ 에 이전의 표본 관측값이 타점되면 작은 표본크기와 긴 표본추출구간을 선택한다. 반면에, 영역 $(LCL, -w) \cup (w, UCL)$ 에 이전의 표본 관측값이 타점되면 큰 표본크기와 짧은 표본추출구간을 선택한다.

Shewhart \bar{X} 관리도와 VSSI \bar{X} 관리도의 수행도를 비교하기 위하여 두 관리도가 관리상태일 때 수행도를 구한다. 공정이 관리상태일 때, VSSI \bar{X} 관리도의 설계는 다음과 같은 사항이 고려된다.

$$E_0[n(i)] = n \quad (4)$$

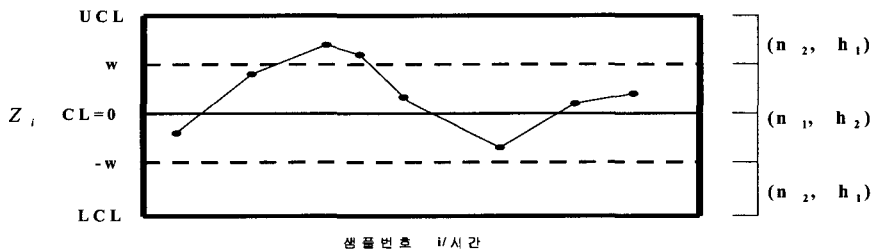
$$E_0[h(i)] = h \quad (5)$$

식 (4)는 식 (6)과 같이 표현할 수 있다.

$$E[n(i) | LCL < Z_{i-1} < UCL; \delta = 0] = n \quad (6)$$

$I_1 = [-w, w]$, $I_2 = (LCL, -w) \cup (w, UCL)$, $I_3 = (LCL, UCL)$ 으로 하자. $\delta = 0$ 일 때, 모든 i 에 대해서 $Z_{i-1} = N(0, 1)$ 이다. 식 (6)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} n &= E[n(i) | Z \in I_3] \\ &= n_1 \frac{\Pr(Z \in I_1)}{\Pr(Z \in I_3)} + n_2 \frac{\Pr(Z \in I_2)}{\Pr(Z \in I_3)} \end{aligned} \quad (7)$$



< 그림 1 > 표준화된 변수 Z_i 를 가지는 일반적인 VSSI \bar{X} 관리도

또는 $n \Pr(Z \in I_3) = n_1 \Pr(Z \in I_1) + n_2 \Pr(Z \in I_2)$
 각각의 확률에 대한 값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Pr(Z \in I_1) = 2\Phi(w) - 1$$

$$\Pr(Z \in I_2) = 2(\Phi(UCL) - \Phi(w))$$

$$\Pr(Z \in I_3) = 2\Phi(UCL) - 1$$

여기에서 $\Phi(\cdot)$ 는 표준 정규누적함수이다. 다음과 같은 식이 정의된다

$$w = \Phi^{-1} \left[\frac{2\Phi(UCL)[n - n_2] + n_1 - n}{2(n_1 - n_2)} \right] \quad (8)$$

$$w = \Phi^{-1} \left[\frac{2\Phi(UCL)[h - h_1] + h_2 - h}{2(h_2 - h_1)} \right] \quad (9)$$

만약에 변수 n_1 , n_2 와 h_1 을 일정하게 하고 최대 표본추출구간 h_2 를 구한다면 위의 식(8)과 (9)에 의해서 구한다.

$$h_2 = \frac{h(n_1 - n_2)b - h_1c}{n_1 - n_2 - c} \quad (10)$$

$$b = 2(h - h_1)(n_1 - n_2)\Phi(UCL),$$

$$c = 2(n - n_2)\Phi(UCL) + (n_1 - n)$$

3. VSSI \bar{X} 관리도의 경제적 설계

지금까지 대부분의 경제적 모델 연구에서 변량표본크기와 변량표본추출구간을 사용하는 것을 중요하게 생각하지 않았는데 이는 정보의 손실을 가져올 수 있다. 그러므로 관리도로부터 정보를 효과적으로 얻어내기 위해서는 표본크기와 표본추출구간을 동시에 관리하는 것이 중요하다.

3.1 가정 및 기호 정의

3.1.1 가정

본 연구는 다음과 같은 가정을 두었다.

- 1) 특성치가 정규분포를 따른다.
- 2) 이상원인의 발생에 따라 공정 평균이 변한다.
- 3) 이상원인이 발생할 확률은 기지이다.
- 4) 이상원인 발생은 독립적이다.
- 5) 이상원인은 지수분포에 따라 평균 $1/\lambda$ 로 발생한다.
- 6) 평균이 $1/\lambda_j$ 이고 각각이 독립인 지수분포를 이루는 m 개의 이상원인이 있다.
- 7) 공정의 한 주기는 관리상태로 시작하여 이상원인이 발생하여 이상원인이 탐지될 때까지로 한다.
- 8) 이상원인을 발견하기 위한 지체시간, 표본을 분석하고 검사하는 시간과 이상원인 발견 후 조절비용은 고려하지 않는다. 또한 한 종류의 이상원인이 발생했을 때 같은 종류의 이상원인은 발생하지 않는다.

3.1.2 기호정의

본 연구에서 사용되는 기호는 다음과 같다.

- n_1 : 최소 표본크기, n_2 : 최대 표본크기, n : 고정 표본 크기
- h_1 : 최소 표본추출구간, h_2 : 최대 표본추출구간, h : 고정 표본추출구간
- τ_1 : 표본추출구간 h_1 에 대한 k 번째와 $k+1$ 번째 시점에서 이상원인 A_j 가 발생할 평균시간
- τ_2 : 표본추출구간 h_2 에 대한 k 번째와 $k+1$ 번째 시점에서 이상원인 A_j 가 발생할 평균시간
- a_1 : 하나의 표본을 택하는데 드는 비용, a_2 : 하나의 관측치를 조사하는데 드는 비용
- A_j : 이상원인의 종류 ($i = 1, 2, \dots, m$)
- S_j : j 번째 이상원인이 발생할 때 택해지는 표본수
- O_j : j 번째 이상원인이 발생할 때 택해지는 관

측값 수

ANSI : 관리상태동안에 택해지는 평균 표본수
($= E(S_0)$)

ANOI : 관리상태동안에 택해지는 평균 관측값
수 ($= E(O_0)$)

ANSO : 이상원인 A_j 가 발생했을 때, 탐지해내
기까지 소요되는 평균표본수 ($= E(S_j)$)

ANOO : 이상원인 A_j 가 발생했을 때, 탐지해
내기까지 소요되는 평균관측값수
($= E(O_j)$)

U : 관리상태가 지속되는 시간

$E(U)$: 관리상태의 평균시간($1/\lambda$)

B_j : j 번째 이상원인이 발생한 다음에 이상원
인을 감지할 때까지 걸린 평균시간

M_j : 이상원인 A_j 가 발생한 상태에서 공정의
가동으로 인한 시간당 비용

L_1 : m 개의 이상원인에 기인된 주기당 기대비
용

L_2 : False Alarm에 기인한 주기당 비용

L_3 : 주기당 이상원인을 찾는 기대비용

L_4 : 표본을 추출하는데 드는 주기당 총 평균
비용

l_1 : 관리하한선에 대한 최적값

l_2 : 관리상한선에 대한 최적값

EL : 시간당 기대 손실비용

α : 제 1 종 과오

T : False Alarm에 기인한 비용

T_j : j 번째 이상원인 A_j 를 찾는 비용

ACT : 평균 사이클 시간

ATS : Average Time to Signal

$\pm \omega$: 통계량이 표준 정규분포를 따를 때의 임
계선

P : Markov Chain에 의해서 형성된 전이행렬

q_{ij} : 전이확률

VSSI \bar{X} 관리도를 이용한 경제적인 설계에서
설계모수, 즉 표본크기, 표본추출구간, 관리한계
선을 정하는 문제가 중요하다. 관측된 확률표본
(Random Sample)은 평균이 μ 이고, 분산이
 σ^2 인 정규분포를 따른다고 가정하자. k 번째 시
점에서 택해야 할 표본크기와 표본추출구간은
 $k-1$ 번째 표본통계량에 의존하며, 이러한 사실
로부터 Markov Chain을 형성하여 전이행렬 P
를 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

이며, 여기에서 전이확률 q_{ij} 는 다음과 같이 표
현할 수 있으며, $0 \leq q_{ij} \leq 1$ 이고 $\sum_{j=0}^2 q_{ij} = 1$ 이
다.

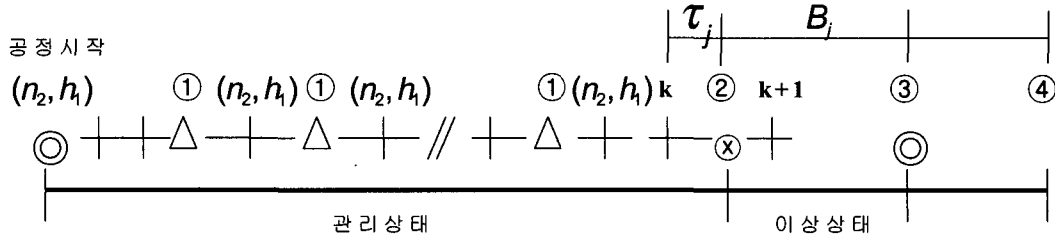
3.2.1 평균 비용함수

지금까지 단순히 이상원인이 한 가지인 경우
에만 경제적인 모델을 연구하였다. 그러나, 여기
서는 이상원인이 여러 가지 존재하는 것을 가정
한다.

생산공정에서 이상원인 A_j 가 발생하는 경우
한 주기를 <그림 2>와 같이 표현할 수 있다.
이상원인 A_j 가 k 와 $k+1$ 시점 사이에서 발생
한다면 공정의 시작에서부터 이상원인이 발생되
는 시점 ②사이에는 몇 개의 이상 신호가 있을
수 있다. 시점 ③은 이상원인을 감지하는 시점으
로 신호를 준다. 시점 ④는 이상원인을 찾아 어
떤 조치를 취하는 시점을 의미한다. 그리고 공정
의 시작에서는 항상 표본크기를 크게 택하고 표
본추출구간을 작게 택하여 공정을 출발시킨다.
시점 ①은 잘못된 신호가 발생하는 시점이다.

관리상태 동안에 택해진 평균표본수(Average
Number of Sample in Control : ANSI)와 평
균관측값수(Average Number of Observation
in Control : ANOI)를 다음과 같이 표현할 수

3.2 VSSI \bar{X} 관리도의 경제적 설계



< 그림 2 > j번째 이상원인 발생하기까지 주기 설정 과정

있다. Q_0 는 공정이 관리상태일 때 형성되는 전 이행렬이라 하면

$$Q_0 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \quad (12)$$

이며, 여기에서 $p_{ij} = P(Z_i \in I_j | Z_{i-1} \in I_i)$ 이다. 행렬 P_0 는 다음과 같이 정의한다.

$$P_0 = \begin{pmatrix} p_{11} & 1-p_{12} \\ p_{21} & 1-p_{22} \end{pmatrix} \quad (13)$$

또한, $1' = (1, 1)$ 이고, $n' = (n_1, n_2)$ 이고, 두 가지의 표본추출구간에 대한 S_0 와 O_0 는 공정이 관리상태일 때 선택되는 표본수와 관측값수를 각각 나타낸다. ($i=1, 2$)

$$ANSI = E(S_0) = e^{-\lambda h_i} / (1 - e^{-\lambda h_i}) \quad (14)$$

$$ANOI = E(O_0) = e^{-\lambda h_i} \cdot (1 \ 0) \cdot [I - e^{-\lambda h_i} P_0]^{-1} \cdot n \quad (15)$$

이상원인 A_j 가 발생했을 때, 탐지해내기까지 소요되는 평균 표본수(Average Number of Sample out of control : ANSO)와 평균 관측값수(Average Number of Observation out of control : ANOO)로 정의하자.

S_j 와 O_j 는 j 번째 이상원인이 발생할 때 택해지는 표본수와 관측값수를 나타낸다고 한다면 다음과 같이 표현할 수 있다. ($i=1, 2$)

$$ANSO = E(S_j) = (1 \ 0) \cdot [I + e^{-\lambda h_i} (P_0 - I) \cdot (I - e^{-\lambda h_i} P_0)^{-1}] (I - Q_j)^{-1} \cdot 1 \quad (16)$$

$$ANOO = E(O_j) = (1 \ 0) \cdot [I + e^{-\lambda h_i} (P_0 - I) \cdot (I - e^{-\lambda h_i} P_0)^{-1}] (I - Q_j)^{-1} \cdot n \quad (17)$$

두 개의 표본추출구간에서 k 번째와 $k+1$ 번째 시점에서 이상원인 A_j 가 발생할 평균시간을 나타낼 τ_j ($j=1, 2$)는 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \tau_1 &= E[U - kh_1 | kh_1 < U < (k+1)h_1] \\ &= \frac{\int_{kh_1}^{(k+1)h_1} \lambda(x - kh_1) e^{-\lambda x} dx}{\int_{kh_1}^{(k+1)h_1} \lambda e^{-\lambda x} dx} \\ &= \frac{1 - (1 + \lambda kh_1) e^{-\lambda h_1}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h_1})} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= E[U - kh_2 | kh_2 < U < (k+1)h_2] \\ &= \frac{1 - (1 + \lambda kh_2) e^{-\lambda h_2}}{\lambda(1 - e^{-\lambda h_2})} \end{aligned} \quad (19)$$

U 를 관리상태가 지속되는 시간이라 하면 관리상태의 평균시간은 $E(U)=1/\lambda$ 로 표시할 수 있으며, j 번째 이상원인 발생 후 이상원인을 감지할 때까지 걸린 평균시간은 $B_j=h \cdot E(S_j) - \tau_j$ 로 계산할 수 있다.

공정의 한 주기는 이상원인이 발생한 시점부터 이상원인을 감지하여 신호(signal)를 줄 때까지의 시간과 관리상태의 시간의 합으로 표현할 수 있다. 공정에 변화가 발생한 조건하에서 그 원인이 A_j 일 조건부 확률은 λ_j/λ 가 된다. 그러므로 한 주기 동안 평균시간(Average Cycle Time : ACT)은 다음과 같다.

$$ACT = 1/\lambda + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot B_j/\lambda \quad (20)$$

M_j 는 이상원인 A_j 가 발생한 상태에서 공정의 가동으로 인한 시간당 비용을 나타낸다고 한다면 m 개의 이상원인에 기인된 주기당 기대비용은 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$L_1 = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot M_j \cdot B_j/\lambda \quad (21)$$

T 를 이상 신호(False Alarm : FA)에 기인한 비용이라고 하면 FA에 기인한 주기당 비용은 아래와 같다.

$$L_2 = (\text{공정이 관리상태에 있음에도 불구하고 표본값이 관리한계선 밖에 떨어질 확률} \cdot (\text{관리상태하에서 택해진 표본의 수} \cdot T = \alpha \cdot E(S_0) \cdot T \quad (22)$$

여기에서 $\alpha = 1/(10) \cdot (I - Q_0)^{-1} \cdot 1$

j 번째 이상원인 A_j 를 찾는 비용을 T_j 라고 하면 주기당 이상원인을 찾는 기대비용은 다음의 식에 의해 구할 수 있다.

$$L_3 = \sum_{j=1}^m T_j \cdot \lambda_j/\lambda \quad (23)$$

a_1 을 하나의 표본을 택하는데 드는 비용, a_2 는 하나의 관측치를 조사하는데 드는 비용이라고 하면 표본을 추출하는데 드는 주기당 총 평균비용을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$L_4 = a_1[E(S_0) + (\sum_{j=1}^m E(S_j) \cdot \lambda_j)/\lambda] + a_2[E(O_0) + (\sum_{j=1}^m E(O_j) \cdot \lambda_j)/\lambda] \quad (24)$$

공정에서 관리상태와 이상상태 기간은 독립된 확률변수이며 또한 한 주기는 생산, 조사, 조절의 순차구조(Sequential Structure) 확률과정의 특별한 형태에 의해 나타낼 수 있다. 따라서 한 주기에서 발생하는 단위시간당 순수입은 Renewal Reward Process(Ross, 1970)에 위의 결과를 적용할 수 있다.

이것으로부터 시간당 기대 손실비용(Expected Loss : EL)은 아래와 같이 표현할 수 있다. 이 비용함수는 공정모수들(관리한계선 : $CL[CL\bar{X}(L_{11}, L_{12})]$, 표본추출간격 : $h, h_1 < h_2$, 표본크기 : $n, n_1 < n_2$)의 함수이다.

$$EL = (L_1 + L_2 + L_3 + L_4)/ACT \quad (25)$$

3.2.2 최적 관리모수의 결정

VSSI와 VSS의 각 경우에 시간당 기대 손실비용을 최소화하는 공정모수와 비용을 비교함으로써 VSSI가 VSS보다 얼마나 더 합리적인 설계방법인가를 보이고자 한다. 공정에서 표본크기로 인한 변화(δ_1)를 0, 1, 2, 3으로 표본추출구간으로 인한 변화(δ_2)를 1, 2, 3으로 하고 이들 δ_1 과 δ_2 의 조합으로 아래 표에서와 같이 j 번째 이상원인 A_j 으로 대응시켜 생각한다.

$\delta_1=0, \delta_2=1$ 인 경우는 공정이 관리상태로 가동되는 경우이므로 제외시킨다. j 번째 이상원인에 기인해 공정의 지속으로 인한 시간당 비용 M_j 는 $\sum M_j \cdot \lambda_j=1$ 인 경우에 대해 다음 식과 같이 규격한계선($\mu_0 \pm 3\sigma_0$)을 벗어나는 제품비

율의 증가에 비례해서 선택할 수 있다.

$$M_j \propto f(\delta_1, \delta_2) = g(j), j=1, 2, \dots, 11$$

$$= (1 - \Phi[(3 - \delta_1)/\delta_2]) + \Phi[(-3 - \delta_1)/\delta_2] - 2[1 - \Phi(3)]$$

(26)

δ_1	1	0	2	1	2	0	1	2	3	3	3
δ_2	1	2	1	2	2	3	3	3	1	2	3
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$g(j)$	0.0201	0.1310	0.1560	0.1788	0.3121	0.3147	0.3411	0.4146	0.4974	0.4987	0.5201

위에서 얻어진 결과와 Park et al.[11], Duncan[8]이 제안한 방법을 참고로 하면 λ_j 는 지수분포에 주어지는 식에 비례해서 선택된다. 식(26)으로부터 평균변화(mean shift) δ_j^* 는 다음과 같이 정의하여 사용한다. λ 는 0.01, 0.005, 0.001로 준다.

$$\lambda_j \propto (1/2)e^{-\delta_j^*/2} \tag{27}$$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
δ_j^*	1.000	1.891	2.000	2.090	2.518	2.525	2.598	2.791	3.000	3.003	3.057

이상 신호를 찾아내는 비용 T 는 50, 100, 200으로 하고 j 번째 이상원인을 찾아내는 비용 T_j 는 다음과 같은 식으로 결정한다.

$$T_j = 25 \cdot e^{-C_2 \cdot \delta_j^*} \cdot (T/25) \tag{28}$$

C_2 는 0.5, 1.0, 2.0, 1.0, 2.0으로 선택하여 C_2 가 변함에 따라 민감도 분석을 수행한다. 하나의 표본을 택하는 비용 (a_1)은 0.0, 1.0으로 하나의 관측치를 조사하는 비용 (a_2)은 0.1, 0.5로 한다. 지금까지 주어진 비용들의 각각의 조합에서 시간당 기대손실 비용함수 식(25)을 최소로

하는 공정모수를 VSSI \bar{X} 관리도를 사용하였을 경우 $[CL[CL\bar{X}(L_{11}, L_{12})]$, 표본추출간격 : $h, h_1 < h_2$, 표본크기 : $n, n_1 < n_2$]와 VSS \bar{X} 관리도를 사용하였을 경우 $[CL[CL\bar{X}(L_{11}, L_{12})]$, 표본추출간격 : h , 표본크기 : $n, n_1 < n_2$]를 찾아내는 것이다. 일반적으로 세 모수

를 결정하는 최적과정은 편미분을 이용하는 방법이다.

$$\partial EL/\partial n = 0,$$

$$\partial EL/\partial CL = 0,$$

$\partial EL/\partial h = 0$ 을 수치적 기법을 이용해서 구할 수 있다. 여기에서 CL 과 n 의 값이 알려진 경우 h 의 최적값은 $\partial EL/\partial h = 0$ 로 쉽게 구할 수 있다. 그러나 n, CL 을 경제적 측면에서 구체적으로 정하는 분석적인 방법이 존재하지 않으며 $\partial EL/\partial n = 0, \partial EL/\partial CL = 0$ 을 계산하기 어렵고 수학적 표현으로도 쉽지 않다. 따라서 미분법을 이용하는 것은 많은 어려움이 따르므로 시간당 기대 비용함수를 최소화시키는 모수 n, CL, h 를 찾는 방법으로 OR

기법을 응용해서 만든 패키지를 사용할 수 있다.

본 연구에서는 MAT-LAB이라는 프로그램을 사용하여 수행도를 비교하였고 일반적으로 공정을 관리할 때 공정의 시작에서는 표본크기를 항상 크게 하고 표본추출구간은 짧게 하여 시작한다. VSSI 기법을 사용하였을 경우 관련된 결과는 <표 1>에서 <표 4>까지 수록하였다. 그리고 표에서 아래의 값은 VSS 기법을 사용하였을 때의 결과를 나타낸다.

VSSI 기법을 사용하였을 경우 VSS 기법보다 비용 감소효과가 어느 정도가 되는지를 계산하여 본다. 이상원인이 발생했음에도 이를 감지하지 못할 오류를 고려한 상태에서 기대변동에 대한 신호까지의 기대시간(Average Time to Signal : ATS)는 다음과 같다.

<표 5>는 <표 1>에서 <표 4>에서 주어진 변수들의 결합에 대한 결과를 나타낸 값이다.

$$ATS = (\sum_{j=1}^m (h \cdot E(S_j) - \tau_j) \lambda_j) / \lambda \quad (29)$$

Woodall[17]은 실질적인 손실이 일어나기 전에는 품질에서 적은 변화를 빠르게 지적할 수 있는 생산 관리도에서 경제적인 방법은 효과적이지 못할 수 있다고 지적했다. 본 연구에서는 이상 신호의 평균수(Average Number of False Alarm : ANFA) $ANFA = \alpha \cdot E(S_0)$ 를 계산하고 VSSI 기법의 ANFA가 VSS 기법의 ANFA보다 작은 것을 보여 VSSI 기법이 VSS 기법보다 더 합리적임을 보여준다.

3.2.3 VSS와 VSSI의 비교

<표 1>에서 <표 4>에 있는 (%)는 VSS 기법을 사용하는 것보다 VSSI 기법을 사용할 경우 비용감소 효과를 나타낸다. 신호까지의 평균시간을 ATS로 이상 신호의 평균 수는 ANFA로 나타낸다. VSS를 이용하는 것보다 본 논문에서 제시하는 VSSI를 사용하는 것이 비용면에서도 줄일 수 있음을 알 수 있다.

VSSI 기법을 이용한 관리한계선의 폭이 VSS 기법을 이용한 관리한계선 폭과 비교할 때 항상 크다는 것을 알 수 있다. 하나의 표본을 택하는 비용 a_1 을 고려할 때 보다 고려하지 않을 때가 비용면에서 약 13%에서 20% 감소효과가 더 있었음을 알 수 있다. λ 가 클수록 \bar{X} 관리도의 관리한계선의 폭은 넓어진다는 것을 알 수 있다. 손실비용이 증가되며 비용감소 효과는 줄어든다는 것을 볼 수 있다. 하나의 관측값을 조사하는 비용 a_2 가 0.1로 할 때와 0.5로 할 경우를 비교해 본 결과 0.1로 생각할 때가 약 15% 비용감소 효과가 더 있음을 알 수 있다.

a_2 를 작게 할수록 관리한계선의 폭은 넓어지고 표본크기는 커지며 표본추출간격은 좁아진다는 것이 확인되었다. 이상 신호를 조사하는 비용 (T)이 클수록 관리한계선의 폭은 넓어지고 비용 감소 효과가 증가한다. 또한 표본의 크기는 커지며 표본추출구간은 VSSI인 경우에는 작아지고 VSS인 경우에는 커진다는 것을 알 수 있다. 결과로부터 VSSI 기법을 사용한 경우에 이상 신호

< 표 1 > VSSI와 VSS에 대한 최적해 ($a_1 = 0, a_2 = 0.1$)

λ	0.01			0.005			0.001		
	T	50	100	200	50	100	200	50	100
n_1, n_2, n	2, 15, 3	2, 17, 4	2, 18, 4	2, 16, 3	2, 19, 4	2, 20, 5	2, 18, 3	2, 20, 4	2, 22, 5
h_1, h_2, h	0.1, 1.28, 0.562	0.1, 1.90, 0.550	0.1, 1.36, 0.542	0.1, 1.26, 0.551	0.1, 1.20, 0.536	0.1, 1.15, 0.526	0.1, 1.11, 0.540	0.1, 1.08, 0.527	0.1, 1.90, 0.514
l_1	2.245	2.280	2.379	2.283	2.314	2.346	2.353	2.348	2.376
	2.179	2.238	2.283	2.188	2.262	2.283	2.234	2.274	2.313
l_2	4.181	4.251	4.234	4.250	4.312	4.356	4.381	4.363	4.409
	3.515	3.716	3.899	3.542	3.755	3.931	3.583	3.780	3.968
ANSI	208.4	213.5	219.5	423.2	433.8	443.7	2130.4	2195.2	2246.1
	177.4	181.2	183.9	362.5	372.9	379.8	1853	1898	1943
ANOI	484.3	497.3	512.2	975.8	1001.3	1024.7	4875.9	5023.4	5137.8
	435.0	445.7	449.4	884.1	912.6	930	4476	4598	4711
ANSO	3.03	3.16	3.23	2.98	3.11	3.23	2.99	3.09	3.20
	5.45	5.73	6.30	5.22	5.33	5.62	5.04	5.22	5.39
ANOO	13.1	14.90	16.81	13.29	15.05	16.89	13.34	15.26	17.06
	26.19	30.27	35.09	26.19	29.97	33.90	26.47	30.14	33.82
ANFA	0.074	0.035	0.016	0.134	0.064	0.031	0.624	0.293	0.140
	0.078	0.037	0.018	0.144	0.065	0.032	0.629	0.297	0.141
EL	1.119	1.214	1.375	1.081	1.139	1.230	1.049	1.077	1.112
	1.220	1.495	2.016	1.092	1.241	1.516	1.284	1.384	1.493
%	8.28	18.80	31.80	1.00	16.28	18.87	18.27	22.11	25.49

※ 두 번째 행에 있는 값이 VSS에 대한 값이다.

< 표 2 > VSSI와 VSS에 대한 최적해 ($a_1 = 0, a_2 = 0.5$)

λ	0.01			0.005			0.001		
	T	50	100	200	50	100	200	50	100
n_1, n_2, n	1, 5, 2	1, 6, 2	1, 8, 3	1, 6, 2	1, 9, 2	1, 11, 3	1, 7, 2	1, 10, 3	1, 13, 3
h_1, h_2, h	0.1, 1.28, 0.907	0.1, 1.90, 0.892	0.1, 1.36, 0.859	0.1, 1.26, 0.874	0.1, 1.20, 0.831	0.1, 1.15, 0.799	0.1, 1.11, 0.847	0.1, 1.08, 0.801	0.1, 1.90, 0.758
l_1	2.012 1.751	2.119 1.809	2.215 1.963	2.070 1.788	2.162 1.944	2.246 2.024	2.118 1.832	2.204 1.968	2.280 2.081
l_2	3.695 2.944	3.935 3.162	4.129 3.413	3.824 2.976	4.028 3.255	4.194 3.486	3.928 3.017	4.101 3.297	4.245 3.555
ANSI	84.0 107.8	86.9 111.6	89.8 115.9	172.5 228.3	178.7 240.2	184.8 249.9	881.3 1180	913.9 1247	945.0 1318
ANOI	191.4 148.6	202.7 155.4	212.1 162.8	392.9 317.1	413.1 347.4	430.2 366.7	1998.6 1660	2089.1 1806	2166.2 1922
ANSO	2.81 9.46	2.93 11.53	3.02 13.71	2.73 8.62	2.86 9.19	2.96 9.88	2.69 8.15	2.82 8.65	2.94 8.98
ANOO	8.15 17.85	10.45 24.31	12.35 32.34	8.76 17.96	10.70 23.72	12.56 29.16	9.02 18.37	10.92 23.94	12.82 29.12
ANFA	0.253 0.356	0.107 0.175	0.046 0.075	0.444 0.666	0.189 0.272	0.082 0.122	1.967 3.009	0.844 1.219	0.370 0.499
EL	2.270 2.395	2.414 2.523	2.619 3.087	2.236 2.384	2.339 2.410	2.470 2.644	2.205 2.394	2.274 2.360	2.244 2.354
%	5.22	4.32	15.16	6.21	2.94	6.58	7.89	3.64	4.67

< 표 3 > VSSI와 VSS에 대한 최적해 ($a_1 = 1, a_2 = 0.1$)

λ	0.01			0.005			0.001		
	T	50	100	200	50	100	200	50	100
n_1, n_2, n	4, 15, 5	4, 17, 6	4, 18, 6	4, 18, 5	4, 20, 6	4, 22, 7	4, 20, 5	4, 22, 6	4, 24, 7
h_1, h_2, h	0.1, 1.654, 1.28	0.1, 1.90, 1.646	0.1, 1.643, 1.36	0.1, 1.624, 1.26	0.1, 1.611, 1.20	0.1, 1.599, 1.15	0.1, 1.60, 1.11	0.1, 1.58, 1.08	0.1, 1.90, 1.574
l_1	2.150 1.968	2.217 2.207	2.273 2.083	2.177 2.013	2.231 2.048	2.282 2.088	2.204 2.037	2.251 2.066	2.406 2.096
l_2	4.302 3.237	4.380 3.438	4.462 3.625	4.346 3.269	4.428 3.464	4.495 3.649	4.391 3.291	4.464 3.483	4.712 3.665
ANSI	61.17 59.95	62.05 60.26	62.91 60.37	124.2 122.7	126.1 123.6	128.0 124.6	628.8 623.2	638.6 629.0	614.6 635.0
ANOI	341.3 282.4	350.20 286.7	358.2 286.2	688.3 579.7	704.4 590.0	719.5 598.2	3456.8 2923	3530.2 2973	3978.5 3018
ANSO	1.55 2.52	1.59 2.64	1.64 2.86	1.54 2.36	1.59 2.44	1.63 2.52	1.53 2.30	1.58 2.38	1.54 2.45
ANOO	10.84 18.32	12.09 21.18	13.43 24.41	10.94 18.49	12.21 21.07	13.55 23.72	11.07 18.77	12.35 21.29	14.28 23.84
ANFA	0.102 0.072	0.050 0.035	0.024 0.017	0.197 0.132	0.096 0.066	0.047 0.033	0.951 0.622	0.466 0.312	0.203 0.157
EL	2.107 2.135	2.211 2.406	2.283 2.923	2.014 2.019	2.146 2.168	2.249 2.443	2.053 2.131	2.093 2.198	2.138 2.274
%	1.31	8.10	21.90	0.14	1.01	7.94	3.66	4.78	5.98

< 표 4 > VSSI와 VSS에 대한 최적해 ($a_1 = 1, a_2 = 0.5$)

λ	0.01			0.005			0.001		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
T	50	100	200	50	100	200	50	100	200
n_1, n_2, n	2, 6, 3	2, 7, 3	2, 8, 3	2, 7, 3	2, 10, 3	3, 17, 5	2, 9, 3	2, 12, 3	3, 18, 4
h_1, h_2, h	0.1, 1.99, 1.28	0.1, 1.98, 1.90	0.1, 1.97, 1.36	0.1, 1.93, 1.26	0.1, 1.89, 1.20	0.1, 2.11, 1.15	0.1, 1.88, 1.11	0.1, 1.84, 1.08	0.1, 2.08, 1.90
l_1	1.774 1.721	1.830 1.759	2.121 1.844	1.754 1.718	1.887 1.845	2.148 2.201	1.830 1.797	2.102 1.895	2.180 2.149
l_2	3.447 2.773	3.589 2.992	4.058 3.212	3.441 2.789	3.730 3.051	4.126 3.760	3.603 2.841	4.057 3.097	4.180 3.381
ANSI	56.53 49.75	58.11 49.97	50.43 50.18	115.52 103.1	120.03 105.2	103.84 94.25	592.96 531.5	517.39 544.6	531.11 480.9
ANOI	140.1 120.1	147.15 124.1	176.16 125.5	284.03 254.9	301.59 272.5	358.24 332.8	1453.1 1339	1746.9 1415	1805.6 1686
ANSO	2.26 4.28	2.43 5.00	2.13 6.07	2.26 3.91	2.38 4.09	2.10 4.28	2.23 3.63	2.00 3.80	2.08 3.22
ANOO	7.34 13.21	8.85 17.31	10.73 22.76	7.34 13.19	9.08 17.05	10.88 29.92	7.60 13.70	9.49 17.35	11.06 21.13
ANFA	0.292 0.276	0.140 0.138	0.055 0.066	0.589 0.544	0.254 0.240	0.103 0.016	2.650 2.388	1.046 1.064	0.477 0.346
EL	2.754 2.835	3.119 3.161	3.337 3.712	2.635 2.755	2.862 2.964	3.206 3.400	2.420 2.675	2.411 2.778	2.783 2.897
%	2.86	1.33	10.10	4.36	3.44	5.71	9.53	13.21	3.94

< 표 5 > VSSI 관리도와 VSS 관리도의 ATS

λ	0.01			0.005			0.001		
	50	100	200	50	100	200	50	100	200
T	50	100	200	50	100	200	50	100	200
$a_1 = 0, a_2 = 0.1$	1.207 2.779	1.208 2.875	1.211 3.142	1.172 2.600	1.172 2.589	1.173 2.690	1.166 2.449	1.167 2.527	1.166 2.513
$a_1 = 0, a_2 = 0.5$	8.149 8.124	8.68 9.84	9.52 11.35	6.66 7.10	5.17 7.22	4.97 7.50	5.79 6.48	4.84 6.53	3.97 6.44
$a_1 = 1, a_2 = 0.1$	2.17 3.33	2.14 3.52	1.91 3.87	1.91 3.02	1.87 3.13	1.82 3.24	1.82 2.89	1.78 2.98	1.73 3.06
$a_1 = 1, a_2 = 0.5$	7.22 7.52	7.56 8.91	8.08 10.99	6.02 6.58	4.96 6.79	4.82 7.09	5.10 5.89	4.20 6.05	3.34 5.65

의 평균 수(ANFA)는 VSS의 ANFA보다 작음을 알 수 있다.

이것은 생산공정에서 VSSI 기법을 이용한다면 공정이 관리상태일 경우에 공정변화가 있다는 신호를 줄 위험부담이 줄어든다고 할 수 있다. 이상원인이 발생했음에도 이를 감지하지 못할 오류를 고려한 상태에서 변화에 대한 신호까지의 기대시간을 비교해 본 결과 VSS 기법을 사용

할 때가 VSSI 기법을 사용할 때보다 크다는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 계량형 관리도 중에서 정보의 손실을 줄일 수 있는 중요한 관리도인 \bar{X} 관리

도 중에서 이전 시점의 표본통계량에 따라 표본 크기와 표본추출구간을 다르게 선택하는 변량표본크기와 변량표본추출구간을 동시에 고려한 경제적 설계를 실시하였다. 현실적으로 공정의 이상원인은 단일 이상원인이 존재하기보다는 다중 이상원인이 존재한다.

하나의 표본을 택하는 비용을 0.0으로 할 때, 이상원인을 발견하기 위한 비용과 하나의 관측값을 조사하는 비용이 작고 공정에서 이상원인이 발생하는 평균횟수(λ)가 작을수록 VSSI 기법을 사용한 \bar{X} 관리도가 VSS 기법을 사용한 \bar{X} 관리도보다 효과적임을 알 수 있다.

VSSI기법을 사용한 \bar{X} 관리도가 VSS 기법을 사용한 \bar{X} 관리도보다 손실비용 면에서 0.14%에서 25.49%정도의 비용감소 효과를 가져옴을 알 수 있었다.

Park et al.[11]이 제안한 VSS기법을 이용한 \bar{X} 관리도의 결과와 비교해 보면 비용면에서 2%에서 7%로 개선되었다고 볼 수 있다. 그러나, 본 연구에서는 하나의 표본을 택하는 비용(a_1)을 고려할 때에는 연구결과가 비슷하였다.

본 연구에서 제안한 변량표본크기와 변량표본추출구간을 이용한 \bar{X} 관리도의 경제적 설계는 두 개의 경우, 즉 (n_1, h_2) , (n_2, h_1) 만 고려했기 때문에 관리도를 설계할 때 복잡하거나 수식의 전개가 어렵지는 않으며, 실제 적용분야에서도 쉽게 적용이 가능하다고 판단된다.

참고문헌

- [1] 이호우(1998), 대기행렬이론, Σ 시그마프레스, 서울.
- [2] Annadi, H. P., keats, J. B., Runger, G. C. and Montgomery, D. C.(1995), "An Adaptive Sample Size CUSUM Control Chart," *International Journal of Production Research*, Vol. 33, No. 6, pp. 1605-1616.
- [3] Costa, A. F. B.(1994), " \bar{X} Charts with Variable Sample Size," *Journal of Quality Technology*, Vol. 26, No. 3, pp. 155-163.
- [4] Costa, A. F. B.(1997), " \bar{X} Charts with Variable Sample Size and Sampling Intervals," *Journal of Quality Technology*, Vol. 29, No. 2, pp. 197-204.
- [5] Croasdale, P.(1974), "Control Charts for a Double-Sampling Scheme Based on Average Production Run Lengths," *International Journal of Production Research*, Vol. 12, No. 3, pp. 585-592.
- [6] Daudin, J. J.(1992), "Double Sampling \bar{X} Charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 24, No. 2, pp. 78-87.
- [7] Duncan, A. J.(1956), "The Economic Design of \bar{X} -Chart used to Maintain Current Control of a Process," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 51, No. 274, pp. 228-242.
- [8] Duncan, A. J.(1971), "The Economic Design of \bar{X} -Charts When There is a Multiplicity of Assignable Causes," *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 66, No. 333, pp. 107-121.
- [9] Lorenzen, T. J. and Vance, L. C. (1986), "The Economic Design of Control Charts: A Unified Approach," *Technometrics*, Vol. 28, No. 1, pp. 3-10.
- [10] Montgomery, D. C.(1996), Introduction to Statistical Quality Control, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York, NY.
- [11] Park, C. and M. R. Reynolds Jr.

- (1994), "Economic Design of a Variable Sample Size \bar{X} Chart," *Communication in Statistics-Simulation and Computation*, Vol. 23, No. 2, pp. 467-483.
- [12] Prabhu, S. S., Montgomery, D. C., and Runger, G. C.(1997), "Economic-Statistical Design of and Adaptive \bar{X} Charts," *International Journal of Production Economics*, Vol. 49, pp. 1-15.
- [13] Prabhu, S. S., Runger, G. C., and J. B. Keats(1993), " \bar{X} Chart with Adaptive Sample Sizes," *International Journal of Production Research*, Vol. 31, No. 12, pp. 2895-2909.
- [14] Reynolds, M. R., Arnold, J. C., Amin, R. W., and Nachlas, J. A.(1988), " \bar{X} Charts with Variable Sampling Intervals," *Technometrics*, Vol. 30, No. 2, pp. 181-192
- [15] Saniga, E. M.(1989), "Economic Statistical Control Chart Design an Application to \bar{X} and R Charts," *Technometrics*, Vol. 31, No. 3, pp. 313-320.
- [16] Tagaras, G.(1998), "A Survey of Recent Development in the Design of Adaptive Control Charts," *Journal of Quality Technology*, Vol. 30, No. 3, pp. 212-231.
- [17] Woodall, W. H.(1986), "Weaknesses of the Economic Design of Control Charts," *Technometrics*, Vol. 28, No. 4, pp. 408-409.