

표면거칠기를 고려한 평행 스러스트 베어링의 혼합윤활 해석

이동길 · 임윤철*

연세대학교 대학원 기계공학과
*연세대학교 기계전자공학부

Mixed Lubrication Analysis of Parallel Thrust Bearing Considering Surface Roughness

Dong-Gil Lee and Yoon-Chul Rhim*

Graduate School Yonsei Univ.

*School of Electrical and Mechanical Eng. Yonsei Univ.

Abstract – The real area of contacts, average film thickness, mean real pressure, and mean hydrodynamic pressure are investigated numerically in this study, especially for the parallel thrust bearing. Model surface is generated numerically with given autocorrelation function and some surface profile parameters. Then the average Reynolds equation contained flow factors and contact factor is applied to predict the effects of surface roughness in mixed lubrication regimes. In this equation, flow factors are defined as correction terms to smooth out high frequency surface roughness and contact factor is introduced to relieve from obtaining the average film thickness. Therefore the computation time to obtain bath \bar{h} can be reduced.

Key words – real area of contact, average film thickness, mixed lubrication, contact factor, surface topography.

1. 서 론

표면 거칠기를 고려한 베어링의 해석방법은 몇몇 연구자에 의하여 기본적인 개념이 제안되었다. 그 중 1970년대 후반에 Patir와 Cheng[1-2]이 표면 거칠기의 영향을 고려할 수 있는 평균 레이놀즈 식(Average Reynolds equation)을 제시하였다. Patir와 Cheng은 서로 다른 거칠기를 가진 두 면이 움직이고 있을 때 매끈한 면 사이를 흐르는 유량과의 비교를 위해 유동 계수(Flow factor, ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z)를 정의하여 줌으로써 표면 거칠기의 영향을 기존의 레이놀즈 식을 이용하여 해석할 수 있다는 이 개념은 그 후 많은 사람들에 의하여 널리 사용되고 있다. 그러나 평균 레이놀즈 식은 두 표면의 접촉에 의한 요철의 변형을 충분히 고려하여 주지 못하므로 요철의 변형을 고려한 \bar{h} 를 구하는 별도의 계산이 필요하였다. Wu와 Cheng[3]은 두 표면의 거칠기에 대한 확률적 분포함수를 이용하여 접촉계수를 고려하는 단순화된 평균 레이놀즈 식을

제안하였다.

본 연구에서는 Wu와 Cheng의 단순화된 평균 레이놀즈 식을 사용하여 2차원 표면 거칠기를 갖는 평행 스러스트 베어링에 대한 혼합윤활 해석을 수행하였다. 그리고 표면의 거칠기 분포를 가우시안 분포함수(Gaussian distribution function)를 직접 사용하는 대신 모델링한 표면의 거칠기 분포를 이산화하여 사용하였다. 이러한 거칠기 분포를 수학적으로 얻기 위하여 표면 거칠기 파라미터로 정의되는 R_q , Skewness (Sk), Kurtosis(Ku), x 및 y 방향으로의 상관도 길이(correlation length) λ_x, λ_y 를 고려하여 통계적인 방법을 사용하였다. 또한 요철들간의 접촉에 의한 하중과 평균 접촉압력, 실접촉면적, 등을 얻기 위해 Greenwood와 Tripp[4]의 가정을 이용한 탄성접촉에 대한 통계적인 방법과 Bhushun[5]의 관계식을 사용했다. 그리고 두 표면이 미끄럼운동을 할 때 등가표면(equivalent surface)의 R_q 는 공분산의 형태로 나타내었다.

또한 본 논문에서는 x, y 방향의 압력구배가 있는 평균 레이놀즈 식에서 h_o 를 계산하기 위하여 뉴튼방법을 수치해석 프로그램에 적용함으로써 계산시간을 줄일 수 있었다.

2. 이론해석

2-1. 표면 모델링(Surface Modeling)

표면의 거칠기를 지배방정식에 대입하기에 앞서 먼저 표면에 대한 정보가 있어야 한다. 본 논문에서는 수학적으로 표면을 모델링하기 위해 auto-correlation function(ACF)을 식(1)과 같이 가정하고 거칠기에 대한 Gaussian 분포와 non-Gaussian 분포를 모두 얻었다. 거칠기의 분포가 비대칭인 Non-Gaussian 분포를 얻기 위해 양의 Sk 값이 얻어질 수 있는 Gamma 분포를 구하는 방법으로는 거부법(Rejection Method)을 사용하여 난수를 발생시켰다.

즉 임의의 거칠기를 갖는 표면을 만들기 위해 식(3)과 같이 2차원 표면 거칠기 Z_{ij} 를 표현했으며 식(1)을 수치계산에 적용하기에 앞서 식(2)와 같은 형태로 바꾸었다[6].

$$R(\lambda_x, \lambda_y) = R_q^2 \left(1 - \frac{|\lambda_x|}{\lambda_x^*} \right) \left(1 - \frac{|\lambda_y|}{\lambda_y^*} \right), \quad \begin{matrix} |\lambda_x| \leq \lambda_x^* \\ |\lambda_y| \leq \lambda_y^* \end{matrix} \quad (1)$$

0, otherwise

$$R_{pq} = R_q^2 \left(1 - \frac{p}{n} \right) \left(1 - \frac{q}{m} \right), \quad \begin{matrix} p \leq n, \quad q \leq m \\ \text{otherwise} \end{matrix} \quad (2)$$

$$Z_{i,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} \eta_{i+k, j+l}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M$$

$$[Z_{ij}] = [N \times M], \quad [R_{pq}] = [n \times m] \quad (4)$$

여기서 η_{ij} 는 식(5)와 같으며 상관도 길이와 다른 변수들과의 관계는 식(6)과 같다.

2-2. 평행스러스트의 혼합유향 모델링

Fig. 1은 두 개의 거친 표면이 상대운동을 할 때 표면의 형상 및 유막의 두께를 표현하는 좌표계를 나타내며 각 표면에서 요철들간의 접촉에 의해 \bar{h} 는 식(7)과 같다.

$$\bar{h} = \int_{-h_o}^{\infty} (h_o + z) \phi(z) dz \quad (7)$$

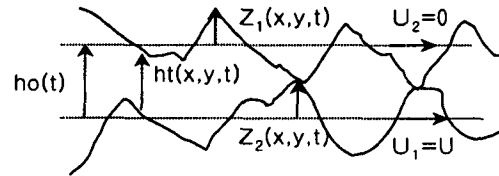


Fig. 1. Coordinates system for the rough surface analysis.

평균 레이놀즈 식 (8)[1,2]로부터 유막사이에서 발생하는 평균압력을 구하기 위해서는 평균 유막두께를 알아야 한다. 그러나 2차원 표면에 대하여 평균 유막두께를 구하는 것은 많은 계산과정을 요구한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h_o^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_y \frac{h_o^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) = \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} + \frac{U_1 - U_2}{2} \sigma \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \quad (8)$$

따라서 본 연구에서는 식(9)와 같이 정의되는 접촉계수 ϕ_c 를 이용하여 식(8)을 식(10)과 같이 ϕ_c 를 포함하는 식으로 바꾸어 주었다.

$$\phi_c = \frac{\partial \bar{h}}{\partial h_o} = \int_{-h_o}^{\infty} \phi(z) dz \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial h_o} \frac{\partial h_o}{\partial x} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial h_o} \frac{\partial h_o}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_c \frac{h_o^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_y \frac{h_o^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) = \left(\phi_c \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial h_o}{\partial x} + \frac{U_1 - U_2}{2} \sigma \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + \phi_c \frac{\partial h_o}{\partial t} \quad (10)$$

식(10)을 평행 스러스트 베어링에 적용하기 위해 아래의 식(11)과 같은 무차원 변수로 나타내면 식(12)와 같고 경계조건은 식(13)과 같다. 경계조건의 기준 압력은 모두 대기압으로 정했다.

무차원 변수

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{B}, \quad H_o = \frac{h_o}{Rq}, \quad \bar{P} = \frac{(\bar{p} - p_a) h_o^2}{\mu U S} \quad (11)$$

$$W_{hyd} = \frac{\bar{W} h_o^2}{\mu U S^3}, \quad \tau = \frac{t}{S/U}, \quad S = \sqrt{L^2 + B^2}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial X^2} + \left(\frac{f_y}{f_x} \right) \left(\frac{L}{B} \right)^2 \frac{\partial^2 \bar{P}}{\partial Y^2} = \frac{12}{H_o} \left(\frac{f_c}{f_x} \right) \left(\frac{L}{S} \right)^2 \frac{\partial H_o}{\partial \tau} \quad (12)$$

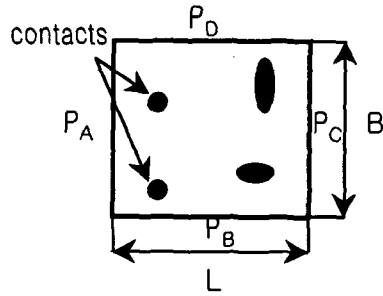


Fig. 2. Boundary conditions for the analysis domain.

경계조건

$$\begin{aligned}
 P &= P_A \text{ along } x=0, P = P_B \text{ along } x=L \\
 P &= P_C \text{ along } y=0, P = P_D \text{ along } y=B
 \end{aligned}
 \quad (13)$$

해석영역은 Fig. 2와 같고 식(12)를 차별화하여 전 해석영역에서 평균 유막압력을 적분함으로써 무차원 평균 지지하중(W_{hyd})을 얻을 수 있다.

그러나 유막에 대한 평균압력분포를 얻기 위해 H_0 와 $\partial H_0 / \partial \tau$ 에 관한 정보가 필요하다는 것을 식(12)로부터 알 수 있다. 이 값은 평행 슬러스트에 작용하는 힘들의 수직방향(z 방향)의 평형관계식 (14)로부터 얻을 수 있다. 수치해석과정에 대한 Flow Chart는 부록 Fig. 1에 수록하였다.

$$F_{tot} = W_{asp} + W - W \quad (14)$$

여기서 W_{asp} 는 탄성접촉에 대하여 식(15)와 같이 주어지는 힘으로[5] 요철들간의 접촉을 고려한 접촉하중이다.

Bhushan의 이론을 근거로 하여 접촉에 대한 통계적해석 방법을 통해 W_{asp} 를 얻을 수 있다. 또한 Fig. 1과 같이 두 개의 표면이 모두 거칠기를 갖고 있는 경우를 Fig. 3과 같이 한쪽의 표면은 완전히 매끄럽

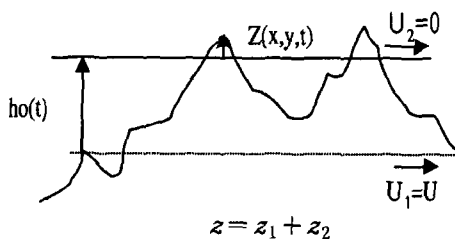


Fig. 3. Equivalent surface for two rough surfaces.

고 다른 표면은 두 표면의 조합 거칠기를 갖는 것으로 해석하여도 타당하므로 등가표면(equivalent surface)의 곡률(R_q)은 각각의 곡률(R_{p1}, R_{p2})의 조화평균 값으로 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 W_{asp} &= p_r A_{re} \\
 &= \frac{4}{3} NE' R_p^{1/2} \int_{h_0}^{\infty} (z-h_0)^{3/2} \varphi(z) dz
 \end{aligned}
 \quad (15)$$

여기서 A_{re} 는 실접촉 면적으로 식(16)과 같으며 p_r 은 평균접촉압력이다.

$$A_{re} = \pi NR_p \int_{h_0}^{\infty} (z-h_0) \varphi(z) dz \quad (16)$$

위의 식(15)와 (16)은 탄성변형에 대하여 제한적으로 사용된 식이다. 따라서 소성지수는 식(17)과 같이 '1' 보다 작게 하여 적용하였다.

$$\varphi = \frac{E'}{H} \left(\frac{R_q}{R_p} \right) < 1 \quad (17)$$

또한 두 표면이 서로 슬라이딩 할 때 요철은 매 순간마다 계속 변할 것이므로 이를 고려하기 위해 두 표면의 조합 R_q 값을 공분산의 형태로 식(18)과 같이 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 R_q &= \sqrt{R_{q1}^2 + R_{q2}^2 + 2R_{q12}} \\
 R_{q12} &= COV(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)
 \end{aligned}
 \quad (18)$$

여기서 X, Y 는 확률변수로서 서로 비독립적인 변수(not independent random variable)이며 E 는 기대값(Expected value)을 나타낸다. 그리고 본 논문에서는 곡률반경 R_p 와 단위면적당 요철의 밀도 사이에는 식(19)와 같은 관계가 있음을 이용하여 수치해석에 적용하였다[7].

$$NR_q R_p = const, \quad \sqrt{\frac{R_q}{R_p}} = const \quad (19)$$

3. 결과 및 고찰

3-1. 파라미터에 따른 표면 모델링

표면을 모델링 하기 위하여 가정된 파라미터는 $R_q, S_k, \lambda_s, \lambda_r$, 그리고 $\gamma = \lambda_r / \lambda_s$ 이다. Fig. 4(a)는 가우시안 분포를 근사적으로 모델링한 표면과 그에 따른 거칠

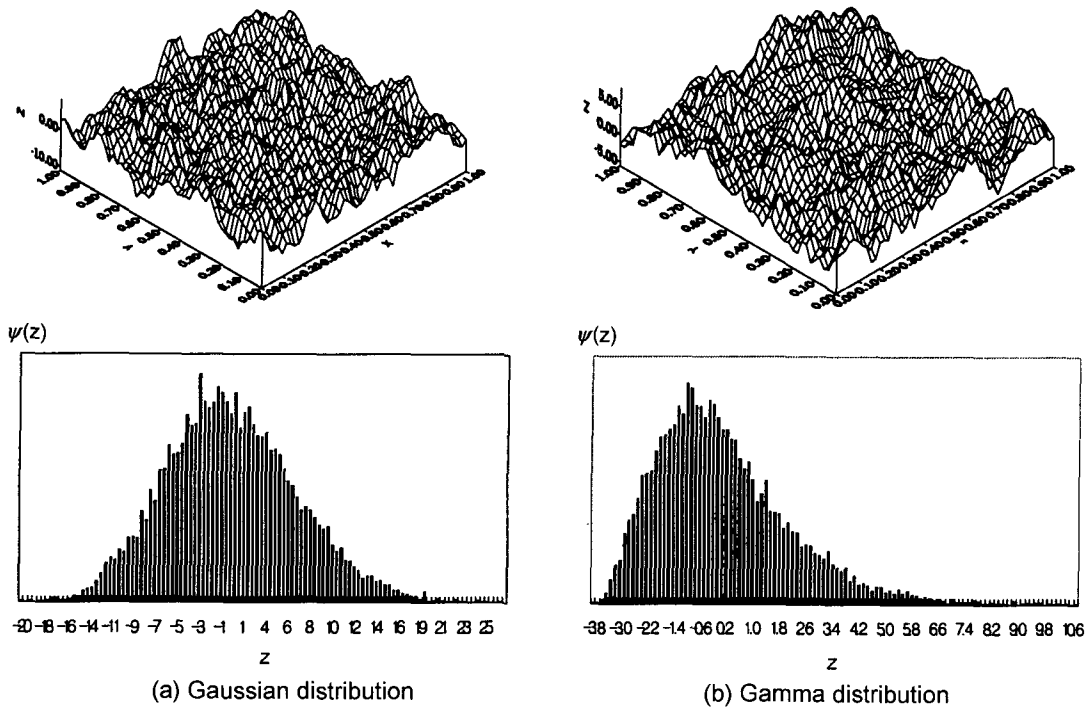


Fig. 4. Generated model surfaces.

기 분포이며 Fig. 4(b)는 양의 Sk 값을 갖는 감마분포를 근사적으로 모델링한 표면과 그에 따른 거칠기의 분포이다.

수치적으로 계산된 파라미터의 값은 가정한 파라미터와 비교했을 때 0.1 - 2%의 상대오차가 있었다. 그리고 가정한 autocorrelation function은 모델링된 표면의 autocorrelation function과 비슷하였다.

λ_x, λ_y 의 값이 d_x, d_y 와 같다면 표면 거칠기의 주된 구조를 모델링할 수 있으며 λ_x, λ_y 값이 d_x, d_y 값의 10배이면 작은 wavelength를 갖는 표면을 모델링할 수 있다[7]. 즉 상관도 길이는 표면의 전체적인 구조에 영향을 미치며 그에 따라 윤활상태도 바뀐다고 볼 수 있다.

Fig. 5(a)는 공칭유막두께의 변화에 따른 실접촉 면적의 변화이다. 하중이 증가하면 h_0 가 감소하면서 실접촉 면적이 증가하는 것을 볼 수가 있다. 또한 실접촉 면적은 두 표면이 isotropic일 때 크게 나왔다.

Fig. 5(b)에서도 알 수 있듯이 h_0 값이 증가하면서 요철들간의 접촉에 의한 하중이 감소하게 된다. 이것은 실접촉 면적이 감소하는 것과 관련이 있다고 볼 수 있다.

Fig. 5(c)는 유체윤활에 의한 하중과 공칭 유막두께와의 관계를 나타낸 그림이다. Fig. 5(b)에서의 결과와 같이 h_0 가 증가하면서 무차원 하중이 감소하는 것을 볼 수가 있다. 그러나 두 표면이 isotropic($\gamma=1$)한 경우 유체윤활에 의한 무차원 하중은 표면이 longitudinal($\gamma > 1$), 혹은 transverse($\gamma < 1$)한 경우보다 작다.

즉 표면의 길이방향과 폭 방향의 상관도 길이가 다르게 되면 상관도 길이비(correlation length ratio)가 '1'이 되지 않는다. 따라서 표면의 요철과 요철사이가 윤활유를 담아두는 역할을 하게되어 점성저항의 증가로 표면이 isotropic한 경우 보다 지지하중이 크게 된다.

Fig. 6은 실접촉 면적의 증가에 따른 접촉하중의 변화를 보여준다. 그림에서 알 수 있듯이 표면의 γ 값에 관계없이 접촉하중 변화의 기울기는 거의 일정함을 보여주고 있다. 이것은 주어진 하중이 증가하면서 실접촉 면적이 증가하여 식(15)에 나타나 있는 평균접촉압력이 거의 일정하게 유지됨을 말해준다.

즉 주어진 하중에서 각 표면의 요철에 작용하는 평균접촉압력은 탄성변형내에서 변화가 작다고 볼 수 있다. B. Bhushan은 평균접촉압력(p_0)이 걸보기압력

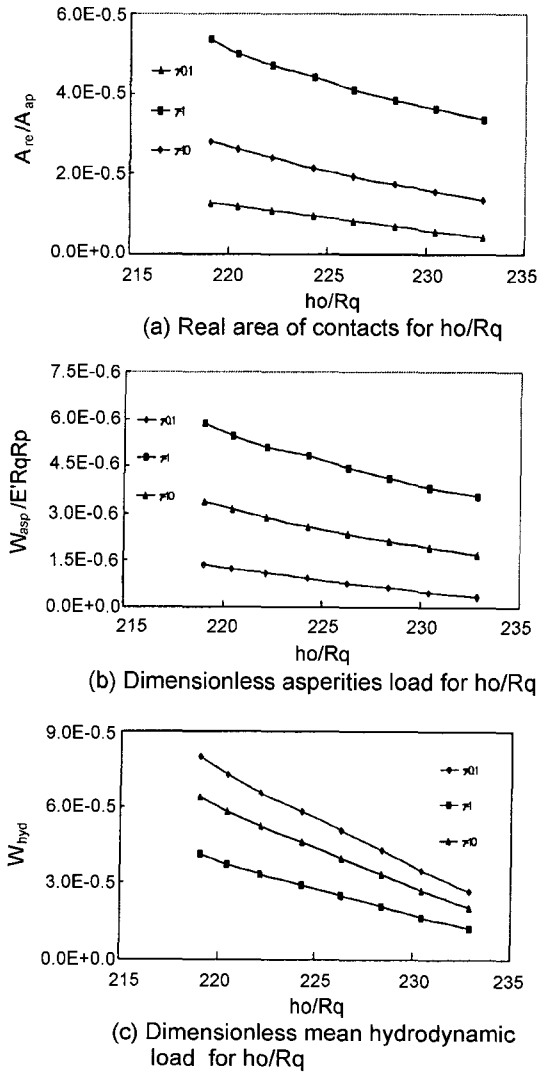


Fig. 5. Bearing performance variations due to surface roughness for the correlation length ratio.

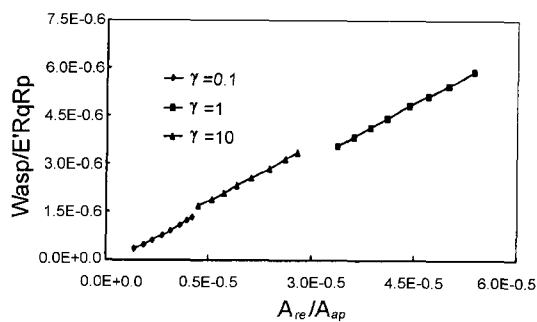


Fig. 6. Dimensionless asperities' load w.r.t real area of contacts.

(apparent pressure)의 0.04승에 비례한다고 하였고[5] Onions과 Archard[8]는 평균접촉압력은 공칭하중 (nominal load)에 거의 무관하다고 주장하였는데, 이는 본 논문 결과의 타당함을 뒷받침한다고 생각된다.

4. 결 론

주어진 R_q 와 Sk 그리고 상관도 길이를 이용하여 표면을 수학적으로 모델링할 수 있었다. 비록, 두 표면이 거시적으로는 평행하여도 표면 거칠기로 인하여 간극에서의 국소유량이 변하고 국부적인 압력이 발생하여서 표면 전체에 걸쳐 평균압력분포가 형성되며 요철의 접촉에 의한 하중이 함께 발생되어 이로부터 지지하중이 계산되었다.

주어진 하중이 증가하면서 h_o 값이 감소하였으며 두 표면이 모두 isotropic할 때 유막에 의한 하중(W_{hyd})은 적으나 접촉하중(W_{asp})은 longitudinal 혹은 transverse 표면에서의 하중보다 크게 됨을 밝혔다.

평행스러스트 베어링에서 외부작용 하중이 증가하여도 요철의 탄성변형 내에서는 평균접촉압력은 거의 일정했다.

NOTATION

- a_{ki} : coefficient of the transformation matrix
- A_{re} : real area of contacts, m^2
- A_{ap} : apparent area of contacts, m^2
- E : composite Young's modulus, [Pa]

$$\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

- E_1, E_2 : Young's moduli of each surface, [Pa]
- \bar{h} : average film thickness, μm
- h_o : nominal film thickness, μm
- h_t : total film thickness, μm
- H : hardness of surfaces
- H_o : dimensionless nominal film thickness
- K_u : Kurtosis of sliding surface
- N : number of asperities
- \bar{N} : number of asperities of unit area
- \bar{p} : mean hydrodynamic pressure, [Pa]
- $1/R_p$: sum of the curvatures of two

surfaces, $1/m \frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_{p1}} + \frac{1}{R_{p2}}$

- Sk : Skewness of sliding surface
- U_1, U_2 : sliding speed of each surface m/s
- $U = U_1 - U_2$: relative velocity
- \bar{W} : mean hydrodynamic load
- W : applied load [N]
- W_{asp} : asperities load [N]
- W_{hyd} : dimensionless mean hydrodynamic load
- z_1, z_2 : roughness height of surfaces measured from their mean line, μm
- $\gamma = \lambda_x^* / \lambda_y^*$: asperity aspect ratio
- η_{ij} : independent identically distributed random numbers
- λ_x^*, λ_y^* : correlation lengths along x and y directions. μm
- μ : absolute viscosity of lubricant, $N \cdot s/m^2$
- ϕ_x, ϕ_y : pressure flow factors
- ϕ_s : shear flow factor
- ϕ_c : contactor factor
- $\varphi(z)$: probability density function of roughness height
- φ : plasticity index

참고문헌

1. Patir N. and Cheng H. S., "An Average Flow model for Determining Effect of three dimensional Roughness on Partial Hydrodynamic Lubrication," *ASME, J. Lubri. Tech.* Vol. 100, pp 12-17, 1978
2. Patir N. and Cheng H. S., "Application of Average Flow model to Lubrication Between Rough Sliding Surface," *ASME, J. Lubri. Tech.* Vol. 101, pp 220-230, 1979
3. Wu C. and Zheng L., "An Average Reynolds Equation for Partial Film Lubrication with a Contact Factor," *ASME, J. of Tribology*, Vol. 111, pp 188-191, 1989.
4. J. A. Greenwood and J. H. Tripp, "The Contact of Two Nominally Flat Rough Surface," *Proc. Instn. Mech. Engrs.* Vol. 185, pp 625-633, 1971
5. B. Bhushan, "Contact mechanics of Rough Surfaces in Tribology : multiple asperity contact," *Tribology Letters* Vol. 4 pp 1-35, 1998

6. Nadir Patir, "A Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surface," *Wear*, Vol 47, pp 263-277, 1978
7. Y. Hu, H. S. Cheng, T. Arai, Y. Kobayashi, and S. Aoyama, "Numerical Simulation of Piston Ring in Mixed Lubrication-A Nonaxisymmetrical Analysis," *ASME, J. of Tribology*, Vol. 116, 1994
8. Onions, R. A. and Achard, J. F. "The Contact Surfaces Having a Random Surface Structure," *J. of Phys. D. Appl. Phys.* Vol. 6, pp. 289-304, 1973

Appendix

1. pressure flow factor

$\phi_x = 1 - Ce^{-\gamma h}$ for $\gamma \leq 1$

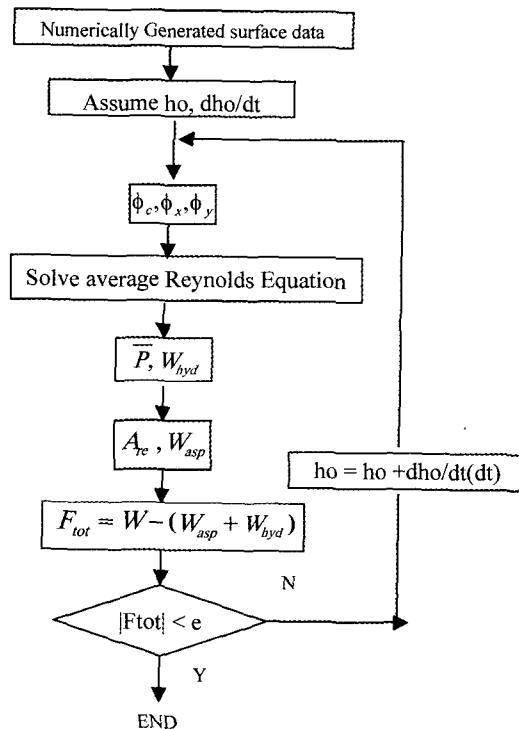
$\phi_x = 1 + CH^\gamma$ for $\gamma > 1$

2. shear flow factor

$\phi_s = V_{r1} \Phi_{s1}(h_o/R_q, \gamma) - V_{r2} \Phi_{s2}(h_o/R_q, \gamma)$

$V_{r1} = \left(\frac{R_{q1}}{R_q}\right)^2, V_{r2} = \left(\frac{R_{q2}}{R_q}\right)^2 = 1 - V_{r1}$

3. Flow Chart for numerical calculation



A.Fig. 1. Flow Chart for numerical calculation