

Kurtosis 변화에 따른 Pressure Flow Factor에 관한 연구

강민호 · 김태완 · 구영필* · 조용주**

부산대학교 대학원 정밀기계공학과

*부산대학교 기계기술연구소

**부산대학교 기계공학부

Effects of Kurtosis on the Pressure Flow Factor

Min-Ho Kang, Tae-Wan Kim, Young-Pil Koo* and Yong-Joo Cho**

Graduate School, Pusan National University

*Research Institute of Mechanical Technology, Pusan National University

**School of Mechanical Engineering, Pusan National University

Abstract – The roughness effects are very important due to the presence of interacting asperities in partial lubrication regime. An average Reynolds equation using flow factors is very useful to determine the effects of surface roughness on mixed lubrication. In this paper, the pressure flow factors for surfaces having Gaussian and non-Gaussian distribution of roughness height are evaluated in terms of various kurtosis. The effect of kurtosis on pressure flow factors is investigated using random rough surface generated numerically. The pressure flow factor increases with increasing kurtosis in mixed lubrication regime ($h/\sigma < 3$). As h/σ increases, the pressure flow factors approach to 1 asymptotically regardless of kurtosis.

Key words – flow factor, mixed lubrication, kurtosis, non-Gaussian distribution.

1. 서 론

윤활 해석에 관한 대부분의 연구들은 상대 운동하는 표면들은 매끈하다는 가정 하에 수행되어 왔다. 이 가정은 두 물체를 분리하고 있는 유막 두께가 표면 거칠기 보다 상당히 클 때는 무리 없이 적용될 수 있다. 그러나, 유막 두께가 돌기 높이 크기와 비슷하게 되면 이 가정은 타당하지 않으며 거칠기 효과가 고려되어야 한다. 따라서, 혼합 윤활 영역($h/\sigma < 3$)에서는 거칠기의 상호 작용이 발생하므로 거칠기의 영향을 고려한 윤활 해석 모델이 필요하다.

표면 거칠기를 고려한 윤활 해석은 1960년대부터 꾸준히 연구되어져 왔다. 확률 개념의 소개로 윤활에서 표면 거칠기의 효과에 대한 연구는 더욱 활발히 이루어져 왔다[1]. Christensen & Tonder는 방향성을 가지는 두 거친 표면에 대해 Reynolds equation을 적용시켰고, 미끄럼과 저어닐 베어링 윤활 해석에 이식을 이용했다[2]. Patir & Cheng은 flow simulation

을 통해 일반적인 거칠기를 가지는 표면에도 적용 가능한 average Reynolds equation을 유도하였다[3,4]. Teale & Lebeck은 average flow model을 이용하여 기존의 논문과 달리 corner point method를 이용하여 flow factor를 계산하였다[5]. Lunde & Tonder는 average flow model을 이용한 해석에서 경계조건의 영향에 대한 연구를 수행하였다[6].

기존의 연구에서는 정규분포(Gaussian distribution) 특성을 나타내는 거친 표면 구조에 대한 윤활 해석이 수행되어왔지만 많은 실제 표면은 비 정규분포(non-Gaussian distribution) 특성을 가지고있다. 따라서, 비 정규분포 특성을 나타내는 표면에 대한 해석 수행이 필요하다. J. Peklenik은 비 정규분포의 특성을 나타내는 파라미터로 skewness와 kurtosis를 제시하였고[7], Patir에 의해 skewness에 따른 혼합 윤활 해석이 수행되었다[8]. 그러나, kurtosis에 대한 표면 생성과 혼합 윤활 해석은 기존의 연구에서 수행된 적이 없다. 따라서, 본 연구에서는 비 정규분포의 특성을

나타내는 파라미터중 하나인 kurtosis에 따른 pressure flow factors의 영향을 알아보고자 한다.

2. 수치적 표면 생성

2-1. Kurtosis와 표면 거칠기

기존의 표면 거칠기를 고려한 연구에서는 표면 거칠기 파라미터로 중심선 평균 거칠기(Ra)나 자승 평균 거칠기(Rq) 값을 많이 이용해왔다. 그러나, Ra나 Rq 값만으로는 표면 형상을 정확히 나타내지는 못한다. 같은 Ra나 Rq 값을 가지더라도 다른 돌기 분포를 가지는 표면 형상을 가질 수 있다. 따라서 표면 형상을 더욱 정확히 나타내기 위해서는 돌기의 분포상태를 나타내는 skewness와 kurtosis를 사용해야만 한다. kurtosis는 돌기들의 분포가 어떤 높이에서 집중이 되는지를 나타내는 것이다. 돌기들의 분포가 어떤 높이에서 집중적으로 분포되어있다면, 분포곡선은 뾰족한 모양을 나타내고 kurtosis 값은 커지게 되며, 돌기들의 분포가 넓게 분산된다면, 분포곡선모양은 평평하게 변하며 이 값은 낮아지게 된다. kurtosis의 계산에는 식(1)이 이용된다[9].

$$Ku = \frac{1}{(Rq)^4} \int_{-\infty}^{\infty} z^4 \bar{\phi} dz \quad (1)$$

Rq : 표면형상의 r.m.s 값

z : 표면 거칠기 높이

$\bar{\phi}$: 확률밀도함수

kurtosis 값이 3이 되는 경우에는 표면 형상은 정규분포를 이루고, 3보다 큰 경우는 leptokurtic, 3보다 작은 경우는 platykurtic이라 한다[9].

2-2. 표면 생성 절차

표면 거칠기가 윤활 해석에 고려되어지기 위해서는 우선 거칠기를 갖는 표면 데이터를 얻어야한다. 표면 데이터를 구하는 방법은 측정장비를 이용하는 방법과 수치적으로 표면을 생성하는 방법이 있다. 측정에 의한 방법은 정도가 높은 측정장비를 요구하고 표면의 구조를 알기 위해서는 단면을 수많은 측정하여 재배열해야하는 어려움이 따르고 있다. 그러나, 수치적 방법은 측정장비가 필요하지 않으며, 거칠기 높이의 상관관계, 거칠기 높이의 분포를 원하는 형태로 쉽게 부여할 수 있어서 거칠기의 특성을 나타

내는 각 파라미터의 영향을 분리하여 파악할 수 있다는 장점이 있다.

따라서, 본 연구에서는 임의의 kurtosis 값을 표면에 부여하기 위하여 수치적으로 생성된 표면을 사용하였다.

표면 구조의 통계적 물성치는 확률밀도함수(probability density function)와 자기상관함수(autocorrelation function)로부터 특정 지워진다. 즉, 어떤 고려해야할 통계적 물성치를 갖는 면을 생성하는 편리한 방법은 미리 정해진 확률밀도함수와 자기상관함수를 갖는 면을 생성하는 것이다. 면의 자기상관함수는 식(2)와 같이 정의된다.

$$R(\lambda_x, \lambda_y) = E\{z(x,y)z(x+\lambda_x, y+\lambda_y)\} \quad (2)$$

E : expectancy operator

λ_x, λ_y : x, y 방향으로의 delay length

표면 거칠기의 계수형태를 고려해야 하므로 index notation을 사용하는 것이 편리하다. 즉, z_{ij} 가 $x=i\Delta_x, y=j\Delta_y$ 에서의 거칠기 높이를 나타낸다면 R_{pq} 는 다음과 같이 정의 된다.

$$R_{pq} = R(p\Delta_x, q\Delta_y) = E(z_{ij}, z_{i+p, j+q}) \quad (3)$$

Δ_x, Δ_y : sampling interval

확률밀도함수는 거칠기 높이의 분포에 관계하여 정규분포 또는 비 정규분포로 구분할 수 있다. 식(4)에 정규분포에 대한 확률밀도함수를 나타내었으며 이 경우에 거칠기 높이의 표준편차와 평균치를 부여하여 원하는 거칠기 높이분포를 구할 수 있다.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\} \quad (4)$$

where, $\bar{\sigma}$: 표준편차

\bar{x} : 평균값

식(5)는 비정규 분포에 대한 확률밀도함수이며 가중치 a, b를 변경하여 원하는 거칠기 높이 분포를 구한다. 즉, $a < b$ 가 되도록 a, b를 취하면 거칠기 높이는 골짜기로 편중되고 $a > b$ 인 경우에는 높은 값들이 많아진다(Sk). $a = b < 3$ 이거나 $a = b > 3$ 인 경우에는 symmetric 하지만 거칠기 높이가 비 정규분포 형태를 가진다(Ku).

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a,b)} x^{(a-1)} \cdot (1-x)^{(b-1)} \quad (5)$$

where, $\beta(a, b)$: Beta function
 a, b : 가중치

Random matrix에 대한 linear transformation을 이용하여 주어진 확률밀도함수와 $n \times m$ autocorrelation matrix $[R_{pq}]$ 에 대한 거칠기 높이 $[z_{ij}]$ 의 $N \times M$ matrix를 생성할 수 있다. random number generator를 이용하여 $(N \times n) \times (M \times m)$ matrix $[\eta_{ij}]$ 를 생성한 다음 linear transformation을 통하여 거칠기 높이가 구해진다[10,11]. Table 1은 표면 거칠기의 수치적 생성과정을 나타내었다.

3. Average Flow Model

3-1. Average Reynolds Equation

등온, 비 압축성 가정 하에 표면 거칠기를 고려한 윤활 해석에서 국부 압력(local pressure)을 구하기 위해서는 식(6)의 Reynolds equation을 이용한다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial h_T}{\partial x} + \frac{\partial h_T}{\partial t} \quad (6)$$

여기서, h_T 와 p 는 랜덤한 값이므로, 평균 압력(average pressure)을 구하기 위해 다음과 같이 average Reynolds equation이 유도되어진다[3].

Fig. 1에서 검사체적(Control volume) $\Delta x, \Delta y$ 은 베어링

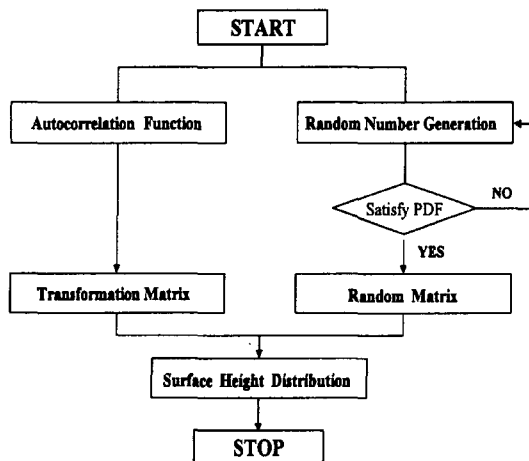


Table 1. Flow chart of generation of random rough surface.

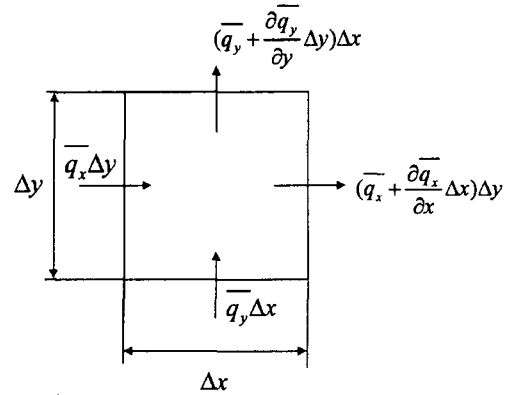


Fig. 1. Control volume for average flow.

크기보다는 작지만 많은 돌기를 포함한다고 가정한다. x 와 y 방향의 평균단위유량 \bar{q}_x 와 \bar{q}_y 는 식(8)과 같다.

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_1 + U_2}{2} h_T \\ q_y &= -\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

q_x, q_y 는 local flows.

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} q_x dy \\ &= \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \left(-\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{U_1 + U_2}{2} h_T \right) dy \\ \bar{q}_y &= \frac{1}{\Delta y} \int_x^{x+\Delta x} q_y dx \\ &= \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \left(-\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dx \end{aligned} \quad (8)$$

Patir & Cheng은 pressure flow factor ϕ_x, ϕ_y 와 shear flow factor ϕ_s 를 이용하여 평균단위유량을 식(9)와 같이 유도하였다[3].

$$\begin{aligned} \bar{q}_x &= -\phi_x \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \left(\frac{U_1 + U_2}{2} \right) \bar{h}_T + \frac{U_1 - U_2}{2} \sigma \phi_s \\ \bar{q}_y &= -\phi_y \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

검사체적에 대하여 질량보존의 법칙을 적용하면 식(10),(11)과 같이 표현된다.

$$\left(\bar{q}_x + \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y - \bar{q}_x \Delta y + \left(\bar{q}_y + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x$$

$$-\bar{q}_y \Delta x = -\Delta x \Delta y \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial t} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} = \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial t} \quad (11)$$

식(9)를 식(11)에 대입하면 average Reynolds equation 식(12)를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_x \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi_y \frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{U_1 + U_2}{2} \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial x} \\ + \frac{U_1 - U_2}{2} \sigma \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_T}{\partial t} & \quad (12) \end{aligned}$$

3-2. Flow factor 계산

Fig. 2에 표시된 국부 유막 두께 h_T 는 식(13)과 같이 거친 두 표면사이의 공칭유막두께 h 와 표면 거칠기 δ_1 및 δ_2 의 합으로 정의된다.

$$h_T = h + \delta_1 + \delta_2 \quad (h = \text{constant}) \quad (13)$$

순수 구름인 경우에 $U_1 = U_2 = \bar{U}$ 이므로 식(6)은 식(14)와 같이된다

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \bar{U} \frac{\partial h_T}{\partial x} + \frac{\partial h_T}{\partial t} \quad (14)$$

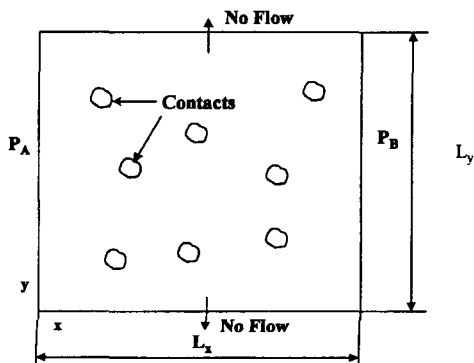
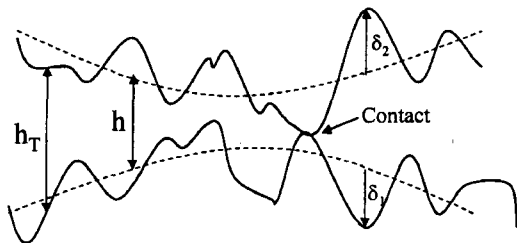


Fig. 2. The model problem for simulation.

식(13)에서 δ_1 과 δ_2 는 각 표면에서의 위치함수이지만 표면들의 이동에 의하여 δ_1 과 δ_2 는 식(15),(16)과 같이 시간의 종속함수로 표현될 수 있다.

$$\delta_i = \delta_i(x - \bar{U}t, y), \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \delta_i}{\partial t} = \bar{U} \frac{\partial \delta_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2 \quad (16)$$

따라서, 식(14)의 우변은 영(0)이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0 \quad (17)$$

시물레이션을 위한 모델 문제는 Fig. 2에 나타나 있고 이것을 풀기 위한 경계조건은 다음과 같다[8].

- 1) $p = p_A$ at $x = 0$
- 2) $p = p_B$ at $x = L_x$
- 3) $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ at $y = 0, y = L_y$
- 4) No flow at contact points

식(17)을 무차원화하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(H_T^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right) + \left(\frac{L_x}{L_y} \right)^2 \frac{\partial}{\partial Y} \left(H_T^3 \frac{\partial P}{\partial Y} \right) = 0$$

$$\text{where, } P = \frac{p - p_B}{p_A - p_B}, H_T = \frac{h_T}{\sigma}, X = \frac{x}{L_x}, Y = \frac{y}{L_y} \quad (18)$$

주어진 경계조건을 적용하고, 유한 차분법을 이용하여 식(18)을 수치적으로 풀면 압력을 구할 수 있다[8]. 경계조건 적용 시 접촉 경계조건은 표면이 rigid하기 때문에 접촉 포인트의 노드 값이 음이 될 때는 미소 ϵ 으로 둔다.

x 방향의 평균 단위 유량 \bar{q}_x 는 식(8)에서 구해지고, pressure flow factor ϕ_x 는 식(8)과 식(9)를 이용하면 다음과 같다.

$$\phi_x = \frac{\frac{1}{L_y} \int_0^{L_y} \left(\frac{h_T^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) dy}{\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}} \quad (19)$$

$$\text{where, } \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \frac{p_B - p_A}{L_x}$$

ϕ_x 도 ϕ_y 를 구하는 과정과 동일한 방법에 의해서 구할 수 있다.

4. 해석결과 및 고찰

Kurtosis 값의 변화에 따른 pressure flow factor를 구하기 위하여 먼저 주어진 kurtosis 값을 갖는 거친 표면을 수치적으로 생성하였다. Kurtosis(Ku)의 값은 2, 3 및 4를 각각 부여하였고, 거칠기 패턴의 방향성에 의한 영향을 배제하기 위하여 등방성 표면을 생성하였다.

Fig. 3에 본 연구에서 생성된 표면을 나타내었다. Fig. 3(a)는 $Ku=2.0$ 인 경우로서 돌기들의 높이가 정규분포보다 낮고, 곡률 반경이 큰 비 정규분포의 거친 표면이다. Fig. 3(b)는 $Ku=3.0$ 으로서 정규분포의

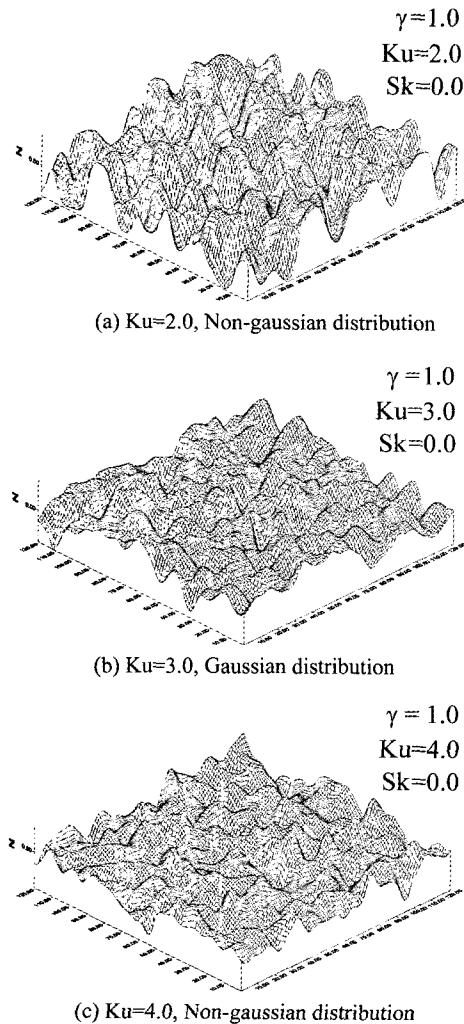


Fig. 3. 3-Dimensional rough surface generated numerically.

경향을 가지는 표면이다. Fig. 3(c)는 $Ku=4.0$ 인 경우로서 정규분포에 비하여 상대적으로 돌기들의 높이는 높고, 뾰족한 경향을 가지는 비 정규분포의 거친 표면이다. Fig. 3의 3차원 거친 표면들은 kurtosis 이외의 다른 파라미터 Ra , Rq 및 Sk 등에 대해서는 동일한 값을 가진다.

Fig. 4는 동일한 값의 Ra , Rq , Sk , Ku 파라미터를 갖지만 다른 표면 구조를 가지는 여러 표면에 대한 pressure flow factor이다. h/σ 가 작아짐에 따라 돌기 영향에 의해 ϕ_x 가 평균값을 기준으로 분산되어 있고, h/σ 가 증가함에 따라 돌기의 영향이 줄어들면서 ϕ_x 는 평균값을 기준으로 집중되어 있다. 이는 pressure flow factor가 혼합 유편 영역에서 h/σ 의 변화에 아주 민감하게 변함을 보여준다. h/σ 가 증가함에 따라 ϕ_x 는 1에 점근적으로 가까워지는데 이는 표면 거칠

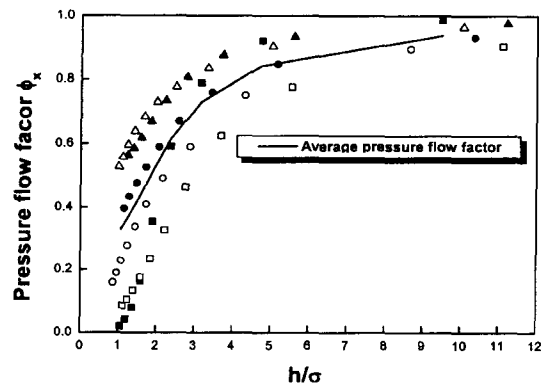


Fig. 4. Scatter in pressure flow factors obtained from different but statistically identical rough surfaces (\blacktriangle , \triangle , \blacksquare , \square , \bullet , \circ : types of rough surfaces [$Ku=3.0$, $Sk=0.0$, $\gamma=1.0$]).

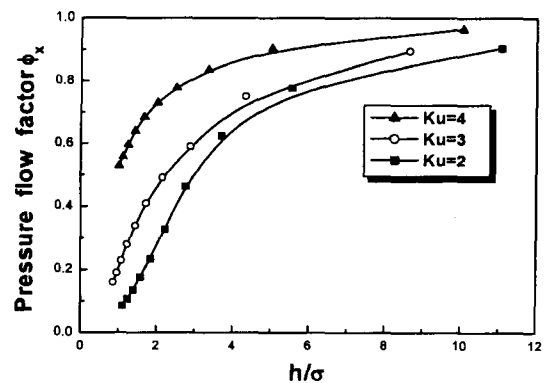


Fig. 5. Pressure flow factor for Gaussian & non-Gaussian surfaces.

기의 영향이 감소함을 나타낸다.

Fig. 3의 각각의 표면에 대하여 h/σ 와 Ku 의 변화에 따른 pressure flow factor를 수치해석으로 구한 결과를 Fig. 5에 도시하였다. h/σ 가 증가함에 따라 모든 Ku 값에 대해서 ϕ_s 는 점근적으로 1에 가까워짐을 알 수 있다. 이것은 유막 두께가 증가하면 거칠기의 영향은 감소하며 매끈한 표면의 윤활 특성과 유사해지는 것을 의미한다. $h/\sigma < 3$ 인 경우에 돌기들이 접촉을 하는 혼합 윤활 영역이 된다. 이때 ϕ_s 는 아주 민감하게 변화하는 것을 볼 수 있다. $Ku = 2.0$ 인 경우는 돌기들의 곡률 반경이 크기 때문에 접촉면적이 상대적으로 크다. 따라서, 접촉점에서 no flow 경계 조건에 의해 ϕ_s 가 혼합 윤활 영역에서 정규분포인 $Ku = 3.0$ 인 경우보다 작게 나타나고, $Ku = 4.0$ 인 경우는 돌기들이 뾰족하기 때문에 접촉면적이 상대적으로 작다. 따라서, 접촉점 경계조건에 의해서 ϕ_s 가 $Ku = 3.0$ 인 경우보다 크게 나타남을 알 수 있다. 혼합 윤활 영역에서 정규분포($Ku = 3.0$)인 표면과 비교하였을 때 $Ku = 4.0$ 일 때 보다 $Ku = 2.0$ 인 표면이 pressure flow factor 변화율이 높게 나타난다.

5. 결 론

본 연구에서는 kurtosis 변화에 따른 pressure flow factor의 추이를 살펴보았다. 실제 표면에 가까운 표면 거칠기의 영향을 평가하기 위하여 정규 분포뿐만 아니라 비 정규분포 경향을 가지는 표면을 수치적으로 생성하여 pressure flow factor 계산에 이용하였다. 본 연구의 결론은 다음과 같다.

1. 돌기 접촉이 발생하는 혼합 윤활 영역($h/\sigma < 3$)에서는 kurtosis가 커짐에 따라서 pressure flow factor가 크게 나타나는 경향을 보이고 있다.
2. 혼합 윤활 영역에서 정규분포($Ku = 3.0$)인 표면과 비교하였을 때 $Ku = 4.0$ 일 때 보다 $Ku = 2.0$ 인 표면이 pressure flow factor 변화율이 높게 나타난다.
3. Pressure flow factor는 h/σ 가 증가함에 따라 거칠기 영향이 감소하여 점근적으로 1에 가까워지고, 돌기 접촉이 발생하는 $h/\sigma < 3$ 인 혼합 윤활 영역에서는 아주 민감하게 변화한다.

기호설명

E : Expectancy operator

h	: Nominal film thickness(compliance)
h_r	: Local film thickness
\bar{h}_r	: Average gap
ku	: Kurtosis
p	: Hydrodynamic pressure
\bar{p}	: Mean hydrodynamic pressure
q_x, q_y	: Unit oil flow in x and y direction
\bar{q}_x, \bar{q}_y	: Mean unit flows
Sk	: Skewness
U_1, U_2	: Velocity(x direction) of surfaces
δ_1, δ_2	: Roughness amplitudes of surfaces measured from their mean levels
γ	: $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$ surface pattern parameter
λ	: Delay length
σ	: Standard deviations of combined roughness
ϕ_s, ϕ	: Pressure flow factors
ϕ_s	: Shear flow factor

참고문헌

1. Tzeng, S.T., and Saibel "Surface Roughness Effect on Slider Bearing Lubrication," ASLE, Trans, Vol 10, pp. 334, 1967.
2. H. Christensen and K. Tonder "The Hydrodynamic Lubrication of Rough Journal Bearings," ASME, J. Lubri. Tech, pp. 166-172, April 1973.
3. Patir, N. and Cheng, H. S. "An average Flow Model for Determining Effects of Three-Dimensional Roughness on Partial hydrodynamic Lubrication," ASME, J. Lubri. Tech. Vol 100, pp. 12-17, 1978.
4. Patir, N. and Cheng, H. S. "Application of Average Flow Model to Lubrication Between Rough Sliding Surfaces," ASME, J. Lubri. Tech. Vol 101, pp. 220-230, 1979.
5. J. L. Teal and A.O. Lebeck "An Evaluation of the Average Flow Model[1] for Surface Roughness Effects in Lubrication," ASME, Journal of Tribology, Vol 102, pp. 360-367, 1980.
6. L. Lunde and K. Tonder "Pressure and Shear Flow in a Rough Hydrodynamic Bearing, Flow Factor Calculation," ASME, Journal of Tribology, Vol 119, pp. 549-555, 1997.
7. J. Peklenik "New Development in Surface Characterization and Measurements by Means of Random Process Analysis," Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 182, pp. 108-115, 1968.
8. Patir, N., "Effects of Surface Roughness on Partial

- Film Lubrication Using an Average Flow Model Based on Numerical Simulation," PhD thesis, Northwestern University, Evanston, Ill., 1978.
9. Hamrock, B. J. "Fundamentals of Fluid Film Lubrication," McGRAW-HILL, 1994.
 10. Nayak, P. R., 1971, "Random Pressure Model of Rough Surfaces," ASME Journal of Lubrication Technology, Vol. 93, pp.398-407.
 11. Patir, N., 1978, "A Numerical Procedure for Random Generation of Rough Surfaces," Wear, Vol. 47, pp.263-277.