

트레이드 오프를 이용한 Chebyshev 함수의 극점-Q 감소에 관한 연구

A Study on the Pole-Q Reduction of Chebyshev Function Using Trade-off

윤 창 훈*, 최 석 우**

(Chang-Hun Yun*, Seok-Woo Choi**)

요 약

필터 설계에서 통과대역 파상 α_p 와 저지대역이 시작하는 주파수 ω_s 에서의 저지대역 감쇠 α_s 가 주어질 때 필터 함수의 차수는 정수이기 때문에 저지대역 감쇠가 설계명세보다 $\Delta\alpha_s$ 만큼 커진다. 본 논문에서는 트레이드 오프를 이용하여 초과된 저지대역 감쇠 $\Delta\alpha_s$ 를 제거함으로써 극점-Q를 감소시키는 방법을 제안하고 필터 특성을 개선하였다. 또한 trade-off를 이용한 극점-Q 감소법을 변형된 Chebyshev 함수에도 적용하여 4가지 형태의 함수를 주파수 영역 및 시간 영역에서 특성을 비교 해석하였다. 트레이드 오프를 이용한 극점-Q 감소법은 필터의 특성에 직접적인 영향을 주는 극점-Q 값을 차수의 증가 없이도 최대 49.6%까지 감소하였다. 이로 인하여 트레이드 오프 이전의 Chebyshev 필터 함수에 비해 주파수 영역의 위상, 지연 특성 등이 개선되었고, 시간영역의 단위제단응답 특성에서 지연시간, 정착 시간이 감소하였다.

핵심용어: 트레이드 오프, 극점-Q, Chebyshev 함수, 필터특성

투고분야: 음향신호처리 분야(1.3)

ABSTRACT

When passband ripple α_p and stopband attenuation α_s at the ω_s where the stopband begins are specified in filter design, α_s usually exceeds the specification by $\Delta\alpha_s$ due to the necessity that the order n of the filter function be an integer. In this paper, we apply a trade-off method to remove the excess stopband attenuation $\Delta\alpha_s$ for reducing the value of pole-Q and improving the characteristics of the Chebyshev filter function. We also apply the trade-off method of pole-Q reduction to the modified Chebyshev function, and then the 4 types of function have been analyzed to compare in frequency and time domain characteristics. The trade-off method reduces the pole-Q which influences the filter characteristics to maximum 49.6% without increase of the order n . Thus implies that they have the improved characteristics such as the reduced passband ripple and flatter delay characteristics as compared Chebyshev filter function before trade-off. And the unit step response shows shorter delay time and settling time in time domain performance.

Key words: Trade-off, Pole-Q, Chebyshev function, Filter characteristics

1. 서 론

필터의 특성을 결정하는 요소 중에서 극점-Q는 필터의 진폭, 위상, 지연 및 감도 특성 등에 직접적인 영향을 미친다. 필터 설계시 극점-Q가 증가하면 진폭 특성은 곡선의 정점(peak)이 높아지고, 위상 특성의 비선형성이 강해진다^{1,2}.

특히 고차 필터 함수를 1차 함수와 2차 함수로 분해하여 각 블럭별로 회로를 설계하여 연결하는 중속연결법

(cascade connection)은 필터 함수의 극점-Q가 클수록 정확성이 높은 회로를 구현하기 어렵고, 정밀한 소자를 사용해야 한다. 즉 극점-Q가 낮은 회로는 덜 정밀한 소자로도 높은 신뢰도를 갖는 회로 실현이 가능하다는 것을 의미한다^{3,4}.

따라서 기존의 필터 함수의 극점-Q를 낮게하여 필터의 특성을 개선하면서 회로 실현이 용이하도록 하는 연구가 많이 발표되었으나, 기존에 제시된 방법들은 극점-Q를 낮추기 위해서는 차수를 증가시킨다는 단점을 갖는다^{5,6}.

필터 설계명세에서 통과대역 파상(passband ripple) α_p , 저지대역이 시작하는 주파수 ω_s 에서의 저지대역 감쇠

* 우석대학교 이공대학 정보통신컴퓨터공학부

** 전북대학교 부속 전기전자회로합성연구소

접수일자: 2000년 1월 31일

(stopband attenuation) α_s 등이 주어지면 먼저 차수를 계산한 후 회로망 함수를 찾아낸다. 이때 일반적으로 차수는 소수점을 갖는 값으로 계산되어 지는데, 실제 회로로 실현하기 위해서는 계산된 차수 값보다 큰 정수값을 취하게 된다. 이 과정에서 설계명세로부터 주어진 α_s 보다 감쇠가 커져 $\Delta\alpha_s$ 만큼의 여유를 갖게 된다. 따라서 $\Delta\alpha_s$ 를 trade-off 하여 α_s 를 원래의 설계명세를 만족하는 값으로 낮추면 α_p 가 감소하는 새로운 필터 함수를 얻게 된다. 따라서 trade-off된 새로운 필터 함수들은 극점, 영점 등이 이동하고, 극점-Q가 변화한다.

본 논문에서는 주어진 설계명세를 만족하면서 Chebyshev 필터 함수의 극점-Q 값을 작게 하는 방법을 제안한다. 또한 극점-Q의 감소가 Chebyshev 필터 함수의 특성에 미치는 영향을 주파수 영역과 시간 영역에서 해석한다.

II. Chebyshev 필터 함수의 극점-Q 감소

2.1. Chebyshev 필터 함수를 이용한 극점-Q 감소

Chebyshev 필터 함수는 동일한 설계명세하에서 Butterworth 필터 함수보다 낮은 차수로 실현할 수 있지만, 통과대역에서의 등파상(equiripple) 특성으로 지연, 위상 특성이 바람직하지 않다. 통과대역의 크기를 1로 표준화할 때의 Chebyshev 필터 함수의 진폭특성은 식 (1)과 같다^[1].

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\omega)}} \quad (1)$$

이때 ϵ 은 통과역에서의 파상의 넓이를 결정하는 변수이고, $C_n(\omega)$ 는 Chebyshev 다항식이다.

표 1. 설계명세
Table 1. Design specification.

통과대역 파상 α_p	3 [dB]
저지대역 감쇠 α_s	20 [dB] 이상
저지 주파수 ω_s	1.5 [rad/sec]

먼저 표 1을 만족하는 Chebyshev 필터 함수의 차수를 식 (2)로 계산하면 $n=3.11$ 이지만, 실제 설계시의 차수는 정수가 되어야 하므로 $n=4$ 가 된다.

$$n = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{0.1\alpha_p} - 1)(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-1}}}{\cosh^{-1}\omega_s} \quad (2)$$

표 1을 만족하는 차수 $n=4$ 로부터 식 (3)을 이용하여 α_s 를 다시 계산하면 27.41 [dB]가 되어 $\Delta\alpha_s=7.41$ [dB]만큼 더 큰 감쇠를 초래한다.

$$\alpha_s = 10 \log[(10^{0.1\alpha_p} - 1) \cdot \cosh^2(n \cosh^{-1}\omega_s) + 1] \quad (3)$$

따라서 저지대역 감쇠를 설계명세에 만족하도록 $\Delta\alpha_s$ 만큼의 손실을 trade-off하여 설계명세의 $\alpha_s=20$ [dB]로 하면 통과대역 파상 α_p 가 3 [dB]에서 0.72 [dB]로 감소하여 통과대역 특성을 개선할 수 있다. 식 (4a)는 trade-off전의 Chebyshev 함수이고, 식 (4b)는 trade-off를 수행한 후의 함수이다.

$$H(s) = \frac{K}{s^4 + 0.581580s^3 + 1.169118s^2 + 0.404768s + 0.176987} \quad (4a)$$

$$H_s(s) = \frac{K}{s^4 + 1.067673s^3 + 1.569963s^2 + 0.868429s + 0.319807} \quad (4b)$$

2.2. 변형된 Chebyshev 필터 함수를 이용한 극점-Q 감소

기존의 Chebyshev 함수는 통과대역에서의 등파상 특성 때문에 감도 특성이 우수한 수동 복중단 제자형 회로로 실현하는 경우, 우수 차수인 경우 최대 전력전송이 불가능하다. 그러나 식 (5)의 변형된 Chebyshev 함수는 분모항에 ω^2 항이 존재하여 통과대역에서 $\omega=0$ 로 파상이 점진적으로 감소하기 때문에 우수 차수에서도 최대 전력전송이 가능하다^[8].

$$|H_m(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 \omega^2 C_{n-1}^2(\omega)}} \quad (5)$$

표 1의 설계명세를 만족하는 변형된 Chebyshev 함수의 차수를 식 (6)으로 계산하면 $n=3.68$ 로 Chebyshev 함수와 같이 실제 설계시의 차수는 $n=4$ 가 된다.

$$n = \frac{\cosh^{-1}\sqrt{(10^{0.1\alpha_p} - 1)(10^{0.1\alpha_s} - 1)^{-1}}}{\cosh^{-1}\omega_s} + 1 \quad (6)$$

식 (6)으로부터 α_s 를 다시 계산하면 22.29 [dB]가 되어 $\Delta\alpha_s=2.29$ [dB]가 발생한다. 따라서 $\Delta\alpha_s$ 만큼의 손실을 trade-off하면 통과대역 파상 α_p 가 3 [dB]에서 2 [dB]로 감소한다. 식 (7a)는 trade-off전의 변형된 Chebyshev 함수이고, 식 (7b)는 trade-off를 수행한 후의 함수이다.

$$H_m(s) = \frac{K}{s^4 + 1.155112s^3 + 1.417141s^2 + 0.842766s + 0.250594} \quad (7a)$$

$$H_m(s) = \frac{K}{s^4 + 1.318523s^3 + 1.619252s^2 + 1.028900s + 0.326890} \quad (7b)$$

2.3. 극점 및 극점-Q

식 (4)와 식 (7)을 식 (8)과 같이 2차 함수로 분해하고,

2차 함수의 i 번째의 극점 $p_i = \sigma_i + j\omega_i$ 를 s -평면에 표시하면 그림 1과 같다.

$$H(s) = \frac{K}{(s-p_i)(s-\bar{p}_i)} = \frac{K}{(s+\sigma_i-j\omega_i)(s+\sigma_i+j\omega_i)}$$

$$= \frac{K}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \quad (8)$$

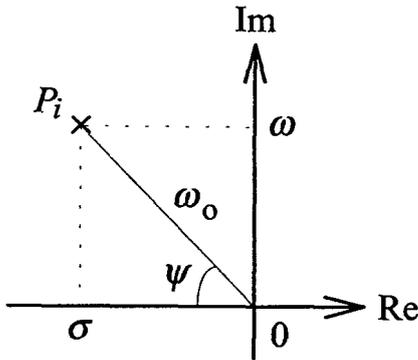


그림 1. s -평면상의 극점
Fig. 1. Pole on s -domain.

그림 1에서 필터 특성에 영향을 주는 극점-Q는 식 (9), 각도 ψ 는 식 (10)으로 정의된다⁶⁾. 이때 극점-Q가 감소하면 필터의 주파수, 시간 영역 특성이 개선되는데 기존에 제시된 극점-Q 감소 방법들은 차수가 증가한다는 단점을 갖는다^{6,7)}.

$$Q = \frac{\omega_0}{2\sigma} \quad (9)$$

$$\psi = \cos^{-1}\left(\frac{\sigma}{\omega_0}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2Q}\right) \quad (10)$$

표 2에서는 α_p , α_s 와 함수의 극점 및 극점-Q를 비교하였다. 표에서 기존의 Chebyshev 함수는 Type 1, trade-off 후의 Chebyshev 함수는 Type 2, 변형된 Chebyshev 함수는 Type 3, trade-off 후의 변형된 Chebyshev 함수는 Type 4로 표시하였다.

표 2. 극점, 영점 및 극점-Q 비교
Table 2. Comparison of poles, zeroes, and pole-Q.

	Type 1	Type 2	Type 3	Type 4
α_p	3 [dB]	0.72 [dB]	3 [dB]	2 [dB]
α_s	27.41 [dB]	20 [dB]	22.29 [dB]	20 [dB]
p_i, \bar{p}_i	- 0.085170 $\pm j0.946484$ - 0.205620 $\pm j0.392047$	- 0.156357 $\pm j0.998020$ - 0.377479 $\pm j0.413393$	- 0.146128 $\pm j0.926792$ - 0.431428 $\pm j0.313911$	- 0.172606 $\pm j0.950279$ - 0.486656 $\pm j0.337042$
Q	5.58 1.08	3.23 0.74	3.21 0.62	2.81 0.61

4가지 함수의 극점을 s -평면에 표시하면 그림 2의 극점 궤적도와 같이 Type 2~Type 4의 극점들이 허축으로부터 음(negative)의 실수축으로 이동한다. 따라서 기존에 제시된 극점-Q 감소법과는 달리 차수의 증가 없이도 극점-Q가 각각 31.5%~49.6%까지 감소하였다.

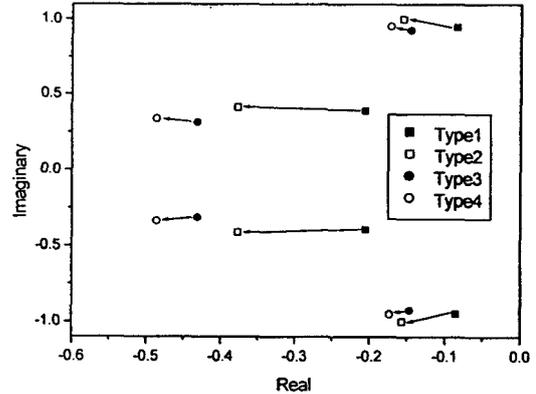


그림 2. 극점 궤적도
Fig. 2. Pole loci.

이러한 극점-Q의 감소는 필터의 진폭 특성 및 위상 특성을 개선할 수 있다. 또한 종속연결법으로 실현한 고차 능동 필터의 동작 특성을 평가하는 중요한 측정치중의 하나인 극점-Q 감도는 식 (11)로 정의된다. 2차 함수를 종속 연결할 때, 함수가 낮은 극점-Q 감도를 갖는다면 소자값 변화에 따른 능동 필터 특성의 변화폭은 감소하게 된다^{9,10)}.

$$S_x^Q = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \frac{x}{Q} = kQ. \quad (11)$$

따라서 변형된 함수는 극점-Q의 감소로 기존 함수보다 극점-Q 감도가 감소하게 되므로 종속연결법을 이용하여 능동 RC 필터, 스위치드 캐패시터 필터등을 설계하면 소자값 변화에 따른 능동 필터 특성을 개선할 수 있다.

III. 주파수 영역과 시간 영역에서의 특성 해석

본 장에서는 4가지 형태의 함수를 이용하여 극점-Q 감소에 따른 주파수 영역과 시간 영역에서의 함수 특성을 비교 해석한다.

3.1. 주파수 영역 특성 해석

그림 3은 함수의 진폭 특성을 비교한 것으로 점선은 설계명세에서 제시한 값이다. Type 2는 통과대역 파상이 3 [dB] 에서 0.72 [dB]로 크게 감소함으로써 통과대역 진폭 특성이 개선되어 이상적인 특성에 접근하였다. 또한 변형된 Chebyshev 함수는 통과대역에서 기존의 함수 등파상 특성 대신 파상이 $\omega = 0$ 방향으로 점진적으로 파상이 감소한다. 따라서 기존의 Chebyshev 함수와 달리 우수 차수

에서도 함수가 항상 최대값을 갖기 때문에 수동 복종단 회로 실현시 우수 차수에서도 최대전력전송이 가능하다는 장점을 갖는다.

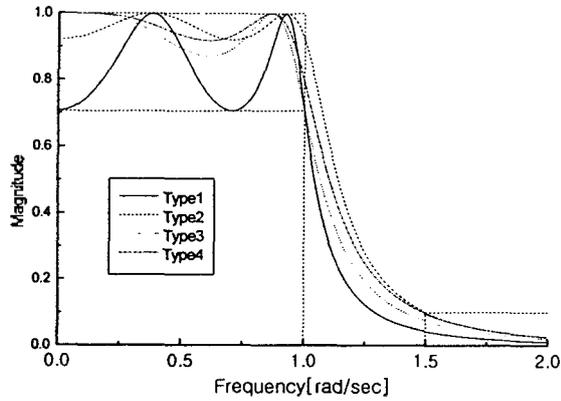


그림 3. 진폭 특성
Fig. 3. The magnitude characteristics.

그리고 trade-off 후의 함수와 변형된 함수는 극점-Q가 감소하여 그림 4와 같이 기존의 함수보다 선형에 가까운 위상 특성을 갖는다. 위상 특성에서는 Type 4의 극점-Q가 크게 감소하여 가장 선형적인 위상 특성을 갖는다.

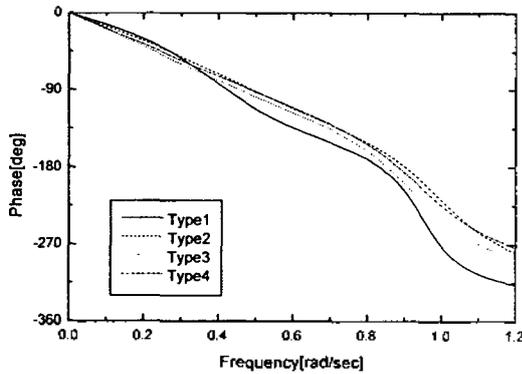


그림 4. 위상 특성
Fig. 4. The phase characteristics.

식 (12)로 정의되는 지연 특성은 위상 특성과 직접적인 관계가 있으므로 지연 특성이 개선되기 위해서는 위상 특성이 선형성을 가져야 한다.

$$T(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} \quad (12)$$

그림 4와 같이 Type 2~4는 기존의 함수보다 위상 특성이 선형적으로 개선되어 지연 곡선이 기존의 함수보다 평탄해져 그림 5와 같이 지연 특성이 개선되었다.

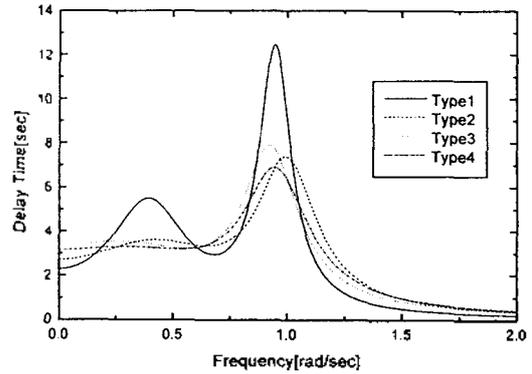


그림 5. 지연 특성
Fig. 5. The delay characteristics.

3.2. 시간영역 특성 해석

크기가 1인 단위계단 함수를 저역통과 회로의 입력단에 인가하였을 때 전극점 필터 함수의 단위계단 응답 $r(t)$ 는 식 (13)으로 나타낸다¹⁾.

$$r(t) = (t) - K_0 e^{\sigma_0 t} + A_1 e^{-\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \theta_1) \quad (13)$$

$\sigma_0 < 0, \sigma_1 < 0$

이때 σ_0 는 단일 실근 극점이고, σ_1 과 ω_1 은 복소근의 실수부와 허수부이다. 따라서 단위계단응답의 상승 시간이 줄어들고 정착 시간이 짧아지기 위해서는 σ_0, σ_1 의 음의 실수축에서 왼쪽으로 이동하여야 한다. 그림 6은 크기가 1인 단위계단 함수 입력에 대한 두 함수의 단위계단응답 특성이다.

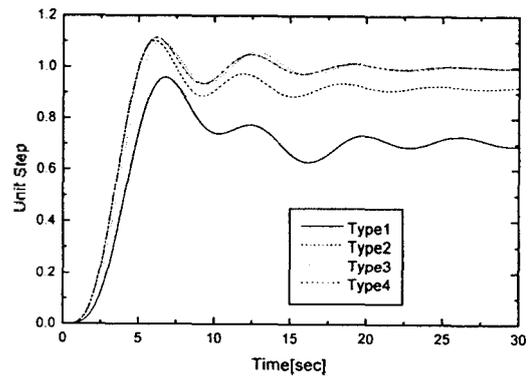


그림 6. 단위계단응답
Fig. 6. The unit step responses.

그림 6에서 지연 시간 t_d 는 응답 $r(t)$ 가 최종치의 50%가 될 때까지의 시간이고, 정착 시간 t_s 는 링킹(ringing)이 점점 감소하여 그 폭이 최종치의 $\pm 2\%$ 가 될 때까지의 시간으로 정의된다¹⁾. 일반적으로 시간 영역에서의 특성은 지연 시간과 정착 시간이 짧아야 특성이 우수하다. 표 3에서 두 함수의 지연 시간과 정착 시간을 비교하였다.

Type 2~4의 함수는 그림 2의 극점 궤적도에서와 같이 극점이 허축으로부터 음의 실수축으로 이동하여 단위계단 응답의 지연 시간과 정착 시간이 짧아졌다. 4가지 함수중 Type 4는 Type 1에 비하여 정착시간이 45.3%까지 감소하여 매우 우수한 시간영역 특성을 갖는다.

표 3. 지연 및 정착 시간 비교 : 단위 [sec]
Table 3. Comparison of delay and settling time.

	t_d	t_s
Type 1	4.09	30.15
Type 2	3.37	16.31
Type 3	3.57	17.21
Type 4	3.37	16.49

일반적으로 저역통과 필터의 경우 필터의 특성에 직접적인 영향을 주는 극점-Q가 감소하면 진폭 특성의 정점이 낮아지고, 위상은 보다 선형적인 특성을 갖는다. 따라서 필터 특성을 개선하는 방법으로 극점-Q를 감소시키는 방법들이 제시되었으나 차수가 높아진다는 단점을 갖는다. 그러나 본 연구에서 제시한 방법은 기존의 Chebyshev 함수 및 변형된 Chebyshev 함수에서 차수의 증가 없이도 극점-Q가 감소하여 주파수 특성과 시간영역 특성을 개선할 수 있다.

IV. 결 론

본 논문에서는 필터 함수의 차수 계산 과정에서 발생하는 초과된 저지대역 감쇠 $\Delta\alpha_s$ 를 제거하는 trade-off를 이용하여 기존의 Chebyshev 필터 함수와 변형된 Chebyshev 필터 함수의 극점-Q 감소 및 특성을 개선하기 위한 방법을 제안하였다.

기존의 Chebyshev 함수와 변형된 Chebyshev 함수의 저지대역 감쇠값을 설계명세와 일치하도록 감소시킴으로써 trade-off 후의 Chebyshev 함수는 통과대역에서의 파상이 3 [dB]에서 0.72 [dB]까지 감소하여 진폭 특성이 개선되었다. 또한 필터 특성과 밀접한 관계를 갖는 극점-Q 값이 trade-off 후의 변형된 Chebyshev 함수의 경우 최대 49.6%까지 감소하여 위상 특성이 보다 선형적인 특성을 갖게 되었고, 이로 인하여 지연 특성도 기존 함수에 비하여 평탄하므로 출력단의 신호 왜곡이 작아진다. 시간영역에서의 단위계단응답 특성도 trade-off 후의 변형된 Chebyshev 함수는 정착시간이 30.15초에서 16.49초로 빨라져 펄스 및 디지털 신호 전송에 사용하면 그 특성을 개선할 수 있다.

따라서 기존의 Chebyshev 필터 함수나 변형된 Chebyshev 함수로 신호처리용 필터를 설계할 때 제안된 trade-off를 이용하면 차수의 증가 없이도 극점-Q가 감소하여 주파수 영역 특성 및 시간 영역 특성을 개선시킬 수 있다.

감사의 글

이 논문은 2000년도 우석대학교 학술연구비 지원에 의해 연구되었음.

참 고 문 헌

1. D. E. Johnson, *Introduction to Filter Theory*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1976.
2. L. P. Huelsman and P. E. Allen, *Introduction to the Theory and Design of Active Filters*, McGraw-Hill : New York, 1980.
3. H. K. Kim, *Network Analysis and Synthesis : Electrical and Electronic Filter Design*, KAEE : Seoul, 1990.
4. A. S. Sedra and P. O. Brackett, *Filter Theory and design : Active and Passive*, Matrix Publishers, Inc., Forest Grove, Ore., 1978.
5. J. Gorsky-Popiel, "Reduction of network sensitivity through the use of higher order approximating functions," *Electron Lett.*, vol. 3, pp. 365-366, 1967.
6. A. Premoli, "A new class of equal-ripple filtering functions with low Q-factor: The MUCROER polynomials," *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol CAS-21, pp. 609-613, Sep. 1974.
7. R. Schaumann, M. S. Ghauri and K. R. Laker, *Design of Analog Filters*, pp. 350-399, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1990.
8. S. W. Choi, D. Y. Kim, and H. K. Kim, "A Modified Low-Pass Filter with Progressively Diminishing Ripples," *Analog Integrated Circuits and Signal Processing*, vol 6, no. 2, pp. 95-103, Sep. 1994.
9. M. E. Van Valkenburg, *Analog Filter Design*, Holt, Rinehart, and Winston, 1982.
10. C. S. Lindquist, *Active Network Design with Signal Filtering Applications*, STEWARD & SONS, CA., 1977.

▲ 윤 창 훈(Chang-Hun Yun)

한국음향학회지 제16권 8호 참조

현재: 우석대학교 이공대학 정보통신컴퓨터공학부 전임강사

▲ 최 석 우(Seok-Woo Choi)

한국음향학회지 제16권 8호 참조

현재: 전북대학교 부속 전기전자회로합성연구소 조교수