

FFT-FEM을 이용한 윤활 기구에서 표면온도에 관한 연구

조종두 · 안수익*

인하대학교 기계공학과
*인하대학교 대학원 기계공학과

Surface Temperature in Sliding Systems Using the FFT Finite Element Analysis

Chong Du Cho and Soo Ick Ahn*

Department of Mechanical Engineering, Inha University
*Graduate School, Inha University

Abstract – Finite element equations by using fast Fourier transformation were formulated for studying temperatures resulting from frictional heating in sliding systems. The equations include the effect of velocity of moving components. The program developed by using FFT-FEM that combines Fourier transform techniques and the finite element method, was applied to the sliding bearing system. Numerical prediction obtained by FFT-FEM was in an excellent agreement of experimental temperature measurements.

Key words – fast fourier transform, finite element method(FEM), surface temperature, sliding bearing.

1. 서 론

상대적으로 윤활 운동을 하는 두 물체의 접촉이 일어날 때 마찰로 인한 기계적 에너지의 손실이 발생한다. 윤활 환경에서 마찰로 인하여 발생된 에너지 손실은 모두 열의 형태로 접촉된 물체에 전달된다. 마찰열에 의한 에너지의 이동은 윤활이 일어나는 접촉물체의 온도 상승에 영향을 미치며 특히 접촉면 근처 표면에서 급격한 온도 상승을 일으킨다. 접촉 표면에서 급격한 온도는 윤활 기구에 상당한 영향을 미칠 정도로 상승할 수 있다. 마찰에 의한 고온의 윤활 표면은 접촉물체의 발화, 표면 용융, 금속 윤활 요소의 산화와 산화에 의한 마멸 및 열탄성 불안정 등에 영향을 미친다. 따라서 베어링, 시일링, 브레이크, 클러치 등 윤활 운동을 하는 기능품에서 윤활 접촉 표면의 온도를 예측하는 것은 윤활 기구의 해석 및 설계에 매우 중요하다. 표면온도의 해석을 위해서 발표된 방법에는 열원을 이용한 방법(heat source method)[1]과 수치해석적 방법이 있다. 열원을 이용한 방법에서는 표면의 한 열원에 의한 온도분포의 함수를

중첩해서 접촉면 위에 분포된 일반해를 구하는데 이용된다. 그러나 유한한 물체에 열원을 이용한 방법의 응용은 적분 변환 기법에 의하여 얻어진 적분 방정식을 해결하기가 쉽지않다[2]. 이와 같은 이유로 적분 변환 기법은 여러 가지 다른 모양의 모델에 응용되었지만 단순한 모델에 한정되었으며 복잡한 수학적 수식으로 인해 널리 쓰이지 않는다.

열원을 이용한 방법과 변환 기법을 이용할 때 일반적으로 윤활 시 발생한 마찰열을 두 부분으로 나누어 고정된 부분과 움직이는 부분을 각각 분리하여 고려한다. 대부분 표면 온도의 해석에서 마찰력과 윤활 속도의 곱과 같이 단위 시간당 발생하는 열유속은 두 물체의 접촉면 사이에서 발생하여 두 물체로 나뉘어 유입되는 열량으로 가정한다.

표면 온도 해석의 다른 한 방법으로 유한 요소 방법이 있다. 널리 알려진 유한 요소방법은 마멸 분야 등 많은 분야에 응용되었다. 그러나 표면온도 해석에서는 이 방법도 많은 제약이 있으나 디스크 브레이크에서 과도 온도 해석[3], 건식 베어링 또는 boundary lubricated bearing에서의 온도해석[4]-[5]등에 이용되었다.

이러한 연구에서 유한요소법은 실제 윤활 모델에 쉽게 이용될 수 있으며 비교적 정확한 표면온도를 예측할 수 있었다. 그러나 이러한 유한요소법을 이용한 윤활 기구의 과도 표면 온도 해석은 많은 계산 시간과 높은 컴퓨터 성능을 요구한다. 그러한 단점 때문에 베어링의 표면온도해석에서 준정적 평형상태를 가정하였다[6]. Floquet[8]등은 브레이크의 온도 분포 예측을 위하여 fast Fourier transform 개념과 유한요소 개념을 병합시킨 방법을 제시 하였다. 표면 온도 해석에 좋은 장점을 가진 일반 유한요소법의 단점을 보완하기 위하여 본 연구에서는 fast Fourier transformation을 이용하여 베어링에서의 표면온도 해석을 하였다.

이 방법은 기존 해석방법에 비해 형상의 차원이 한 차원 줄어드므로 계산 시간이 월등히 빠르며 윤활 기구에서 속도의 효과를 배제하지 않고 과도 표면 온도 해석을 수행할 수 있었다. 또한 매우 빠른 회전속도를 갖는 베어링의 표면온도의 해석에도 응용되었다.

2. 이론적 배경

2-1. 모델과 경계조건

대부분의 윤활 기구는 움직이는 부분과 고정된 부분으로 이루어져 있다. 베어링도 마찬가지로 움직이는 부분인 축과 베어링 그리고 고정된 하우징으로 구성되어 있다. Fig. 1은 이상화된 베어링의 모델이다. 축의 지름은 안지름이 10 mm이고 바깥지름이 25 mm인 중공축이고 베어링의 두께는 4.75 mm이며 하우징의 직경은 100 mm이다. 경계조건은 축 바깥면에서 대류계수는 h_1 , 하우징 단면에서 대류계수는 h_2 , 하우징 표면에서 대류계수는 h_3 이다. 축과 베어링의 접촉은 Fig. 2에서와 같이 x축을 기준으로 하여

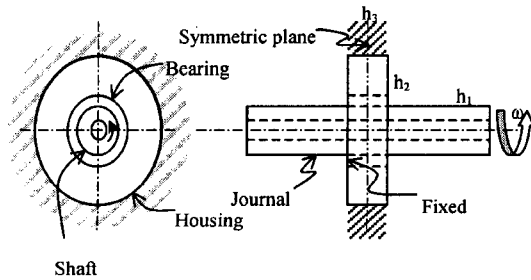


Fig. 1. Idealized bearing model.

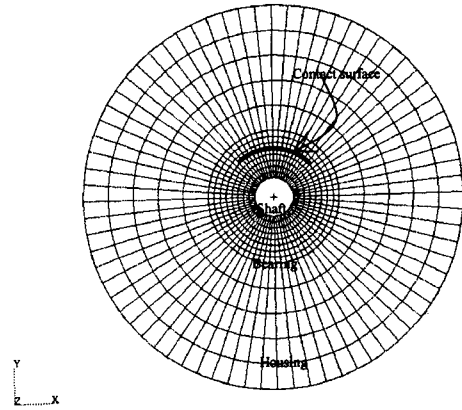


Fig. 2. Finite element mesh of the bearing model in the two dimension.

45°와 135° 사이에서 일어나며 접촉면압은 포물선 유형으로 가정하였다. 여기서 면압에 의해 접촉이 일어나는 부분을 S_1 , 대류가 일어나는 부분을 S_2 라 한다. Fig. 2는 이상화된 구름 베어링의 해석을 위해 2차원으로 구성된 유한 요소 모델이다[6].

2-2. 이론식

FFT-FEM은 N차원 모델을 θ 에 대해서 푸리에 변환을 하여 모델을 N-1차원으로 변환한 후 각 주파수에 대해 해를 구한 후 역 푸리에 변환을 하여 N차원 모델에 대한 해를 구하는 방법이다. 이 방법의 장점은 fast Fourier transform의 알고리즘 특성에 따라 곱의 계산과정이 합의 형태로 바뀌므로 계산 수행 시간이 매우 많이 감소되며 특이성 문제가 해소된다는 데에 있다.

다음 주어진 식(1)은 속도에 대한 영향이 고려된 열전도 방정식이다.

$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{Q} = \rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \cdot \nabla T \right) \quad (1)$$

여기서 \dot{Q} 는 내부 발열량이며 k 는 열전도 계수, ρ 는 밀도, C 는 비열이다.

이 연구의 모델은 내부 발열량이 없고 속도는 θ 방향만 존재하므로 식(1)을 위 가정과 원통 좌표계에 대한 방정식으로 표현하면 다음과 같은 식(2)가 된다.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \omega \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (2)$$

위 모델의 경계조건식은 다음 식 (3)과 같다.

$$k\nabla T \cdot \vec{n} = q_c(r, \theta, z, t) \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$-k\nabla T \cdot \vec{n} = h(T - T_a) \quad \text{on } S_2$$

초기조건은 다음 식(4)와 같다.

$$T(r, \theta, z, 0) = T_i(r, \theta, z, 0) \quad \text{at } t=0 \quad (4)$$

2π를 주기로 갖는 주기함수 T(x)에 대한 Fourier integral transform을 식(5)와 같이 정의한다[7].

$$\tilde{T}(f) = \int_0^{2\pi} T(x)e^{(-2j\pi fx)} dx \quad (5)$$

여기서 $f = \frac{n}{2\pi}, n \in N, j = \sqrt{-1}$ 이다. 푸리에 적분 변환을 이용하여 식(2)을 변환하면 다음과 같은 식(6)이 된다.

$$\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} - \left(\frac{\alpha^2}{r^2} + j \frac{\beta}{D} \right) \tilde{T} = \frac{1}{D} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \quad \text{on } \Gamma \quad (6)$$

식(3)인 경계조건과 식(4)의 초기조건을 푸리에 적분 변환시키면 각각 식(7)과 식(8)이 된다.

경계조건

$$k\nabla \tilde{T} \cdot \vec{n} = \tilde{q}_c(r, z, t) \quad \text{on } P_1$$

$$-k\nabla \tilde{T} \cdot \vec{n} = h(\tilde{T} - \tilde{T}_a) \quad \text{on } P_2 \quad (7)$$

초기조건

$$\tilde{T}(r, z, t) = \tilde{T}_i(r, z, t) \quad \text{at } t=0 \quad (8)$$

여기서 $\alpha = 2\pi f, \beta = 2\pi f \omega$ 로 정의하였다. 위 과정에서 공간 변수인 θ는 불연속 변수로 바뀌었으며 2차원의 모델은 Fig. 3에서와 같은 1차원 모델로 구현할 수 있고 곡선에서 정의된 경계조건은 1

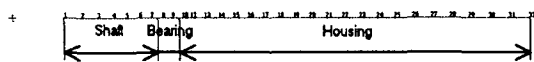


Fig. 3. Transformed one dimensional bearing model in the frequency domain.

차원 모델의 한 점에서 정의된다.

식(6)는 유한요소법을 적용하여 풀 수 있는 방정식의 형태이므로 식(6)에 가중함수 W를 곱하여 적분을 취한 후 발산이론과 경계조건을 이용하면 다음과 같은 식(9)을 얻는다.

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma} \nabla \tilde{T} \cdot \vec{\nabla} W d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial r} W d\Gamma - \alpha^2 \int_{\Gamma} \frac{\tilde{T}}{r^2} W d\Gamma \\ & - j\beta \int_{\Gamma} \frac{\tilde{T}}{D} W d\Gamma + \frac{\tilde{q}_c}{k} W|_{P_1} - \frac{h}{k} (\tilde{T} - \tilde{T}_a)|_{P_2} = \int_{\Gamma} \frac{1}{D} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} W d\Gamma \quad (9) \end{aligned}$$

여기서 $\tilde{T}, \tilde{q}_c, \tilde{T}_c, \tilde{T}_a$ 는 복소수이므로 $\tilde{T} = T^r + jT^i$ 와 같이 실수부분과 허수부분을 나누어 정리하면 다음과 같이 실수부분 식(10)과 허수부분 식(11)을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{1}{D} \frac{\partial T^r}{\partial t} W d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla T^r \cdot \vec{\nabla} W d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial T^r}{\partial r} W d\Gamma + a^2 \\ & \int_{\Gamma} \frac{T^r}{r^2} W d\Gamma - \beta \int_{\Gamma} \frac{T^i}{D} W d\Gamma - \frac{q_c^r}{k} W|_{P_1} + \frac{h}{k} (T^r - T_a^r) W|_{P_2} = 0 \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \frac{1}{D} \frac{\partial T^i}{\partial t} W d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla T^i \cdot \vec{\nabla} W d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial T^i}{\partial r} W d\Gamma + a^2 \\ & \int_{\Gamma} \frac{T^i}{r^2} W d\Gamma - \beta \int_{\Gamma} \frac{T^r}{D} W d\Gamma - \frac{q_c^i}{k} W|_{P_1} + \frac{h}{k} (T^i - T_a^i) W|_{P_2} = 0 \quad (11) \end{aligned}$$

위의 두식은 유한요소법으로 풀 수 있는 형태이며 시간 적분을 위하여 centered implicit method인 Crank-Nicolson 알고리즘을 이용하여 해석하였다.

Fig. 3는 위에서 전개된 푸리에 적분에 의해 Fig. 2의 2차원 모델을 FFT-FEM 해석을 위해 1차원 요소로 구성된 모델이다.

2-3. 열유속의 계산

축과 베어링 간의 표면압력은 열유속과 밀접한 관계가 있다. 그러므로 회전속도와 접촉압력의 관계식인 식(12)를 이용하여 열유속을 얻는다.

$$q = \mu v p = \mu r \omega p \quad (12)$$

여기서 μ는 마찰계수, ω는 각속도, P는 접촉압력을 나타낸다.

3. 결 과

Fig. 4에서 축의 회전속도가 60 rmp(6.28^{rad/s})인 경우 베어링의 접촉면에서 약 0.003 m 아래 위치에서 열전대를 이용하여 측정된 실험 결과값과 준정적으로 가정하여 시간에 관한 항을 고려하지 않고 기존의 수치해석 방법으로 2차원 모델을 해석한 Kennedy의 해석결과, 그리고 fast Fourier transformation을 이용한 본 연구의 해석결과를 유입되는 열량 변화에 따라 비교하였다. Fig. 4에서 알 수 있듯이 fast Fourier transformation을 이용하여 얻은 수치해석의 결과와 Kennedy[7]의 해석결과가 거의 일치함을 알 수 있으며 실험에 의해 측정된 결과값이 어느 정도는 이산적인 분포를 나타내지만 비교적 일치한다. 또한 주어진 속도에서 베어링의 표면 온도는 본 연구와 실험의 결과 및 Kennedy의 수치해석 결과에 따르면 마찰에 의해서 발생하는 열량에 거의 선형적인 비례 관계를 갖고 증가함을 알 수 있다. Fig. 5는 유입되는 열량이 50 watts일 때 5초 후에 축 단면에서의 온도분포를 나타낸 것이다. 마찰열에 의해 접촉 부분의 온도가 급격히 상승하는 것을 알 수 있으며 비접촉 부분도 접촉부분에서 유입되는 열량에 의해 온도가 증가하는 것을 알 수 있다. 또한 축 표면의 열이 시간이 지남에 따라 축 내부로 전달되는 것도 알 수 있다. Fig. 6은 축 표면의 온도를 각도에 따라 나타낸 것이다. 마찰에 의해 열이 발생하는 지점의 온도가 마찰이 안 일어나는 지점의 온도보다 높으며

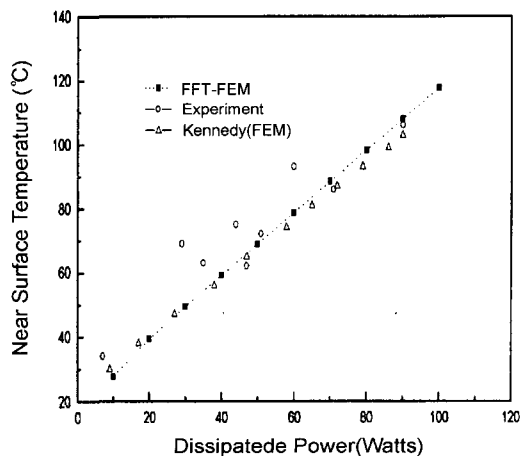


Fig. 4. Comparison between predicted results(Kennedy and FFT-FEM) and experimental values of surface temperature.

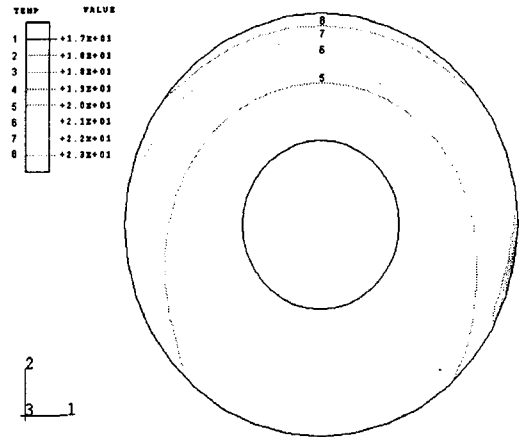


Fig. 5. Temperature distribution on the shaft surface after 5 seconds operation.

온도분포는 각속도의 영향으로 leading edge와 trailing edge가 나타나며 시간이 지날수록 leading edge와 trailing edge의 구분은 거의 없어지는 경향으로 나타나며 열적 평형상태를 유지하려 한다. Fig. 7은 유입되는 열량이 20 watts이고 속도는 60 rmp일 때 θ 가 0°인 곳과 90°인 지점에서 시간에 따른 온도 분포이다. 온도가 시간에 비례해서 증가하며 Fig. 4의 평형 상태에 이르렀을 때의 온도값으로 수렴해 감을 알 수 있다.

4. 결 론

Fast Fourier Transformation을 이용한 유한요소법이

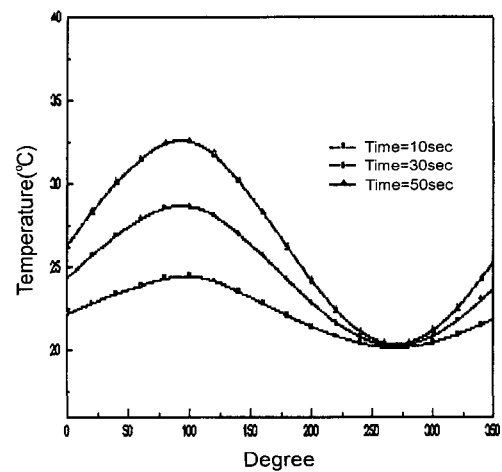


Fig. 6. Circumferential temperature distributions on the shaft surface($r = 0.0125$ m) at each times- 10,30,50sec-.

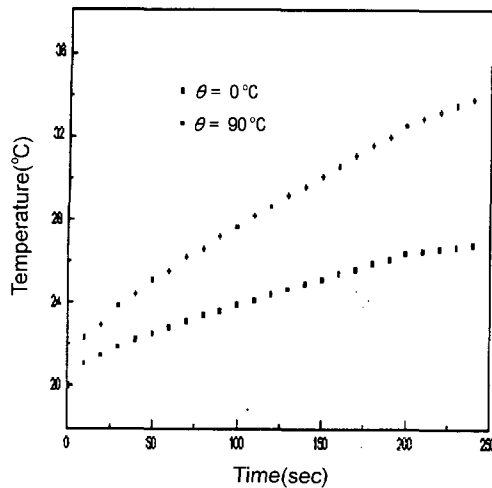


Fig. 7. Transient temperatures on both nodes - $\theta = 0^\circ$ and $\theta = 90^\circ$.

윤활기구에서 정확한 접촉표면의 온도예측과 온도분포를 구하기 위해 응용되었다. 이 방법은 속도 향에 의한 영향을 고려하였으며 빠른 속도를 갖는 윤활기구의 과도 온도 해석을 위해 많은 시간을 절약할 수 있다.

1. FFT-FEM을 이용하여 이상화된 2차원 베어링 모델을 1차원 모델로 변환하여 해석할 수 있었다.

2. 윤활 기구에서 표면온도와 온도분포에 대한 해석을 할 수 있다. 열량이 90 watts에서 Kennedy의 기존 유한요소해석에 의한 결과값과는 4.6%, 실험값과는 1.8%의 오차를 나타내었다.

3. 본 연구에 의한 해석 결과는 실험에 의한 측정값과 비교해서 거의 정확한 값을 얻을 수 있으며 다른 해석 결과에 비해 과도 온도를 구함에 있어서 많

은 시간을 절약할 수 있었다.

후 기

이 연구는 1999년도 인하대학교 연구비 지원에 의하여 수행되었음.

참 고 문 헌

1. Carslaw, H. S., and Jaeger, J. C., *Conduction of Heat in Solid*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1959.
2. Ling, F. E., *Surface Mechanics*, Wiley, New York, 1973.
3. Kennedy, F. E., and Ling, F. F., "A Thermal, Thermoelastic, and Wear Simulation of a High Energy Sliding Contact Problem," *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol.97, 1974, pp.497-508.
4. Murray, S. F., Peterson, M. B., and Kennedy, F. E., "Wear Rates of Boundary Lubricated Cast Bronze Bearings," *ASLE Transactions*, Vol. 20, 1977, pp. 321-327.
5. Floquet, A., Play, D., and Godet, M., "Surface Temperatures in Distributed Contacts. Application to Bearing Design," *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol.99, 1977, pp. 277-283.
6. Kennedy, F. E. Jr., "Surface Temperature in Sliding Systems-A Finite Element Analysis," *ASME Journal of Lubrication Technology*, Vol.103, 1981, pp.90-96.
7. Oran B. E., *The Fast Fourier Transform and Its Application*, Prentice-Hall, Inc. 1974, pp. 11-14.
8. Floquet, A., and Dubourg, M. C., "Nonaxisymmetric Effects for Three-Dimensional Analysis of a Brake," *ASME Journal of Tribology*, Vol.116, 1994, pp.401-407.