정보학연구 제3권 제2호 2000년 6월(pp.73-85)
The Studies of Information Technology, Vol.3, No.2

다품종 네트워크의 효율적인 알고리즘 개발
- 정보통신 네트워크에의 적용 -

윤석진*/장경수**

요 약

본 논문에서는 여러가지 상이한 메세지를 전송하는 정보통신 네트워크의 효율적인 해법을 개발하였다. 이 문제는 네트워크 이론에서의 전형적인 다품종 네트워크로의 전환이 가능하다. 이러한 문제는 문제의 크기에 따라 계산의 복잡도가 지수적으로 증가하는 대표적인 NP-완전문제이다.

본 논문에서 개발된 해법은 전통적인 라그랑지 이완법을 보완한 것으로 다음과 같이 구성된다. 우선 우수한 초기 실현가능해(good initial feasible solution)를 얻을 수 있는 휴리스틱 방법을 개발하고 초기 실현가능해가 얻어지면 이를 이용하여 초기 쌍대변수(이완된 제약식에 붙게되는 라그랑지 승수)를 추정한다. 대개의 경우 쌍대변수를 임의로 0으로 설정하고 해법을 수행하는데, 이 경우 쌍대 최적해와의 차이가 많이 나게되므로 비효율이 발생할 수 있다. 쌍대 최적해를 얻은 후 원문제의 실현가능조건을 위배하는 경우에는 재할당 방법(re-allocation method)를 통해 원문제의 실현가능조건을 충족하도록 한다.

해법의 성능(효율성) 테스트 결과 저자들이 개발한 해법이 수행속도 면에서 상업용 팩키지와 기존의 효율적인 해법들에 비하여 매우 우수하다는 결과를 얻을 수 있었다. 또한 본 해법은 최적해를 보장하지 않지만 최적해와의 차이가 평균 2% 미만의 근사 최적해를 얻을 수 있었다.

Ⅰ. 서론

최근 인터넷의 확산에 따라 정보통신 네트워크의 효율적인 관리가 무엇보다도 중요한 이슈로 제기되고 있다. 정보통신 네트워크는 터미널이나 기지국간의 여러개의 상이한 메시지나 자료를 연결된 망을 통하여 전송하고 연결선은 유한량의 용량을 갖는다는 점, 각 터미널이나 기지국간의 일정량의 자료나 메시지를 필요로 하고 공급한다는 측면에서, 네트워크 이론에서의 다품종 네트워크(Multicommodity Network) 문제로 전환될 수 있다.

* 한국통신개발 연구원
** 연세대학교 경영학과 강사

네트워크 중에서 호의 용량과 비용을 고려하여 최소의 비용으로 출발 교점(source node)에서 도착 교점(sink node)에 수요량을 보내는 것을 단일상품 최소비용 흐름 네트워크 문제라고 하며 특히 독립적인 여러개의 상품이 호 용량을 공유하는 최소비용 네트워크 문제를 다품종 네트워크라고 정의한다(Ahuja et al, 1993; Schneur & Orlin 1998).

독립적인 상품들이 동일한 네트워크를 공유하고 있으므로 상품들의 흐름은 상호간에 영향을 미치기 마련이고 이러한 상호작용은 문제해결을 매우 어렵게하는 요인이 된다(Schneur 1991). 특히 정수해를 요구하는 다품종 네트워크 문제의 경우에는 계산량이 문제의 크기에 따라 지수적으로 증가하는 대표적인 NP-완전(complete)문제

로 알려져 있다(Ahuja et al 1993).

따라서 본 연구에서는 다품종 네트워크 문제, 특히 정수해를 요구하는 문제의 해결을 위한 효율적인 해법을 개발하고자 한다. 본 연구에서 제시하고자 하는 해법은 전통적인 라그랑지 이완법(Lagrangian relaxation method)를 보완한 것이다. 전통적인 라그랑지 방법은 쌍대문제에 기초한 방법이므로 쌍대 최적해는 얻을 수 있으나, 원문제의 실현가능조건, 특히 이완된 제약식을 위배할 수 있다는 한계와 최적해 근방에서 수렴이 매우 느려지는 단점을 가지고 있다. 하지만 이 해법은 호 용량이나 흐름에 대한 자료가 모두 정수로 주어졌을 때에는 항상 정수해를 보장할 수 있고 적용이 용이하며 다양한 부수제약이 포함된 복잡한 형태의 다품종 네트워크 문제에도 적용이 가능하다는 장점을 가지고 있다. 본 논문에서는 이러한 전통적인 라그랑지 이완법의 장점을 살리면서 단점을 보완할 수 있는 해법을 제시하고자 한다. 이를 위하여 글로크너가(Glockner et al 1997) 제시한 휴리스틱 방법을 적용하여 우수한 초기 실현가능해(good initial feasible solution)를 얻는다. 초기 실현가능해가 얻어지면 이를 통하여 초기 쌍대변수(이완된 제약식에 붙게되는 라그랑지 승수)를 추정한다.일반적인 경우 쌍대변수를 임의로 0으로 설정하고 해법을 수행하는데, 쌍대 최적해와의 차이가 많이 나게되므로 최적해에 찾는 과정에서 비효율이 발생하게 된다. 이를 해결하기 위하여 쌍대 최적해에 가까운 값을 추정함으로써 해법의 반복을 줄이고자 한다. 쌍대 최적해를 얻은 후 원문제의 실현가능조건을 위배하는 경우에는 재할당 방법(re-allocation method)를 통해 원문제의 실현가능조건을 충족하도록 한다.

논문의 구조는 다음과 같다. 우선 2절의 이론적 배경 부분에서는 기본적인 네트워크 및 다품종 네트워크 구조에 대하여 간단하게 정의하였고 3절에서는 다품종 네트워크 해결을 위한 기존의 해법들을 간략하게 정리하였다. 전통적인 해법들로는 가격지향적(price-directive) 방법인 단찌그-울프(Danzig-Wolf)의 열생성기법(column generating method)과 라그랑지 이완법 그리고 쉬노이르의 벌칙함수에 의한 교정해법(scaling)이 있다(Ahuja it et al 1993). 4절에서는 본 저자들이 개발한 다품종 네트워크 해법의 구조와 절차를 설명하였고 5절에서는 여러 가지 해법과의 계산상의 성능평가를 하였다. 비교대상 해법으로는 상업용 팩키지인 LINDO시스템의 LINGO 4.0과 글로크너가 개발한 휴리스틱 라그랑지 이완법을 이용하였다.

Ⅱ. 다품종 네트워크 모델

독립적인 상품들이 호 용량(arc capacity)를 공유하는 네트워크를 다품종 네트워크(multi-commodity network)라고 정의한다. 특히 본 연구에서 다루고자 하는 네트워크 유형은 단일의 출발지와 도착지를 갖는 유방향 네트워크이며, 복수의 출발지와 도착지를 갖는 네트워크는 항상 위의 네트워크 형태로 변환이 가능하다. 즉 복수의 출발지를 갖는 문제는 가상의 단일 출발지를 설정한 뒤 이 가상 출발지에서 복수의 출발지로 향하는 호를 연결한다. 그리고 복수의 출발지의 수요량을 각 연결호의 호 용량으로 두고 비용은 0으로 놓으면 된다. 마찬가지로 복수의 도착지를 갖는 문제도 이와 유사하게 처리하면 된다(Schneur 1998).

기호 및 첨자의 정의는 다음과 같다.

N: 교점(Node)

A: 호(Arc)

$G(N, A)$: 교점와 호로 구성된 네트워크

K: 상품의 수

b^k: 각 상품 k에 대하여 출발교점 $s(k)$에서 도착교점 $t(k)$에 필요한 흐름의 양

c_{ij}^k: k번째 상품의 호 (i, j)의 비용

x_{ij}^k: k번째 상품의 호 (i, j)의 흐름량, 의사결정변수

u_{ij}: 호 (i, j)의 용량

$s(k)$: k 상품의 출발교점, $t(k)$: k 상품의 도착교점,

다품종 네트워크를 최적화 문제로 정식화하여 표현하면 다음과 같다.

$$\min \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k=1}^{K} c_{ij}^k x_{ij}^k$$

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij}^k - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji}^k = d_i^k, \ \forall i \in N, \ \forall k \in K$$

$$\sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k \le u_{ij}, \ \forall (i,j) \in A$$

$$x_{ij}^k \ge 0 \ \forall (i,j) \in A, \ \forall k \in K$$

$$\begin{cases} d_i^k = b^k & \text{if } i = s(k) \\ d_i^k = -b^k & \text{if } i = t(k) \\ d_i^k = 0 \end{cases}$$

위의 모델에서 두 번째 제약식을 상품군 제약(bundle constraints)라고 하며, 이 제약이 위의 문제를 전통적인 네트워크 해법으로 해결하기 어렵게 만드는 제약식이 된다. 만약 상품군 제약이 없다면, 위의 문제는 K개의 상품별로 독립적인 최소비용흐름 네트워크 문제가 될 것이다.

Ⅲ. 해법에 관한 기존연구

선형 다품종 흐름 문제는 선형계획으로 정식화될 수 있으며, 단체법이나 내부점해 방법에 의해 해결될 수 있다(Schneur & Orlin, 1998). 하지만 선형계획은 최악의 경우 NP(Nonpolynomial Time) 시간이 소요될 뿐더러 대부분 응용되고 있는 다품종 흐름문제의 크기는 매우 복잡하므로 선형계획으로 다루기에는 한계가 있다. 따라서 많은 연구자들은 다품종 흐름문제의 특수한 행렬 구조를 이용하여 이 문제를 해결하려고 노력했으며, 그 중의 대표적인 방법들이 바로 가격 지향적, 자원 지향적 분해방법들이다. 이러한 분해방법들은 대개 단체법에 근거한 방법들이고 그 수행성과는 아싸드(Assad, 1976; Ali et al, 1980)등에 의해 검토되었다. 분해방법들의 대표적인 것들로는 열-생성기법과 라그랑지 이완법이 있다(Ahuja et al, 1993; Assad, 1976). 두 방법 모두 가격 지향적(price-directive) 분해방법(decomposition method)으로, 모델을 상품별로 분해하고 분해된 부분문제는 최단경로 또는 최소비용 흐름문제를 해결한 후 이 정보를 통해 구해진 해들이 상위 문제의 최적해인지 검토하고 만약 최적해가 아니라면 비용을 조정하여 다시 하위문제로 피드백을 한다는 공통점을 가지고 있다. 열 생성기법을 적용할 경우, 이 해법은 주문제 또는 상위문제를 해결하는 방법이 단체법에 근거하고 있다는 한계를 가지고 있다. 또한 이 방법으로는 정수해가 필요로 하는 문제의 경우 정수해를 항상 보장하기 어렵다는 한계를 가지고 있다. 라그랑지 이완법의 경우에는 정수해를 유지할 수 있고 적용이 용이하다는 장점을 가지고 있으나 쌍대문제에 기초한 해법이므로 원문제의 실현가능조건을 위

배할 수 있다. 또한 쌍대해 개선을 위하여 부분경사법(subgradient method)을 이용하게 되고 부분경사는 여러개가 존재하게 되므로 최적해 근방에서 진동하게 될 가능성이 있는데, 이를 지그재그 현상이라고 하며 (Glockner et al, 1997) 이러한 현상때문에 최적해 근방에서 수렴속도가 매우 느리다는 단점을 가지고 있다 (Ahuja et al 1993).

다품종 네트워크 해결을 위한 비교적 최근의 연구로는 쉬노이르의 벌칙함수에 의한 비용조정(cost scaling) 방법이 있다. 쉬노이르(Schneur, 1997)는 상품군 제약에 벌칙상수를 부여하고 상품군 제약을 제곱의 형태로 목적함수에 추가함으로써 문제를 상품별 비분리 비선형 네트워크 문제를 분리하였다. 그의 해법은 상품별로 분리된 문제의 해를 순환제거방식(cycle-cancelling method)를 이용하여 해결하고 이 해들이 상품군 제약을 위배하면 벌칙을 부여함으로써 다시 비용을 조정하여 다시 분리된 문제를 해결하는 해법이다. 하지만 이 방법은 정수해를 보장하기 어려우며, 본 연구자의 검증 결과로는 기존의 방식이나 상업용 팩키지들에 비해서 오히려 수렴속도가 매우 느린 예들이 많았다.

Ⅳ. 다품종 네트워크 문제의 효율적 해법

본 논문에서 제시하고자 하는 해법은 전통적인 라그랑지 이완법의 장점을 살리면서 단점을 보완하는 것이다. 전통적인 라그랑지 이완법의 특징은 이 해법이 쌍대해 개선을 기초로하는 방법이라는 것이고 장점으로는 문제의 적용이 비교적 용이하고 네트워크의 정수해를 유지할 수 있다는 점이다. 또한 다양한 형태의 부수제약(side constraints)이 포함된 경우에도 용이하게 적용될 수 있다. 이것은 대부분의 실제 응용 문제들이 다품종 네트워크 문제에 여러가지 다양한 부수제약들이 포함된 형태라는 점에서 중요하다. 단점으로는 결과로 나온 해가 쌍대 최적해이나 원문제의 실현가능조건을 위배할 수 있다는 것이다. 또한 쌍대해 개선에 있어 부분 경사법을 이용하게 되는데, 부분경사는 여러개가 존재하여 반복과정에서 순환될 수 있는 관계로 최적해 근방에서 수렴하지 않고 진동할 가능성이 있다는 것이다. 즉 수렴이 매우 느리게 진행될 가능성이 있다는 의미이다. 따라서 이를 방지하기 위한 여러가지 기법들이 적용되어야 한다. 이러한 전통적인 라그랑지 이완법의 단점을 개선하고 계산상의 효율성을 제고하기 위하여 다음과 같이 해법을 구성한다. 우선 원 문제의 초기 실현가능해를 얻고 이 해를 이용하여 초기 쌍대변수값을 추정한다. 대개의 경우 쌍대변수의 초기값을 0으로 놓고 시작하는데, 이 경우 쌍대해의 수렴이 느려지게 된다. 쌍대해의 수렴이 느려지게 되면 상품별 최소비용흐름 문제를 반복해서 해결해야 하는데, 이 부분의 시간이 많이 소요되므로 결국 해법의 효율성이 저하된다. 상품별 부분문제는 최소비용흐름 문제이므로 마지막으로 원 문제의 실현가능조건- 상품군 제약 -을 위배하는 해에 대해서는 이를 비용효과적으로 재분배하여 실현가능조건을 유지하도록 한다. 이것을 재할당 방법(re-allocation method)라고 부르기로 한다.

4.1 라그랑지 이완법의 개요

라그랑지 이완법은 다품종 네트워크에서 상품군제약을 이완시킴으로써, 즉 상품군제약에 라그

랑지 승수를 결합하여 목적함수에 올림으로써, 문제를 각각의 개별적인 단일상품 최소비용 네트워크나 최단경로 문제로 변환시키는 방법이다. 이 해법은 가격지향적(price-directive) 해법으로 가장 널리 이용되는 방법이기도 하다.

라그랑지 승수를 λ_{ij}라고 했을때, 라그랑지 함수 $L(x, \lambda)$는 다음과 같이 구성된다.

$$\max_{\lambda \geq 0} \min_x L(x, \lambda) = \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k=1}^{K} c_{ij}^k x_{ij}^k + \sum_{(i,j) \in A} \lambda_{ij} \left(\sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k - u_{ij} \right)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A} x_{ij}^k - \sum_{j:(j,i) \in A} x_{ji}^k = d_i^k, \ \forall i \in N, \ \forall k \in K$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A, \ \forall k \in K$$

위의 문제에서 알 수 있듯이 상품군 제약식을 목적함수에 이완시켰으므로, 위 문제는 상품별 최소비용 네트워크 문제나 최단경로 문제로 정의될 수 있다. 각각의 상품별 문제를 $PL_k(x, \lambda)$ 라고 하면,

$$PL_k(x, \lambda) = \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^k + \lambda_{ij}) x_{ij}^k$$

쌍대문제 $\Phi(\lambda)$는 다음과 같이 기술된다.

$$\max_{\lambda \geq 0} \Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^{K} \min PL_k(x, \lambda) - \sum_{(i,j) \in A} \lambda_{ij} u_{ij}$$

위 문제를 해결하는 일반적인 절차는 다음과 같다. 우선 쌍대변수벡터 λ에 대하여 초기치를 $\lambda = 0$으로 놓고 각 분해된 문제 PL_k를 최소비용 네트워크를 통해 해결한다. 다음으로 쌍대해를 개선해야 하는데, 문제는 쌍대함수가 분절화된 선형함수의 형태를 가지고 있으므로 미분가능하지 않다는 점이다. 따라서 폴락 (Polyak, 1969)이 제시한 부분경사법(subgradient method)을 이용하여 쌍대해를 다음과 같이 개선한다.

$$\lambda_{ij} = [\lambda_{ij} + \alpha(\sum_{k=1}^{K} x_{ij}^k - u_{ij})]^+, \quad \forall (i,j) \in A$$

위의 식에서 α는 개선크기(step size)를 말한다. 이와같이 λ가 개선이 되면 개선된 λ에 따라 PL_k의 비용값 $(c_{ij}^k + \lambda_{ij})$가 수정되며, 이에 따라 다시 x에 관한 부분문제 PL_k를 해결하고 새로운 흐름 x를 구한다. 이 과정은 $\Phi(\lambda^*) - \Phi(\lambda)$가 일정한 범위내로 좁혀질때까지 되풀이 된다. $\Phi(\lambda^*)$는 쌍대 최적값을 말한다.

4.2 개선된 라그랑지 이완법

4.2.1 초기 실현가능해의 구현

본 해법은 글록크너와 넴하우저 등이 제시한 휴리스틱 해법을 보완한 것으로 효율적으로 실현가능해를 얻을 수 있는 해법이다(Glockner et al, 1997). 또한 해법의 특성상 우수한 실현가능해(good feasible solution)을 보장할 수 있다. 이 해법은 주어진 상품순서에 따라 가장 비용이 적은 경로를 따라 가능한한 최대의 흐름을 보낸다. 만약 특정호의 용량이 모두 채워진 상태라면 해당 호의 비용에 ∞값으로 부여함으로써, 다른 최단거리 경로를 찾아 흐름양을 보낸다.이 과정은 모든 상품의 수요량이 모두 충족될 때까

지 되풀이되며, 용량이 채워진 호에는 더이상 흐름양을 할당하지 않음으로써 실현가능해를 유지하도록 한다.

단 이 휴리스틱 해법에서 나온 목적함수의 값은 탐색하는 상품의 순서를 어떻게 결정하느냐에 따라 차이가 발생한다. 즉 비용이 가장 저렴한 상품순으로 탐색순서를 정하여 본 방법을 적용하면 보다 최적값에 가까운 값을 얻을 수 있다.

본 휴리스틱 해법을 이용하여 초기 실현가능해를 얻고 이 정보를 이용하여, 쌍대해를 추정할 수 있다. 최적해에 가까운 쌍대해가 추정됨으로써 보다 빨리 쌍대최적해에 수렴할 수 있다.

4.2.2 초기 쌍대해의 추정

일반적으로 라그랑지 최적화 기법을 이용할 때, 초기 쌍대해 λ_{ij}는 모두 0으로 놓고 시작하는 것이 보통이다. 하지만 이 값들은 실제 최적해와는 상당히 거리가 있기 때문에 수렴이 매우 느려지게 된다. 따라서 본 논문에서는 글로크너의 휴리스틱 해법을 이용하여 쌍대해를 추정하는 방법을 제시하고자 한다. 이 방법은 글로크너 및 웨이젤만스가 제시한 개념을 적용하였다 (Glockner et al, 1997; Wagelmans, 1990).

우선 쌍대해 λ_{ij}는 상품군 제약식 $\sum_k^K x_{ij}^k - u_{ij}$에 대한 라그랑지 승수이다. 만약 원문제의 최적해 x_{ij}^{k*}를 구했다면 λ_{ij}는 다음과 같이 정의될 수 있을 것이다.

$$\lambda_{ij}^* = \frac{\partial F(x)}{\partial u_{ij}}$$

위의 수식에서 $F(x) = \sum_k^K \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}^k x_{ij}^k$를 말한다. 일반적으로 우리는 원문제의 최적해를 알고 있지 않으므로 위의 수식으로는 정확한 쌍대최적해를 얻을 수 없다. 하지만 원문제의 실현가능해를 알고 있다면 또한 그 실현가능해가 최적해에 매우 가깝다면 우리는 이를 통하여 쌍대해를 근사적으로 추정해낼 수 있다. 즉 실현가능해를 통하여 상품군 제약의 용량의 한계값을 추정해낼 수 있다. 본 논문에서 다루고 있는 것은 정수해를 요구하는 다품종의 문제이므로(용량과 흐름양이 모두 정수인 경우를 말함) 용량값을 1단위 섭동(perturbation)시킴으로써 한계값을 구할 수 있다.

4.2.3 부분문제의 해결

상품별로 분리된 문제는 PL_k는 각각의 호비용이 $(c_{ij}^k + \lambda_{ij})$인 최소비용흐름문제가 된다. 최소비용흐름 문제를 해결하는 해법은 다양하나 본 논문에서는 가장 효율적이라고 입증된 이완법을 이용한다. 실제로 라그랑지 이완법을 적용하는데 있어 가장 많은 시간을 차지하고 있는부분이 바로 부분문제를 해결하는 부분이기 때문이다. 이외에도 글로크너가 제시한 휴리스틱 방법을 부분문제 해결에 이용할 수 있다 (Glockner et al, 1997). 이 휴리스틱 방법은 주어진 쌍대해에서 최적해를 찾지는 않지만 항상 실현가능해를 보장한다는 장점이 있다.

4.2.4 쌍대해의 개선

주어진 λ에 대한 PL_k의 최적해가 x^*라고 하자. 그렇다면 λ에 대한 부분경사값 g_{ij}는 다음과 같이 정의된다.

$$g_{ij}(x^*) = \frac{\partial}{\partial \lambda_{ij}} \Phi(\lambda) = \sum_{k=1}^K x_{ij}^{k*} - u_{ij}$$

앞서 기술한 바와 같이 반복 $i+1$번째에서의 λ_{ij}^{i+1}는 일반적으로 다음과 같이 개선된다.

$$\lambda_{ij}^{i+1} = [\lambda_{ij}^{i} + \alpha^{i} g_{ij}(x^{*})]^{+}, \quad \forall (i,j) \in A$$

위의 식에서 α^i는 i번째 반복에서의 개선크기이다. 위와 같이 쌍대변수 λ를 개선하는 방식을 투영에 의한 방식이라고 한다. 투영방식 외에 쌍대변수를 보다 효과적으로 개선하기 위해 근사 최소화(proximal minimization)방법을 이용하기도 한다(Bertsekas, 1998). 하지만 글록크너(Glockner 1997)는 다품종 네트워크의 경우 투영에 의한 방식이 가장 효과적임을 검증하였다.

4.2.5 재 할당법 (Re-allocation Method)

앞절에서 기술한 바와 같이 라그랑지 이완법을 이용하면 쌍대 최적해를 얻을 수 있으나, 원문제의 실현가능조건을 위배하는 결과를 낳을 수 있다. 따라서 라그랑지 이완법을 수행하고 난 후 실현가능조건을 위배하는 호에 대하여 다시 조정을 할 필요가 있다(Ahuja et al, 1993, Chang et al, 1994).

본 논문에서는 구해진 흐름을 재조정하는 과정을 재 할당법이라고 정의하며, 구체적인 재 할당전략을 다음과 같이 구축하였다.

위의 과정은 실현가능조건을 위배하는 호가 존재하지 않을때까지 반복된다. 재 할당법을 이용하면 실현가능해를 유지할 수 있고 보다 개선된 해를 얻을 수 있게된다.

4.2.6 해법의 전체구조

해법은 크게 3부분으로 나뉜다. 첫번째는 초기 실현가능해를 구하고 이를 통하여 초기의 쌍대해를 추정하는 부분이고 두번째는 상품별로 분리된 문제 PL_k를 해결하는 부분이다. 마지막은 앞서 구한 해가 원문제의 실현가능조건을 충족시키지 않는다면 이를 재 할당법을 통해 실현가능해를 유지하는 것이다.

전체적인 해법의 구조는 다음과 같이 구성된다.

1. 실현가능조건을 위배하는 호 (p,q)를 선택한다. 이때 위배되는 흐름양을 V라고 하자. (p,q)를 지나가는 상품들 중 가장 우선순위가 높은 상품을 찾아 k'라고 하자. 그리고 최대 개선량 IQ를 다음과 같이 결정한다.
   $IQ = \min\{V, x_{pq}^{k'}\}$
2. 호 (p,q)에서 IQ를 감해준다. 그리고 호 (p,q)를 중심으로 네트워크를 상하로 절단하여 상위 네트워크와 하위 네트워크를 구성한다. 그리고 (p,q)를 통과하는 상품 k'의 흐름량을 추적하여 구해진 해에서 감해준다.
3. 흐름이 수정되었으므로 흐름량 x_{ij}^k 을 수정하고 또한 $\sum_k^K x_{ij}^k$를 재계산한다. 호 앞서 구한 흐름량을 기초로 새로운 호 용량 u_{ij}'를 다음과 같이 계산한다.
   $u_{ij}' = u_{ij} - \sum_k^K x_{ij}^k$
4. k'상품에 대한 수정된 네트워크를 구성한다. 이 네트워크는 호 용량이 u_{ij}'로 대체되었으며, 출발지 교점과 도착지 교점의 수요량이 IQ인 네트워크이다. 이 네트워크에 대하여 최소비용 흐름문제를 해결하고 해결된 해 값을 기존의 해에 더해준다.
5. 이 과정은 위배되는 흐름양이 모두 제거될 때까지 되풀이 된다.

1. $i := 0$ 로 놓고 최대반복 횟수 MAXIT와 쌍대격차 허용치 ε의 초기값을 정한다.
2. 휴리스틱 해법을 이용하여 초기해를 구하고 그 비용값을 z_p로 놓는다.
3. $\hat{z} = z_p$로 설정한다
4. 쌍대 초기해 λ_{ij}를 추정한다.
5. 추정된 초기해 λ를 이용하여 $\Phi(\lambda)$를 구하고 $z_d = \Phi(\lambda)$로 놓는다.
6. g_{ij}를 아래와 같이 계산한다.

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{K} x_{ij}^{k} - u_{ij} \quad \forall (i,j)$$

7. g를 방향벡터 d에 투영시킨다.

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } g_{ij} < 0 \text{ and } \lambda_{ij} = 0 \\ g_{ij} & \text{otherwise} \end{cases}$$

8. 개선크기 α^i를 다음과 같이 결정한다.

$$\alpha^{i} := \beta[\hat{z} - \Phi(\lambda)]/\|g\|^2$$

9. 쌍대해를 개선한다.

$$\lambda_{ij}^{i+1} = [\lambda_{ij}^{i} + \alpha^{i} d_{ij}]^{+}$$

10. $TC_p = \sum_{k=1}^{K} \min_x PL_k(x, \lambda^{i+1})$
11. z_p는 다음과 같이 결정된다.

$$z_p = \begin{cases} z_p & \text{if } x \text{ isfeasible} \\ \min(z_p, TC_p) & \text{otherwise} \end{cases}$$

12. $\Phi(\lambda^{i+1})$를 계산한다.
13. $z_d = \max\{z_d, \Phi(\lambda^{i+1})\}$로 놓는다
14. $\hat{z} = (z_p + z_d)/2$
15. 만약 $i <$ MAXIT 이거나 $z_p - z_d > \varepsilon$이면 $i := i+1$로 놓고 단계 6으로 간다.
16. 원문제의 해 $i := i+1$가 실현가능해를 충족하지 않는다면 재 할당법을 이용하여 원문제의 실현가능조건을 충족시킨다.

V. 계산상의 성능평가

본 절에서는 본 논문에서 개발된 해법을 중심으로 계산상의 성능평가(또는 효율성 평가)를 수행하고 결과를 제시하고자 한다. 비교대상 해법들은 상업용 팩키지인 LINGO 4.0과 글로크너가 개발한 휴리스틱 라그랑지 이완법이다. LINGO 4.0은 CPLEX등과 더불어 많이 이용되고 있는 팩키지로서, 선형계획 및 정수계획 문제를 해결해주는 최적화 소프트웨어이다. 본 논문에서 이용하게 되는 버전은 LINGO 4.0버전 중에서 가장 상위의 버전으로 PC상에서 변수 10만개와 제약식 4만개를 해결할 수 있는 대용량 팩키지이다(LINGO System, 1998).

글로크너의 해법은 전통적인 라그랑지 이완법

에서 부분문제(최소비용 네트워크)를 해결시 휴리스틱 방법을 적용한 것이다. 이 휴리스틱 방법을 이용하면 항상 실현가능해 조건을 충족하므로 재할당 전략이 필요없고 정수해를 유지할 수 있다(Glockner et al, 1997). 또한 다른 해법들에 비하여 계산상의 효율성이 우수한 것으로 검증된 해법이다. 본 논문에서 개발한 해법과 위의 2가지 경우의 해법의 명칭을 각각 MCNR (본 논문에서 개발한 해법), MCNH(글로크너의 휴리스틱 라그랑지 이완법)라고 정의하였다.

효율성 평가를 위해 필요한 적용대상 예제들은 랜덤하게 발생시킨 다품종 네트워크 문제를 이용하였다. 생성된 예제에 대하여 최적해 및 최적비용을 구하고 그 수행시간을 조사한다. 그리고 비교대상 해법들이 다양한 네트워크의 크기-네트워크의 크기는 크게 교점과 호의 수 그리고 상품의 수로 표현할 수 있음- 에 따라 수행성과 즉 최적해와의 차이 및 수행시간이 어떻게 차이가 나는지를 분석한다.

해법간 효율성 평가에 이용하게 될 랜덤하게 생성된 다품종 네트워크의 유형은 다음의 그림과 같다.

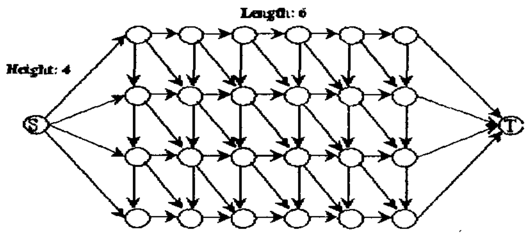

그림 17 랜덤 네트워크의 유형

위의 그림에서 네트워크의 길이 L(Length)은 수평선상의 교점의 수를 나타내고 높이 H(Height)는 수직선상의 교점의 수를 나타낸다. 이와같이 임의로 발생시킨 네트워크의 유형은 길이와 높이에 따라 크기가 결정된다. 네트워크는 유방향 네트워크이며, 단일의 출발지 교점 S와 목적지 혹은 도착지 교점 T를 갖는다. 각 상품별 비용의 크기는 0에서 사전에 결정된 상품별 최대비용 $C^k_{\max}$사이에 랜덤하게 결정된다. 상품의 수는 3에서 10사이로 한정하였으며, 수요는 상품별로 20개에서 사전에 결정된 최대수요량 $D^k_{\max}$에 따라 랜덤하게 발생시켰다. 각 호의 용량의 결정은 다음과 같은 범위내에서 랜덤하게 발생시켰다.

즉 $F|K|D^k_{\max}/(H-1)$에서 $3F|K|D^k_{\max}/(H-1)$사이의 수로 균등분포에 따라 발생시켰으며, F는 사용자 조정치로 설정하였다. 앞에서 $|K|$는 네트워크상의 상품의 총수를 말한다. F값의 크기에 따라 문제가 실현가능하는지 또는 실현불가능한지가 결정되며 F값이 너무 크면 각 호의 용량이 모든 상품의 수요를 충족시킬 수 있을만큼 커지므로 이 경우에는 독립적인 상품별 최소비용 문제가 될 가능성이 있다. 따라서 적절한 F값을 선택해야 한다. 본 연구의 실험결과 대개 0.9미만이면 실현불가능인 경우가 종종 나타나므로 F값을 안정적인 1.5값을 선택하였다. 아래의 표는 효율성 테스트를 위하여 발생시킨 문제들의 네트워크의 길이와 높이 그리고 교점과 호의 수와 그에 따른 전체 변수의 수를 정리한 표이다.

아래의 표에서 $|K|$는 상품의 총수, $|A|$는 호의 총수, $|N|$는 교점의 총수를 나타내며 H는 네트워크의 깊이 L은 네트워크의 너비를 나타낸다. No. of Var. 는 변수의 총수를 나타내고 No. of Const.는 제약식의 총수를 나타낸다. 생성된 문제는 상품의 경우 8개에서 10개사이에 분포하고 있으며, 변수의 크기는 가장 작은 문

제가 9288개이고 가장 큰 문제가 17,410개이다.

〈표 1〉 랜덤 네트워크 문제의 정의

	|K|	|A|	|N|	H	L	No. of Var.	No. of Const.
Prob1	8	20	20	402	1161	9288	4377
Prob2	8	20	25	502	1451	11608	5467
Prob3	8	20	30	602	1741	13928	6557
Prob4	9	10	10	102	281	2529	1199
Prob5	9	10	15	152	421	3789	1789
Prob6	9	15	20	302	861	7749	3579
Prob7	9	20	20	402	1161	10449	4779
Prob8	9	20	25	502	1451	13059	5969
Prob9	9	20	30	602	1741	15669	7159
Prob10	10	10	10	102	281	2810	1301
Prob11	10	10	15	152	421	4210	1941
Prob12	10	15	20	302	861	8610	3881
Prob13	10	20	20	402	1161	11610	5181
Prob14	10	20	25	502	1451	14510	6471
Prob15	10	20	30	602	1741	17410	7761

아래의 표는 위의 문제에 대하여 각 해법들의 계산시간과 해를 정리한 것이다.

〈표 2〉 해법간 성능평가 결과

	LINGO 4.0		MCNR			MCNH		
	Cost	Time(sec)	Cost	Time(sec)	Gap(%)	Cost	Time(sec)	Gap(%)
Prob1	19234	244	19722	60.75	2.54	19873	152.15	3.32
Prob2	25112	456	25980	122.2	3.46	26447	196.36	5.32
Prob3	32801	669	33360	188.94	1.70	35003	614.39	6.71
Prob4	8407	32	8662	6.07	3.03	8775	10.31	4.38
Prob5	13646	72	13764	12.7	0.86	13873	14.65	1.66
Prob6	17080	241	17370	41.23	1.70	17601	48.94	3.05
Prob7	16481	318	16673	60.43	1.16	17147	118.81	4.04
Prob8	21172	938	21911	134.95	3.49	22340	245.2	5.52
Prob9	28200	1042	29343	280.02	4.05	30200	599.45	7.09
Prob10	8946	40	8980	6.04	0.38	9029	8.35	0.93
Prob11	14236	75	14261	12.53	0.18	14433	17.96	1.38
Prob12	19727	229	20128	47.02	2.03	20470	57.01	3.77
Prob13	18306	397	18712	67.96	2.22	19007	99.91	3.83
Prob14	24184	1323	24370	129.85	0.77	24887	210.15	2.91
Prob15	31982	1196	33110	195.56	3.53	33471	477.14	4.66
평균		484.80		91.08	2.07		191.39	3.90

위의 표에서 알 수 있듯이 평균적으로 MCNR 해법이 MCNH해법에 비하여 실행속도나 최적해와의 차이면서 월등히 우수한 것으로 나타났다. 즉 수행시간 면에서는 약 2배 이상의 차이를 보였고 최적해와의 차이면에서는 2배정도 정확한 것으로 나타났다. LINGO 4.0버전과의 비교에서 MCNR해법이 실행시간 면에서 평균 484.80:

91.08로 5.3배 정도 효율적이고 최적해와의 차이도 2% 범위안인 것으로 나타났다. 보다 세밀한 분석을 위해 네트워크의 크기(변수 수*제약식 수)에 따른 실행시간의 차이를 살펴보았다.

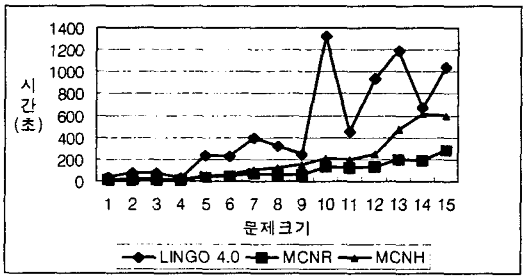

그림 18 해법간 계산시간 비교

위의 그래프에서 알 수 있듯이 MCNR버전이 실행속도면에서 가장 우수한 것을 재확인 할 수 있다. 무엇보다도 중요한 점은 LINGO 4.0의 경우 네트워크의 크기에 따라 실행속도가 지수적으로 증가하고 있다는 것이고 MCNR버전의 경우 선형비례적으로 증가하고 있다는 것이다. 따라서 문제의 크기가 커지면 커질수록 실행시간의 차이가 더욱 벌어질 것이라 판단할 수 있다.

Ⅵ. 결론

지금까지 다품종 네트워크와 유연흐름생산의 일정계획 문제의 효율적인 해법을 제시하고 이 해법의 계산상의 효율성을 기존의 해법 또는 상업용 팩키지와 비교분석해 보았다. 위의 2가지 문제 모두 정수해를 필요로 하고 문제의 크기에 따라 계산의 복잡도가 지수적으로 증가하는 NP-완전문제라는 특성 때문에 효율적인 해법의 개발이 중요하다. 본 논문에서는 기존의 해법인 라그랑지 이완법의 단점을 보완하여 정수해를 유지하면서 보다 효율적인 방법을 제시하였다. 라그랑지 이완법은 쌍대최적해는 구할 수 있지만 원문제의 실행가능조건을 위배할 수 있다. 또한 쌍대해 개선에 있어 부분경사법을 이용하므로 진동할 가능성이 있고 쌍대해의 수렴이 상대적으로 느리게 진행될 수 있다. 본 논문에서는 이러한 단점을 다음과 같이 보완하였다. 첫째 초기의 우수한 실행가능해를 얻을 수 있는 휴리스틱을 개발하였고 두번째로 이 휴리스틱 방법을 통해 초기의 쌍대해(라그랑지 승수)를 추정할 수 있는 간단한 방법을 제시하였다. 세번째 상품별 최소비용흐름 문제에 베르체카스 등이 개발한 이완법을 적용함으로써 문제의 해결 속도를 높였으며, 마지막으로 원문제의 실현가능조건을 위배하는 호에 대하여 효과적인 재할당방법을 통해 실현가능조건을 유지하도록 하였다.

이 해법을 임의로 생성한 네트워크 예제(변수 27개에서 17,410개의 크기를 갖는 43개 예제)에 적용해 본 결과 이완법을 이용한 MCNR해법이 가장 우수한 것으로 나타났으며, LINGO 4.0과 평균 4.5배 이상 효율적인 것으로 나타났다. 아울러 LINGO 4.0이 문제의 크기에 지수적으로 수행시간이 늘어나는 반면 MCNR버전은 상대적으로 선형비례적으로 수행시간이 증가하였다. 최적해와의 차이에서는 MCNR버전이 약 2%정도 차이가 나는 것으로 나타났다. 본 논문에서 개발된 해법은 수행시간을 단축시킬 수 있다는 점에서 긍정적일 수 있으나 최적해와의 차이가 문제의 크기가 커짐에 따라 약간씩 증가되고 있는 부분은 개선되어야 할 부분이다. 이는 문제의 크기가 매우 커지면 최적해와 차이도 커진다는 것을 의미할 수 있다. 본 해법은 라그랑지 이완법을 보완한 해법이므로 쌍대최적해를 구할

수 있으므로 최적해와의 차이를 줄이기 위해서는 재할당 방법이 보다 비용효과적으로 구축되어야 한다.

참고문헌

[1] Ahuja, R.K., T.L. Magnanti and J.B. Orlin, Network Flows, Prentice Hall, Inc., 1993.

[2] Ali, I., R. Helgason, J. Kennington and H. Lall, "Computational Comparison Among Three Multicommodity Network Flow Algorithms," Operations Research, Vol.28, pp. 995-1000, 1980.

[3] Assad, A.A., "Multicommodity Network Flows-a Survey," Networks, Vol.8, pp.37-91, 1978.

[4] C.L. Monma and G.L. Nemhauser, eds., Optimization, Vol.7 of Handbooks in Operations Research and Managment Science, Elsevier Science B.V., 1995.

[5] Bertsekas, D.P., Network Optimization - Continuous and Discrete Models, Athena Scientific, 1998.

[6] Bertsekas, D.P. and P. Tseng, "Relaxation Methods for Minimum Cost Ordinary and Generalized Network Flow Problems," Operations Research, Vol. 36, No.1, pp. 93-114, 1988.

[7] Glockner,G.D., G.L.Nemhauser and C.A. Tovey, "Dynamic Network Flow with Uncertain Arc Capacities: Decomposition Algorithm and Computational Results," Technical Report 97-04, Logistics Engineering Center, Georgia Institue Technology, Altlanta GA, 1997.

[8] LINGO, LINGO Manual 4.0, LINDO Systems Inc, 1998.

[9] Polyak, B.T., "Minimization of Unsmooth Functionals," USSR Computational Math. and Math. Physics, Vol.9, pp. 14-29, 1969.

[10] Schneur,R and J.B. Orlin, "A Scaling Algorithm for Multicommodity Flow Problems", Operations Research, Vol.46., No. 2, 1998.

[11] Wagelmans, A.P.M., "Sensitivity Analysis in Combinatorial Optimization", Ph.D. Thesis, Erasmus University, Rotterdam, The Netherlands, 1990.

Efficient Algorithms for Multicommodity Network Flow Problems Applied to Communications Networks

Seok-Jin, Youn*/Kyoung-Soo, Chang**

Abstract

The efficient algorithms are suggested in this study for solving the multicommodity network flow problems applied to Communications Systems. These problems are typical NP-complete optimization problems that require integer solution and in which the computational complexity increases numerically in appropriate with the problem size.

Although the suggested algorithms are not absolutely optimal, they are developed for computationally efficient and produce near-optimal and primal integral solutions.

We supplement the traditional Lagrangian method with a price-directive decomposition.

It proceeded as follows. First, A primal heuristic from which good initial feasible solutions can be obtained is developed. Second, the dual is initialized using marginal values from the primal heuristic. Generally, the Lagrangian optimization is conducted from a naive dual solution which is set as $\lambda = 0$. The dual optimization converged very slowly because these values have sort of gaps from the optimum. Better dual solutions improve the primal solution, and better primal bounds improve the step size used by the dual optimization. Third, a limitation that the Lagrangian decomposition approach has is dealt with. Because this method is dual based, the solution need not converge to the optimal solution in the multicommodity network problem. So as to adjust relaxed solution to a feasible one, we made efficient re-allocation heuristic.

In addition, the computational performances of various versions of the developed algorithms are compared and evaluated. First, commercial LP software, LINGO 4.0 extended version for LINDO system is utilized for the purpose of implementation that is robust and efficient. Tested problem sets are generated randomly. Numerical results on randomly generated examples demonstrate that our algorithm is near-optimal (< 2% from the optimum) and has a quite computational efficiency.

* Ph. D. Dept of Business Administration, Yonsei Univ. Korea Information Society Development Institute, Division of Information Society Policy

** Ph. D. Lecturer on Dept of Business Administration, Yonsei Univ.