

터보부호와 터보등화기

하판봉*

1. 서론

디지털 TV나 IMT-2000의 채널 부호화 방식으로 터보부호 (turbo code)가 많이 제안되고 있다. 그리고 CDMA (code-division multiple access) 수신기, 다수 사용자 검출기 (multi-user detector), 및 디지털 레코딩 분야등에서 터보부호 개념을 도입하여 ISI (intersymbol interference)을 극복하는데 터보등화기 (turbo equalizer)가 널리 도입되고 있는데 본 논문에서는 이들에 대한 원리를 살펴본다.

본 논문은 2장에서 RSC (recursive systematic convolutional) 부호기, 터보부호기, 및 터보복호기에 대해서 설명하고, 3장에서 터보등화기의 모델, 채널추정기 (channel estimator) 및 채널등화기 (channel equalizer)에 대한 MAP (maximum a posteriori probability) 알고리즘, 및 터보등화기에 있어서의 터보복호기 MAP 알고리즘에 대해서 설명한다. 4장에서는 터보부호와 터보등화기 연구에 관련된 웹사이트들을 소개하고 맺는다.

2. 터보부호

터보부호는 1993년 Berrou, Glavieux, 및 Thitimajshima 등에 의해 제안되었고, 여러 구성 (component) RSC (recursive systematic convo-

lutional) 부호기로부터 나온 부호들을 병렬로 연결 (parallel concatenation)시킨 부호화 방식이다.

복호 알고리즘은 각 구성 RSC 부호기에 대응하는 복호기로 MAP 알고리즘을 적용하여 앞 구성 복호기의 검출된 정보를 다음 구성 복호기의 사전 (*a priori*) 정보로 귀환 (feedback)시켜 충분히 반복 (iteration)시키면서 복호하는 반복복호 (iterative decoding)를 이용하여 원하는 BER 성능을 얻을 수 있다[1]. 인터리버의 크기가 충분히 크고 반복복호가 충분히 수행되었을 때, BER (bit error rate)가 AWGN (additive white Gaussian noise) 채널에서 Shannon 한계에 근접하는 우수한 성능을 보여주었다[2].

2.1 RSC 부호기

부호율 $R=1/2$ 이고 메모리 길이 $M=2$ (혹은 구속 길이 $K=M+1=3$)인 RSC 부호기를 그림1에 보았다. 이 구조에 대한 수식적인 전개는 다음과 같다.

$$a_k = d_k + \sum_{i=1}^M g_i^b a_{k-i} \pmod{2} \quad (1)$$

$$x_k = d_k \quad (2)$$

$$y_k = \sum_{i=0}^M g_i^f a_{k-i} \pmod{2} \quad (3)$$

여기에서 g_i^b 와 g_i^f 는 각각 0과 1의 값을 가질 수 있으며, $G_1:\{1 g_i^b\}$ 와 $G_2:\{g_i^f\}$ 은 부호기의 생성다

*정회원, 창원대학교 전자공학과 교수

항식 $G = [1 \frac{\sum_{i=0}^M g_i^f a_{k-i}}{1 + \sum_{i=1}^M g_i^b a_{k-i}}]$ 의 일반적인 형태이

다. 구속 길이 K 을 증가시키면 성능의 증가를 가져올 수 있지만 복호기의 복잡성 (complexity)을 증가시키는 단점이 있다. mod 2은 modulo-2 합 ($0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0$)을 의미한다. x_k 에는 정보 d_k 가 그대로 나타난다.

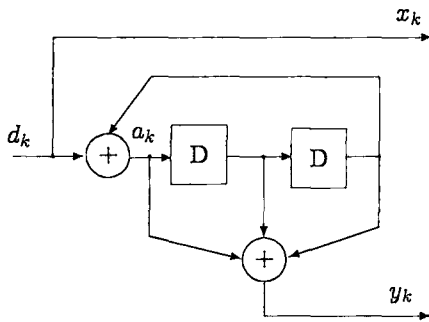


그림 1. RSC 부호기의 예. 여기에서 $G_1 = \{1 \ 0 \ 1\}$ 이고 $G_2 = \{1 \ 1 \ 1\}$ 이다.

2.2. 터보부호기

터보부호는 반복복호 방법을 사용하기 위해 두 개 이상의 구성 (component) 부호기를 병렬로 연결시킨 새로운 구조를 사용한다. 두개의 동일한 구조의 RSC 부호기를 사용한 (다른 구조를 사용해도 무방함) 터보부호기를 그림2에 보였다.

두개의 구성 RSC 부호기 입력은 전혀 다른 값이 된다. 즉, 하나는 입력 데이터 d_k 을 그대로 적용한 것이고, 다른 하나는 입력 데이터를 인터리버를 거친 변형된 데이터 \bar{d}_k 을 적용한 것이다. 만약 두 구성 부호기의 출력이 각각 n_1 비트수와 n_2 비트수 사용되었다면 위 · 아래 부호기의 부호율은 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{n_1 + n_2}{2n_1 + n_2} \tag{4}$$

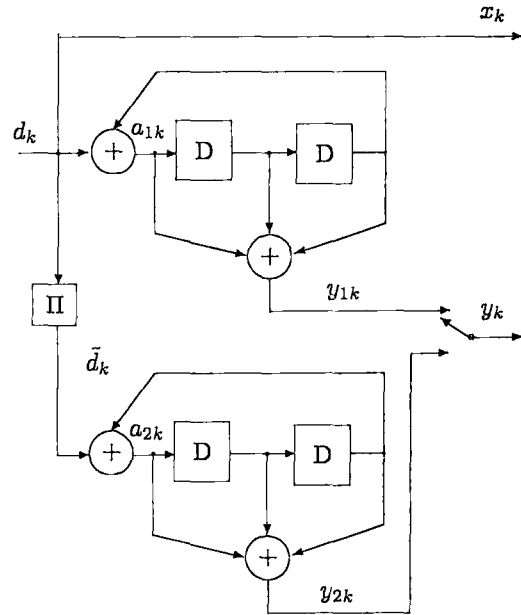


그림 2. 터보부호기. 여기에서 위아래의 구성 RSC 부호기의 구조가 동일하다. 일반적으로 두 구성 부호기의 구조가 달라도 무방하다.

$$R_2 = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + 2n_2} \tag{5}$$

또한 입 · 출력 사이의 관계식은 다음과 같다.

$$x_k = d_k \tag{6}$$

$$a_{1k} = d_k + \sum_{i=1}^M g_i^b a_{1,k-i} \text{ mod } 2 \tag{7}$$

$$y_{1k} = \sum_{i=0}^M g_i^f a_{1,k-i} \text{ mod } 2 \tag{8}$$

$$a_{2k} = \bar{d}_k + \sum_{i=1}^M g_i^b a_{2,k-i} \text{ mod } 2 \tag{9}$$

$$y_{2k} = \sum_{i=0}^M g_i^f a_{2,k-i} \text{ mod } 2 \tag{10}$$

2.3 터보복호기

1974년 Bahl, Cocke, Jelinek, 및 Raviv 등에 의하여 제안된 BCJR (혹은 MAP) 알고리즘은 이산

적인 (discrete) 무기억 (memoryless) 채널을 통하여 전송된 Markov 원 (source)의 상태와 천이에 대한 사후확률 (*a posteriori* probability)을 얻기 위하여 제안되었으며 MAP 심벌 복호를 수행한다[5].

단일 부호에 대하여 BCJR 알고리즘은 심벌의 에러율을 최소화하는 알고리즘이다. 다음의 식11과 식12와 같이 터보부호 $\{x_k, y_k\}$ 을 BPSK (binary phase shift keying) 변조된 $(0 \rightarrow 1; 1 \rightarrow +1)$ $\{\mu_k, \nu_k\}$ 에 분산이 σ^2 인 서로 독립적인 AWGN $\{m_k, n_k\}$ 가 가해져서 $R_k = \{\xi_k, \eta_k\}$ 로 채널상에 전송된다.

$$\xi_k = (2x_k - 1) + m_k = \mu_k + m_k \quad (11)$$

$$\eta_k = (2y_k - 1) + n_k = \nu_k + n_k \quad (12)$$

전송된 신호 $R_k = \{\xi_k, \eta_k\}$ 가 수신된 후 복호기의 동작은 수신된 심벌 $R = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ 상에서 가장 가능성이 있는 비트 d_k 을 결정하는 것이다. 데이터 열은 2진수이므로 임의의 시간 k 에서의 입력 심벌에 대한 사후 LLR (log likelihood ratio)은 다음과 같다.

$$L(\hat{d}_k) = \log \frac{P(d_k = 1 | R)}{P(d_k = 0 | R)} = \log \frac{P(\mu_k = +1 | R)}{P(\mu_k = -1 | R)} \quad (13)$$

여기에서 $P(d_k = i | R)$ 은 수신된 데이터 열 R 상에서 $d_k = i$ ($i=0$ 또는 $i=1$)에 대한 사후확률이다. 복호기는 $L(\hat{d}_k)$ 에 대한 임계값을 통하여 정보 비트 추정치 \hat{d}_k 을 얻게된다.

$$\hat{d}_k = \begin{cases} 1 & \text{if } L(\hat{d}_k) \geq 0 \\ 0 & \text{if } L(\hat{d}_k) < 0 \end{cases} \quad (14)$$

각 구성 RSC 부호기에 대하여 그림3와 같은 트렐리스도 (trellis diagram)가 주어지므로 시간 k 에서의 사전확률 (*a priori* probability)은 다음과 같다.¹⁾

$$P(d_k) = \frac{e^{-L(d_k)/2}}{1 + e^{-L(d_k)/2}} e^{\mu_k L(d_k)/2} \quad (15)$$

$$= A_k e^{\mu_k L(d_k)/2} \quad (16)$$

여기에서

$$L(d_k) = \log \frac{P(d_k = 1)}{P(d_k = 0)} = \log \frac{P(\mu_k = +1)}{P(\mu_k = -1)} \quad (17)$$

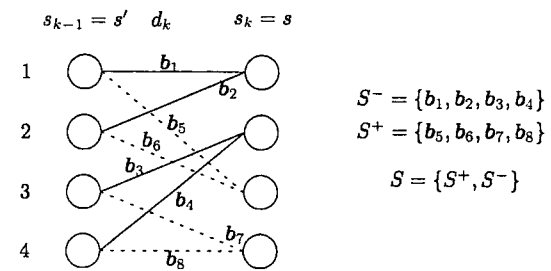


그림 3. 트렐리스도. 시간 k 에서 입력 d_k 에 대한 가지 천이들을 보여준다.

그리고 터보부호기 입력 d_k 가 주어졌을 때 수신된 데이터에 대한 조건확률 (conditional probability)은 다음과 같다.

$$p(s_k = s, R_k | s_{k-1} = s') = p(R_k | d_k) \quad (18)$$

$$= p(\xi_k, \eta_k | d_k) = p(\xi_k, \eta_k | d_k) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\xi_k - \mu_k)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\eta_k - \nu_k)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\xi_k^2 + \mu_k^2 + \eta_k^2 + \nu_k^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{\xi_k \mu_k + \eta_k \nu_k}{\sigma^2}\right) \quad (21)$$

$$= B_k \exp\left(\frac{\xi_k \mu_k + \eta_k \nu_k}{\sigma^2}\right) \quad (22)$$

여기에서 식16과 식22에 있는 A_k 와 B_k 은 $s_{k-1} = s'$

1) 사전확률과 이것의 LLR 값 사이의 다음과 같은

$$\text{관계식 } P(d_k = 1) = \frac{e^{L(d_k)}}{1 + e^{L(d_k)}} \text{ 와 } P(d_k = 0) = 1 -$$

$$P(d_k = 1) = \frac{1}{1 + e^{-L(d_k)}} \text{ 은 쉽게 증명될 수 있다.}$$

에서 $s_k=s$ 로 모든 천이에 대해서 일정하다. 따라서 가지천이확률 (branch transition probability) 은 조건확률과 사전확률의 곱으로 다음과 같이 주어진다.

$$\gamma_k(s',s) = p(s_k = s, R_k | s_{k-1} = s')P(d_k) \quad (23)$$

$$= A_k B_k \exp\left(\frac{\xi_k \mu_k + \eta_k \nu_k}{\sigma^2}\right) e^{\mu_k L(d_k)/2} \quad (24)$$

$$= A_k B_k \exp\left(\frac{\mu_k}{2}(L(d_k) + L_c \xi_k)\right) \underbrace{e^{\frac{1}{2} L_c \eta_k \nu_k}}_{\gamma_k^e(s',s)} \quad (25)$$

여기에서 $L_c = 2/\sigma^2 = 4RE_b/N_0$ 이다.²⁾

식 13은 Bayes 규칙에 의하여 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$L'(\hat{d}_k) = \log\left(\frac{P(R|d_k=1)}{P(R|d_k=0)}\right) + \log\left(\frac{P(d_k=1)}{P(d_k=0)}\right) \quad (26)$$

이것을 효율적으로 계산하기 위하여 순방향 반복식 (forward recursion)을 다음과 같이 정의한다.

$$\alpha_k(s) = p(s_k = s, R_k^k) \quad (27)$$

$$= \sum_{s' \in S} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k(s',s) \quad (28)$$

여기에서 S은 터보부호기의 트렐리스도 상의 모든 가지들의 집합이고 $\alpha_0(0)=1, \alpha(s' \neq 0)=0$ 이다. 그리고 역방향 반복식 (backward recursion)을 다음과 같이 정의한다.

$$\beta_{k-1}(s') = p(R_k^N | s_{k-1} = s') \quad (29)$$

$$= \sum_{s \in S} \beta_k(s) \gamma_k(s',s) \quad (30)$$

여기에서 $\beta_N(0)=1, \beta(s \neq 0)=0$ 이다.

결론적으로 사후 LLR은 다음과 같이 주어진다.

2) BPSK 전송인 경우 $\frac{E_c}{N_0/2} = \frac{1}{\sigma^2}$ 이다. 여기에서 $E_c = RE_b$ 은 채널비트당 에너지이다.

$$L'(\hat{d}_k) = \log \frac{p(d_k = 1 | R)}{p(d_k = 0 | R)} \quad (31)$$

$$= \log \frac{p(d_k = 1, R)}{p(d_k = 0, R)} \quad (32)$$

$$= \log \frac{\sum_{s'} p(s_{k-1} = s', s_k = s, R)}{\sum_{s'} p(s_{k-1} = s', s_k = s, R)} \quad (33)$$

$$= \log \frac{\sum_{s'} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k(s',s) \beta_k(s)}{\sum_{s'} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k(s',s) \beta_k(s)} \quad (34)$$

$$= L_c \xi_k + L(d_k) + \underbrace{\log \frac{\sum_{s'} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k^e(s',s) \beta_k(s)}{\sum_{s'} \alpha_{k-1}(s') \gamma_k^e(s',s) \beta_k(s)}}_{L_c(\hat{d}_k)} \quad (35)$$

여기에서 S^+ 은 $d_k=1$ (혹은 $\mu_k=+1$)에 의하여 취해진 가지들의 부분집합을 의미하고 S^- 은 $d_k=0$ (혹은 $\mu_k=-1$)에 의하여 취해진 가지들의 부분집합을 의미한다. 식35의 첫번째 항은 채널값이고 두 번째 항은 앞 구성 복호기에서 제공된 d_k 에 대한 사전 LLR 정보이며, 세번째 항은 다음 구성 복호기에 귀환될 외부적인 (extrinsic) 정보이다. 실제적으로 외부적인 정보는 계산된 사후 LLR 값으로부터 구성 복호기에 입력된 채널값과 사전 LLR 값을 뺀으로써 계산된다.

그림4와 같이 터보복호기를 구성하면, DEC_1 은 다음을 계산한다. 그림 중에서 Π 은 인터리버를 의미하고 Π^{-1} 은 이것의 역과정인 디인터리버를 의미한다.

$$L(\hat{d}_k) = L_c \xi_k + L_{e2}(\hat{d}_k) + L_{e1}(\hat{d}_k) \quad (36)$$

여기에서 $L_{e2}(\hat{d}_k)$ 은 DEC_2 에서 DEC_1 로 귀환된 외부적인 정보이다. 그리고 세번째 항인 $L_{e1}(\hat{d}_k)$ 은 DEC_1 에서 DEC_2 로 귀환될 외부적인 정보이다. 그리고 DEC_2 은 마찬가지로 디인터리버를 통

과하면 다음을 계산한다.

$$L'(\hat{d}_k) = L_c \xi_k + L_{e1}(\hat{d}_k) + L_{e2}(\hat{d}_k) \quad (37)$$

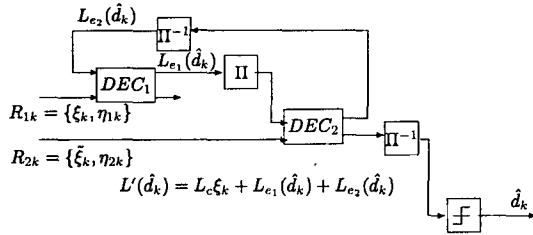


그림 4. 터보복호기.

그림5는 이것의 대한 E_b/N_0 에 대한 BER 성능을 보여주는 것이다. 반복을 함에 따라 * 표시의 곡선으로부터 o 표시의 곡선으로 성능이 개선됨을 보여준다. 10^4 에서 10^6 의 인터리버 크기에서 Hamming 부호나 낮은 밀도 패리티 검출 부호 같은 구성 부호로도 10^{-5} 의 BER에서 부호율 $R=1/2$ 일 때 Shannon 한계에서 0.5 dB, 그리고 부호율 $R=0.98$ 근처에서는 0.27 dB 차이를 보이고 있다. 그렇지만 BER이 10^{-5} 과 10^{-6} 사이에서 마루(floor)가 생김에 유의하라. 이것은 뒤에 밝혀진 사실이다. 더 좋은 성능을 얻기 위해서는 Reed-Solomon 부호기 같은 외부 부호기(outer encoder)와 직렬로 연결(serial concatenation)시켜서 터보부호기를 사용해야 한다는 것을 의미한다. 또한 구성 복호기 사이에 정귀환(positive feedback)을 사용하기 때문에 외부적인 LLR 값이 발산될 수 있기 때문에 실험적으로 이 값을 적당히 줄여주는(scaling) 과정이 필요하다.

3. 터보등화기

터보등화기는 1995년 Douillard, Jézéquel,

Berrou, Picart, Didier, 및 Glavieux 등에 의하여 수신기 필터 출력에서의 ISI (intersymbol interference)를 극복하기 위하여 제안되었다[3].

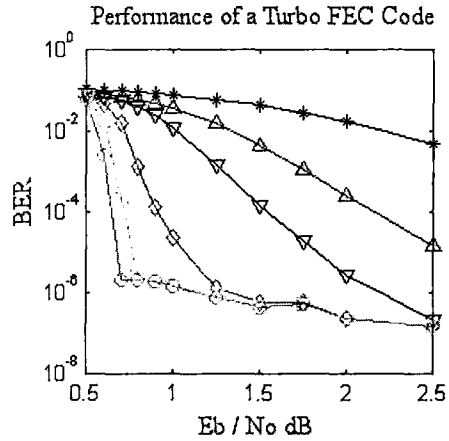


그림 5. 터보부호의 E_b/N_0 에 대한 BER 성능.

변조기(modulator), 전송 채널, 및 복조기(demodulator)는 등가적인 필터로 모델링될 수 있으므로 이것을 내부 부호기(inner encoder)로 간주하고 송신기쪽의 원래의 부호기는 외부 부호기(outer encoder)로 간주하여 직렬로 연결(serial concatenation)시킨 터보부호 방식으로 앞 구성 복호기에서 검출된 정보를 다음 구성 복호기의 사전 정보로 귀환시키는 이 과정을 충분히 반복하면서 원하는 BER을 얻을 수 있다.

3.1 터보등화기 모델

전체적인 터보등화기의 모델을 그림6에 보였다. 데이터 열 u 이 절2.2에서 설명한 터보부호기를 통과하여 BPSK 변조되어 새로운 열 x 이 얻어진다. 채널 인터리버 I_c 을 거친 후 열 x' 이 얻어지고 대역제한된 ISI 채널을 지나 AWGN이 더해져서 터보등화기에 열 y 로 수신된다.

ISI를 가진 채널이 선형 (linear)이라면 이산적인 임펄스응답 (impulse response)은 벡터 $\mathbf{h}=[h_0, h_1, \dots, h_L]^T$ 로 나타낼 수 있다. 여기에서 'T'

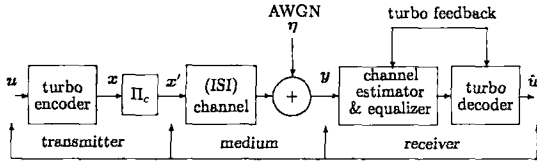


그림 6. 터보등화기 모델.

은 전치 (transpose)을 의미한다. 시간 t 에서 선형 필터의 출력은 다음과 같이 주어진다.

$$y_t = \mathbf{h}^T \mathbf{x}_t + \eta_t = \sum_{i=0}^L h_i x_{t-i} + \eta_t \quad (38)$$

여기에서 $\mathbf{x}_t=[x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-L}]^T$ 이다.

데이터는 길이 T 인 관찰값 (observation) $\mathbf{y}=(y_1, y_2, \dots, y_T) = \mathbf{y}^T$ 상에서 블록으로 처리된다. 채널 추정기 (channel estimator)은 채널계수와 AWGN 분산을 추정하고, 채널등화기는 터보부호화된 열을 검출하고, 터보부호기는 반복부호 방식으로 전송된 정보열을 추정한다.

터보등화기를 그림7에 보였다. 채널 디인터리버를 거치고 디멀티플렉스된 (demultiplexed) 외부적인 LLR 값들 $L_c^e(\hat{x}_0)$, $L_c^e(\hat{x}_1)$, 및 $L_c^e(\hat{x}_2)$ 은 정보 비트, 첫번째 구성 RSC 부호기에 의한 패러티 비트, 및 두번째 구성 RSC 부호기에 의한 패러티 비트 등에 대한 채널추정기 및 채널등화기에 의하여 제공된 외부적인 LLR 값들을 의미한다. 그리고 $L_c^d(\hat{x}_0)$, $L_c^d(\hat{x}_1)$, 및 $L_c^d(\hat{x}_2)$ 은 터보부호기에서 계산된 외부적인 LLR 값들로서 다시 멀티플렉스된 채널 인터리버를 거쳐 채널추정기 및 채널등화기로 귀환된다. 이 과정을 충분히 반복하면 원하는 BER을 얻을 수 있다.

3.2 채널추정기와 채널등화기에 대한 MAP 알고리즘

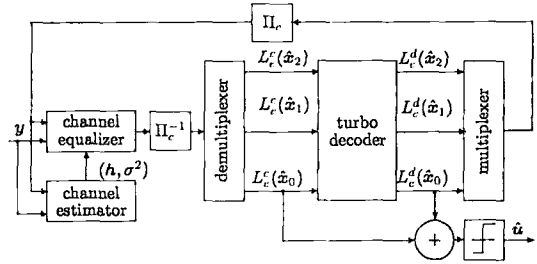


그림 7. 터보등화기.

채널추정기 및 채널등화기에다 터보부호기에서 사용한 같은 MAP 알고리즘을 사용할 수 있다 [4]. 채널추정기는 채널 계수와 AWGN 분산을 동시에 추정하는 것이 필요하다. 그러므로 추정할 파라미터는 $\theta=(\mathbf{h}, \sigma^2)$ 이다. $p(\mathbf{y}; \theta)$ 을 파라미터 벡터 θ 로 지시된 (indexed) 관찰값 열의 확률밀도함수 (probability density function)라 하자. 이것은 역시 관찰값 열 \mathbf{y} 와 파라미터 θ 에 관련된 사후 우값 (likelihood)이다. 전송된 가지 열 \mathbf{x} 은 수신기에서 이용될 수 없으므로 평균 우값을 고려해야 한다.

$$\Lambda(\mathbf{y}; \theta) = p(\mathbf{y}; \theta) = \sum_{\mathbf{x}} \Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta) \quad (39)$$

여기에서 $\Lambda(\mathbf{y}, \mathbf{x}; \theta)$ 은 어떤 가지 열 \mathbf{x} 이 주어졌을 때 \mathbf{x} 의 사전확률 $P(\mathbf{x})$ 로 가중화된 (weighted) 조건 우값 (conditional likelihood)을 나타낸다. 최우 (maximum likelihood) 추정치 $\hat{\theta}$ 은 평균 우값을 최대화시킨다.

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta} \Lambda(\mathbf{y}; \theta) \quad (40)$$

이 해는 반복적인 (iterative) EM (expectation-maximization) 알고리즘을 사용하면 구할 수 있다. 추정치 $\hat{\theta}$, 관찰값 열 \mathbf{y} , 및 채널의 트렐리스도가 주어졌을 때, 터보부호화된 열 \mathbf{x} 을 검출할 수

있다.

요약하면 알고리즘은 다음과 같이 주어진다.

1. $\{\alpha_t(j), t=2, 3, \dots, T+1; j=1, 2, \dots, 2^{L-1}\}$ 을 계산하기 위해 $\alpha_1(j)=P(s_1=j)=1/2^{L-1}$ 로 두고 다음의 순방향 재귀식을 사용하라.

$$\alpha_t(j) = P(s_t = j) p(y_t^{-1} | s_t = j) \quad (41)$$

$$= \sum_i \gamma_{t-1}^c(i, j) \alpha_{t-1}(i) \quad (42)$$

여기에서 s_t 은 시간 t 에서의 상태이고, 가지천 이확률 $\gamma_t^c(j, i)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\gamma_t^c(j, i) = P(s_{t+1} = i | s_t = j) p(y_t | s_t = j, s_{t+1} = i) \quad (43)$$

2. $\{\beta_t(j), t=T, T-1, \dots, 1; j=1, 2, \dots, 2^{L-1}\}$ 을 계산하기 위해 모든 i 에 대해 $\beta_{T+1}(i)=1$ 로 두고 다음의 역방향 재귀식을 이용하라.

$$\beta_t(j) = p(y_t^T | s_t = j) \quad (44)$$

$$= \sum_i \gamma_t^c(j, i) \beta_{t+1}(i) \quad (45)$$

3. $\{\Lambda(y_1^T, x_t = \mathbf{b}_n), t=1, 2, \dots, T; n=1, 2, \dots, 2^L\}$ 을 계산하기 위해 다음을 이용하라.

$$\Lambda(\mathbf{y}, x_t) = \alpha_t(j) \gamma_t^c(j, i) \beta_{t+1}(i) \quad (46)$$

여기에서 \mathbf{b}_n 은 전송된 심벌 x_t (\mathbf{x}_t 로도 나타낼 수 있음)에 의해 취해진 $s_t=j$ 에서 $s_{t+1}=i$ 로 천이 하는 가지들 중의 하나이다.

4. θ 의 새로운 추정치 $\hat{\theta}$ 을 계산하기 위해 다음을 이용하라.

$$\mathbf{h}^{(i+1)} = \left(\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^{2^L} \Lambda(y_1^T, x_t = \mathbf{b}_n; \theta^{(i)}) \mathbf{b}_n^* \mathbf{b}_n^T \right)^{-1} \times \sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^{2^L} \Lambda(y_1^T, x_t = \mathbf{b}_n; \theta^{(i)}) y_t \mathbf{b}_n^* \quad (47)$$

$$(\sigma^2)^{(i+1)} = \frac{\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^{2^L} \Lambda(y_1^T, x_t = \mathbf{b}_n; \theta^{(i)}) |y_t - (\mathbf{h}^{(i+1)})^T \mathbf{b}_n|^2}{\sum_{t=1}^T \sum_{n=1}^{2^L} \Lambda(y_1^T, x_t = \mathbf{b}_n; \theta^{(i)})} \quad (48)$$

여기에서 '*'은 복소수공액 (complex conjugate)을 의미한다.

존재하는 천이에 대하여 가지천이확률 $\gamma_t^c(j, i)$ 은 사전확률 $P(x_t)$ 와 천이확률 $p(y_t | s_t=j, s_{t+1}=i)$ 의 곱으로 나타낼 수 있다.

$$\gamma_t^c(j, i) = p(y_t | s_t = j, s_{t+1} = i) P(x_t) \quad (49)$$

채널추정기 및 채널등화기에 있어서 x_t 로 매겨진 (labeled) 천이 $\gamma_t^c(j, i)$ 은 다음과 같이 계산된다.

$$\gamma_t^c(j, i) = [\gamma_t^c]_c(j, i) \exp\left(\frac{1}{2} x_t L_c^d(\hat{x}_t)\right) \quad (50)$$

여기에서 $L_c^d(\hat{x}_t)$ 는 다음 절3.3에서 다루어질 터보부호기로부터 사전 LLR 정보로 제공되는 맥스된 외부적인 정보이다. 그리고 $[\gamma_t^c]_c(j, i)$ 은 다음과 같다.

$$[\gamma_t^c]_c(j, i) = \frac{1}{\pi \sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} |y_t - (\mathbf{h}^{(i+1)})^T \mathbf{b}_n|^2\right) \quad (51)$$

심벌 오차를 최소화하는 최적의 등화기는 판단 함수 (decision function) $\Lambda(y_1^T, x_t; \hat{\theta})$ 을 최대로 하는 비트 $x_t=+1$ 나 $x_t=-1$ 중의 하나를 선택하는 것과 같다. 즉,

$$x_t = \arg \max_{\substack{x_t=+1 \\ \text{or} \\ x_t=-1}} \Lambda(y_1^T, x_t; \hat{\theta}). \quad (52)$$

$\Lambda(y_1^T, x_t; \hat{\theta})$ 은 다음과 같이 계산되어진다. 만약 그림3와 같이 모든 가지들의 집합 S 을 입력 심벌 $x_t=+1$ 와 $x_t=-1$ 에 따라 x_t 에 의해 취해진 가지들의 부분집합 S^+ 와 S^- 으로 나누면 다음과 같이 쓸 수

있다[4].

$$\Lambda(y_i^T, x_i = \pm 1; \hat{\theta}) = \sum_{b_n = \pm 1} \Lambda(y_i^T, x_i = b_n; \hat{\theta}) \quad (53)$$

ISI 채널은 비체계적인 (non-systematic) 부호기로 간주되므로 채널등화기 출력에서 채널값과 외부적인 정보를 분리할 수 없다. 채널등화기에서 사후 LLR은 다음과 같이 계산된다.

$$L^c(\hat{x}_i) = L_e^d(\hat{x}_i) + \log \frac{\sum_{\substack{(s_j = j, s_{j+1} = i) \\ (x_j = -1)}} \alpha_j(j)[\gamma_j^c]_c(j, i)\beta_{j+1}(i)}{\sum_{\substack{(s_j = j, s_{j+1} = i) \\ (x_j = 1)}} \alpha_j(j)[\gamma_j^c]_c(j, i)\beta_{j+1}(i)} \quad (54)$$

3.3 터보복호기에 관한 MAP 알고리즘

채널추정기 및 채널등화기 MAP 알고리즘과 마찬가지로 터보복호기 MAP 알고리즘은 채널추정기 및 채널등화기로부터 제공된 사전 LLR 정보를 바탕으로 하여 터보부호화된 $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ 에 관한 사후 LLR 값들을 계산한다. 이것을 그림8에 보였다. 여기에서 \mathbf{x}_0 은 디머스된 길이 N 의 정보 비트 열을, \mathbf{x}_1 은 첫번째 구성 부호기로부터의 패리티 비트 열을, 그리고 \mathbf{x}_2 은 두번째 구성 부호기로부터의 패리티 비트 열을 각각 의미한다. 그리고 x_{0k} 은 \mathbf{x}_0 중의 k 번째 샘플을, x_{1k} 은 \mathbf{x}_1 중의 k 번째 샘플을, 그리고 x_{2k} 은 \mathbf{x}_2 중의 k 번째 샘플을 각각 의미한다.

첫번째 구성 부호기 MAP의 가지천이 확률은 다음과 같이 계산된다.

$$[\gamma_k^e]_d^1(j, i) = \exp\left(\frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{0k})x_{0k} + \frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{1k})x_{1k}\right) \times \exp\left(\frac{1}{2} L_{e2}^d(\hat{x}_{0k})x_{0k}\right) \quad (55)$$

그리고 두번째 구성 부호기 MAP의 가지천이 확률은 다음과 같이 계산된다.

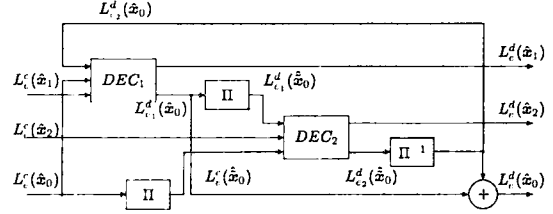


그림 8. 터보등화기 내의 터보복호기. 정보 비트뿐만 아니라 각 부호기에서의 패리티 비트에 대한 외부적인 LLR 값들을 계산하는 부분이 필요하다.

$$[\gamma_k^e]_d^2(j, i) = \exp\left(\frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{0k})\tilde{x}_{0k} + \frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{2k})x_{2k}\right) \times \exp\left(\frac{1}{2} L_{e1}^d(\hat{x}_{0k})\tilde{x}_{0k}\right) \quad (56)$$

여기에서 \tilde{x}_{0k} 은 정보 비트 x_{0k} 의 인터리버 Π을 거친 신호의 k 번째 샘플이다.

첫번째 구성 부호기는 영 (zero) 상태에서 시작하고 영 상태에서 끝나도록 가정하므로 다음과 같이 순방향역방향 재귀식은 초기화된다.

$$\begin{cases} \alpha_1^1(i) = \beta_{N+1}^1(i) = 1 & \text{for } i = 1 \\ \alpha_1^1(i) = \beta_{N+1}^1(i) = 0 & \text{for } i \neq 1 \end{cases} \quad (57)$$

정보 비트에 있어서 첫번째 구성 부호기의 사후 LLR 출력 $L^d(\hat{x}_{0k})$ 은 채널추정기 및 채널등화기로부터의 외부적인 LLR 값 $L_e^c(\hat{x}_{0k})$, 사전 LLR 정보 $L_{e2}^d(\hat{x}_{0k})$, 및 외부적인 LLR 정보 $L_{e1}^d(\hat{x}_{0k})$ 의 합으로 다음과 같이 계산된다.

$$L^d(\hat{x}_{0k}) = L_e^c(\hat{x}_{0k}) + L_{e2}^d(\hat{x}_{0k}) + \log \frac{\sum_{\substack{(s_j = j, s_{j+1} = i) \\ (x_{0k} = +1)}} \alpha_k^1(j)[\gamma_k^e]_d^1(j, i)\beta_{k+1}^1(i)}{\sum_{\substack{(s_j = j, s_{j+1} = i) \\ (x_{0k} = -1)}} \alpha_k^1(j)[\gamma_k^e]_d^1(j, i)\beta_{k+1}^1(i)} \quad (58)$$

여기에서

$$[\gamma_k^e]_d^{i1}(j, i) = \exp\left(\frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{1k}) x_{1k}\right). \quad (59)$$

그리고 두번째 구성 복호기의 사후 LLR 출력은 다음과 같다.

$$L^d(\hat{x}_{0k}) = L_e^c(\hat{x}_{0k}) + L_{e1}^d(\hat{x}_{0k}) + \underbrace{\log \frac{\sum_{\substack{(s_k=j, s_{k+1}=i) \\ \hat{x}_{0k}=+1}} \alpha_k^2(j) [\gamma_k^e]_d^{i2}(j, i) \beta_{k+1}^2(i)}{\sum_{\substack{(s_k=j, s_{k+1}=i) \\ \hat{x}_{0k}=-1}} \alpha_k^2(j) [\gamma_k^e]_d^{i2}(j, i) \beta_{k+1}^2(i)}}_{L_{e2}^d(\hat{x}_{0k})}} \quad (60)$$

여기에서

$$[\gamma_k^e]_d^{i2} = \exp\left(\frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{2k}) x_{2k}\right). \quad (61)$$

마찬가지로 패리티 비트에 있어서 첫번째 구성 복호기의 사후 LLR 출력은 다음과 같이 계산된다.

$$L^d(\hat{x}_{1k}) = L_e^c(\hat{x}_{1k}) + \underbrace{\log \frac{\sum_{\substack{(s_k=j, s_{k+1}=i) \\ \hat{x}_{1k}=+1}} \alpha_k^1(j) [\gamma_k^e]_c^{p1}(j, i) \beta_{k+1}^1(i)}{\sum_{\substack{(s_k=j, s_{k+1}=i) \\ \hat{x}_{1k}=-1}} \alpha_k^1(j) [\gamma_k^e]_c^{p1}(j, i) \beta_{k+1}^1(i)}}_{L_e^d(\hat{x}_{1k})}} \quad (62)$$

여기에서

$$[\gamma_k^e]_c^{p1}(j, i) = \exp\left(\frac{1}{2} L_{e2}^d(\hat{x}_{0k}) x_{0k} + \frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{0k}) x_{0k}\right). \quad (63)$$

그리고 두번째 구성 복호기의 사후 LLR 출력은 다음과 같다.

$$L^d(\hat{x}_{2k}) = L_e^c(\hat{x}_{2k}) + \underbrace{\log \frac{\sum_{\substack{(s_k=j, s_{k+1}=i) \\ \hat{x}_{2k}=+1}} \alpha_k^2(j) [\gamma_k^e]_c^{p2}(j, i) \beta_{k+1}^2(i)}{\sum_{\substack{(s_k=j, s_{k+1}=i) \\ \hat{x}_{2k}=-1}} \alpha_k^2(j) [\gamma_k^e]_c^{p2}(j, i) \beta_{k+1}^2(i)}}_{L_e^d(\hat{x}_{2k})}} \quad (64)$$

여기에서

$$[\gamma_k^e]_c^{p2}(j, i) = \exp\left(\frac{1}{2} L_{e1}^d(\hat{x}_{0k}) x_{0k} + \frac{1}{2} L_e^c(\hat{x}_{0k}) x_{0k}\right). \quad (65)$$

채널추정기 및 채널등화기에 정보 비트에 대한 사전 정보로 귀환될 외부적인 정보는 두번째 단에서 다음과 같이 두 구성 복호기로부터의 외부적인 정보들의 합으로 계산된다.

$$L_c^d(\hat{x}_{0k}) = L_{e1}^d(\hat{x}_{0k}) + L_{e2}^d(\hat{x}_{0k}) \quad (66)$$

그림9은 채널에 대한 정보가 미리 주어졌을 때의 성능이고 그림10은 채널에 대한 정보가 전혀

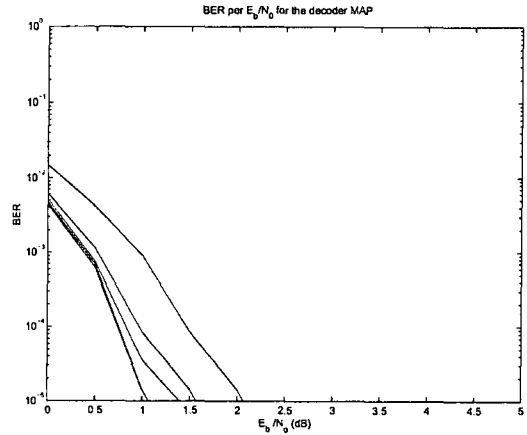


그림 9. 채널에 대한 정보가 미리 주어졌을 때의 터보 등화기의 성능.

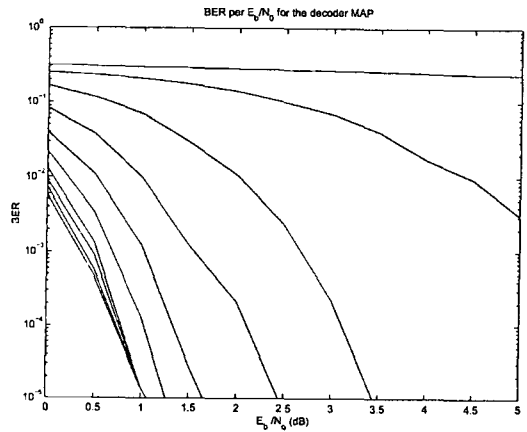


그림 10. 채널에 대한 정보가 주어지지 않았을 때의 터보등화기의 성능.

주어짐이 없이 채널추정기가 추정해가면서 얻어진 성능이다. 후자의 경우 더 많은 반복 횟수가 필요하다는 것을 알 수 있다[6].

4. 관련 웹사이트

University of Virginia의 다음 사이트 http://www.ee.virginia.edu/CSL/turbo_codes/을 방문하면 터보부호를 연구하는 관련된 다음과 같은 외국 웹사이트들에 링크시킨 페이지가 있으므로 쉽게 최신의 정보를 수집할 수 있다.

- ENST de Bretagne (C. Berrou), France
- JPL / TDA Progress Reports (D. Divsalar), USA
- University of South Australia (S. A. Barbulescu), Australia
- West Virginia University (M. C. Valenti), USA
- Politecnico di Torino (S. Benedetto), Italy
- LNT (J. Hagenauer), Germany
- Caltech (R. J. McEliece), USA
- University of Surrey (A. Kondozi), UK
- University of Cambridge (D. J. MacKay), UK
- Georgia Institute of Technology (K. Narayanan), USA
- Technical University of Denmark (J. Anderson), Denmark
- DLR (P. Robertson), Germany
- University of Notre Dame (J. Costello), USA
- University of Tokyo: Error Correcting Codes (ECC) Home Page, (lots of great coding software!)

또한 이 곳에서 MATLAB으로 구현된 데모프

로그램을 구할 수 있다. C++ 프로그램은 마지막의 University of Tokyo의 ECC 사이트에서 구할 수 있다.

5. 결론

본 논문에서는 AWGN 채널상에서 Shannon 한계에 근접하는 오차정정 능력을 갖고 있는 터보부호와 ISI 채널 상에서 터보부호 원리를 적용한 터보등화기에 대해서 이론적으로 살펴보았다.

터보부호와 터보등화기는 반복횟수를 증가시킴으로써 더 좋은 BER 성능을 가져올 수 있다. 비록 터보부호가 최적의 성능을 보이지만 구현이 복잡하고 인터리버 크기와 반복횟수에 따른 내부 지연 등으로 실시간(real-time) 처리의 어려움이 있다. 이 문제들을 극복하기 위한 연구가 계속되고 있다.

참고 문헌

- [1] B. Sklar, "A Primer on Turbo Code Concepts", *IEEE Commun. Mag.*, pp. 94-102, Dec. 1997.
- [2] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, "Near Shannon Limit Error-Correcting and Decoding: Turbo-Codes (1)", *Proc. IEEE ICC*, pp. 1064-1070, May 1993.
- [3] C. Douillard, M. Jézéquel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux, "Iterative Correction of Intersymbol Interference: Turbo-Equalization", *European Trans. Telecommun.*, Vol. 6, pp. 507-511, Sept.-Oct. 1995.
- [4] G. K. Kaleh and R. Vallet, "Joint Parameter Estimation and Symbol Detection for Linear or Nonlinear Unknown Channels", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 42, pp. 2406-2413, July 1994.
- [5] L. R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, "Optimal Decoding of Linear Codes for Mini-

mizing Symbol Error Rate”, *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 20, pp. 248-287, Mar. 1974.

[6] P. Ha and B. Honary, “Improved Turbo Detector”, *Proc. IEEE VTC-Spring*, May 2000.



하 판 봉

- 1981년 2월 부산대학교 전기공학과 (학사)
 - 1983년 2월 서울대학교 전자공학과 (석사)
 - 1993년 2월 서울대학교 전자공학과 (박사)
 - 1983년 3월 ~ 1985년 2월 전자통신연구소 (연구원)
 - 1998년 2월 ~ 1999년 8월 Lancaster Univ. (교환교수)
 - 1987년 3월 ~ 현재 창원대학교 전자공학과 (교수)
 - 관심분야 : 신호처리, 인공지능경망, 통신시스템
-
-