

## 예비 초등 교사들의 분수 연산에 관한 내용적 지식과 교수학적 지식 수준에 대한 연구: 교사교육적 관점

서 관 석\* · 전 경 순\*\*

### I. 서론

#### 1) 연구의 필요성

초등 학교 예비 교사들은 '수학적 지식'과 '수학을 가르친다' 라는 두 주제를 어떻게 이해하고 있을까? 본 논문은 교사 교육 프로그램에서 다루어지고 있는 내용적 지식(Subject Matter Knowledge; SMK)으로서의 수학과, 이러한 지식을 예비 교사들이 어떻게 가르칠 것인지, 그들의 교수학적 지식(Pedagogical Content Knowledge; PCK)을 탐구하기 위해 실시된 연구의 내용을 담고 있다. 먼저 다음의 인용문들을 살펴보자. 이 인용문들은 현재 전주 교육 대학에 재학 중인 예비 초등 교사들이 자연수를 분수로 나눈다는 개념에 대한 이해와 분수를 분수로 나누는 계산을 어떻게 아이들에게 가르칠 것인지에 대해 설명한 것 중 발췌한 것이다<sup>1)</sup>.

(최민희, 2000년 3월):  $3 \div 1/2$ 을 설명하기 위해 나는 다음과 같은 예문을 들겠습니다. "영희는 봉수와 말순이가 빵 하나를 사이좋게 반씩 나누어 먹는 것을 보고 영희가 가지고 있는 세 개의 빵을 친구들과 나누어 먹어야겠다고 생각했습니다. 한 사람이 반개씩 빵을 나누어 먹는다고 할 때 영희가 가지고 있는 빵은 총 몇 명이 나누어 먹을 수 있을까요?"

(이기훈, 2000년 4월):  $3 \div 1/2$ 에서... (아동들이) 배운 내용은 "자연수÷자연수" 인데 자연수를 분수로 나눈다는 생각은 정말 이해가 안갈 것이고... 실제로 나도 이해를 하지 못했다.

(서지영, 2000년 3월):  $3/5 \div 2/7 = 3/5 \times 7/2$ 와 같이 "분수 ÷ 분수"는 "분수 × 1/분수" 이 된다. 그러므로 이것을 풀면  $21/10$ 이 된다.

(김소진, 2000년 4월):  $3/5 \div 2/7$ 의 계산은  $3/5 \times 7/2 = 21/10$ . 분수의 나눗셈은 잭수를 역수로 한 뒤에 곱셈으로 바뀌어서 계산한다. 개념을 설명하는데 소요되는 시간이 너무 많을 것 같아서 그냥 기계적으로 암기하도록 하는 것이 더 효율적인 것 같다.

위 글들을 서술한 이들 4명의 예비 교사들은 여느 교사들과 비교해 특별한 점이 없는, 그리고 현재 전주 교육 대학에서 교사 준비 과정의 학생들을 잘 대표해 주는 표준집단이며, 따라서 대표성을 띄고 있다고 말할 수 있다. 이러한 상황에서 이들 예비 교사들이 설명해 주는 분수의 연산에 관련한 수학적 지식(SMK)과 교수학적 지식(PCK)은 그 이해 정도와 방식에 있어 매우 다름을 알 수 있다. 즉, 일반적으로 초등 학교 과정을 준비하고 있는 예비 교사들의 수학적 내용에 대한 지식과 어떻게 가르쳐야 할 것인가에 대한 교수학적 지식의 이해와 그 구성은 매우 다양하면서도 복잡한 수준을 보이

\* · \*\* 전주교대

1) 논문에 사용된 이름들은 모두 가명입니다.

고, 그 이해를 위해서는 전문적인 연구 과정이 필요한 분야라 생각된다.

## 2) 예비 초등 교사들의 분수에 대한 내용적 지식과 교수학적 지식

두 번째에 인용된 이기훈 예비 교사는 솔직하게 자연수를 분수로 나눈다는 개념을 본인이 이해하지 못한다고 기술하고 있다. 그러나 여기서 우리가 주목해야 할 점은 이 예비 교사의 경우  $3 \div 1/2$ 의 계산을 실행 할 수 없다는 것이 아니라 (실제로 그는 연구자가 계산한 값을 물어보았을 때 6이라고 옳게 대답하였다),  $3 \div 1/2$ 을 설명할 수 있는 수학적 상황을 서술하지 못했다는 것이다. 이기훈 예비교사에게 있어  $3 \div 1/2$ 이 담고 있는 수학적 내용은 그가  $3 \div 1/2$ 의 답이 6이라는 계산을 할 수 있다는 것과는 별개로 해결되지 못한 내용적 지식에의 불완전한 도달을 의미한다. 이기훈 예비 교사의 경우는 Ball(1990)이 예비 교사들을 대상으로 실시한 수학적 지식(SMK)에 관한 한 연구와 밀접히 연결된다. 그녀는 이 연구에서 예비 교사들은 본인들이 수학을 전공하고 있을 경우 그 과목에서는 매우 발달된 수준의 수학적 지식을 소유하고 있으며, 따라서 일선 학교에서 가르치는데 필요한 내용으로써의 수학적 지식은 완벽한 형태로 보유하고 있다고 믿고 있으나, 실제로 이들은 교사로서 필요한 기본적인 수학적 내용도 습득하고 있지 못하는 상태가 많다는 것을 잘 보여 주었다. 실제로 교사 교육 프로그램에서 중요한 한 강조 분야는 정확한 SMK의 함양이다.

인용문의 세 번째인 서지영 예비 교사와 네 번째인 김소진 예비 교사의 경우를 살펴보자. 김소진 예비 교사는  $3/5 \div 2/7$ 의 계산은  $3/5 \times 7/2$ 로 바꾸어  $21/10$ 이라는 답을 얻을 수 있을

것이라는 대답과 함께, 분수의 나눗셈은 잣수를 역수로 한 뒤에 곱셈으로 바꿔서 계산한다는 알고리즘을 아동들에게 가르치는 것이 그 속에 포함된 개념을 가르치는 것보다 효과적일 것이라고 말하였다. 김소진 예비 교사의 설명과 세 번째의 서지영 예비 교사의 설명은 알고리즘을 강조한다는 면에서는 유사해 보이나, 그 교수학적 방법의 선택에 대한 이유는 절대적 차이가 있다. 서지영 예비 교사에게 있어 분수의 역수를 취해 곱한다는 선택이 절대적이라면, 김소진 예비 교사는 다른 교수학적 방법의 고려도 가능하나, 다른 방법들이 아동들에게 더 많은 혼돈을 가져다 줄 수 있을 것이라고 스스로 믿고 있으며, 이는 그녀 자신이 가지고 있는 분수 개념에 대한 이해의 어려움의 정도를 표현해 준다고 하겠다.

이들 예비 교사들의 생각은 전반적으로 예비 교사들이 가지고 있는 ‘수학을 가르친다’(PCK)는 것은 무엇인가에 대한 두 가지 태도를 잘 반영해 준다고 생각된다. 첫째, 예비 교사들은 일반적으로 “수학에서의 알고리즘은 가장 효율적이다(Stoldolsky, 1988)”라고 믿는다. 둘째, 예비 교사들은 그들 스스로 수행할 수 있는 많은 수학적 연산들에 대한 지식을 갖는 것은 매우 중요하게 생각하는 것에 반해, 앞으로 가까운 미래에 교사가 되었을 때에 어떻게 그러한 지식들을 아동들이 개념적으로 잘 이해할 수 있도록 돕고, 지도할 수 있는가와 같은 교수학적 지식의 중요성과 또한 그러한 교수학적 지식이 아동의 수학 학습을 증진시킬 수 있다는 연계성의 관계를 인식하지 못하고 있다 (Fennema et al., 1996). 비교적 옳은 답을 기술했다고 하는 최민희 예비 교사와 서지영 예비 교사의 설명에 있어서도 우리는 가르치려는 내용으로써의 수학적 지식(SMK)과 어떻게 가르칠 것인가와 같은 교수학적 지식(PCK)에 대한 많은 토론

을 벌일 수 있었다.

## II. SMK 와 PCK에 대한 이론적 배경

### 1) 분수의 나눗셈과 연관된 SMK와 PCK

많은 예비 교사들은 수학이라는 과목과 이를 앞으로 어떻게 가르칠 것인가라는 주제에 대하여 다음과 같이 생각할지도 모른다: “내용적 지식(SMK)으로서의 수학은 교육대학의 수학 과목을 수강하며 쌓을 수 있고, 어떻게 가르칠 것인가라는 방법론적인 문제(PCK)는 그러한 과목들을 수강하며 그리고 혹은 교생 실습과 같은 교수 경험을 통해 배울 수 있을 것이다.” 혹은, 어떤 예비 교사들은 초등 교육에서 가르쳐지는 수학적 내용은 지금까지 받아온 초, 중, 고의 수학적 내용만으로도 충분하다고 생각할 수도 있다. 이러한 주제에 대해, 많은 수학 교육학자들은 내용적 지식, 그리고 교수학적 지식 모두가 이러한 단순한 기대로는 도달할 수 없다는 것을 분명히 하고 있다. 분수개념과 관련된 현재까지의 많은 연구들은 주로 아동들이 분수 개념을 배울 때 어려워하는 SMK에 대한 것들이 많은데, 이는 분수와 분수의 연산에 관련된 분야가 초등학교 수준에서 가장 기계적이면서 가장 개념적인 이해를 수반하지 않는 내용이기 때문이기도 하다 (예: Fendel, 1987; Payne, 1976). 이러한 연구들은 주로 아동들이 이러한 연산에서 특히 다른 연산에 비교해 매우 수행 속도가 느리다든지, 분수의 나눗셈을 지도할 때 사용되는 표준 알고리즘의 내용을 이해하지 못하고, 따라서 많은 오류들을 범한 다와 같은 사실들을 발견해 왔다. 따라서 예비

초등 교사들이 이러한 오류들을 이해하는 것은 미래에 아동들에게 분수의 나눗셈 계산을 할 수 있도록 가르칠 수 있는 내용적, 교수학적 지식의 한 바탕이 된다고 할 수 있다.

### 2) SMK에 대한 이해: $a \div b$ 의 상황과 연관된 분수 개념

Tirosh (1999)가 설명한 예비 교사들이 알아야 할 분수 개념이라는 SMK와 관련된 교수학적 지식의 한 예를 살펴보면, Tirosh는 교사들이 분수로 나눈다는 계산을 할 줄 아는 것과는 별도로 아동들이 분수로 나누기를 실행할 때 저지르는 3가지의 전형적인 오류들을 이해하고 있어야 한다고 하였다. 그 이유는 분수로 나눈다는 수학적 내용을 자신들이 가르치려는 아동들의 이해 수준에 맞도록 변형시킬 수 있는 능력을 소유하는데 이 3가지 오류들을 이해하는 것이 핵심적이라고 설명하는 것이다. 그 3가지 오류들은 첫째, 알고리즘에 근거한 오류, 둘째 직관에 근거한 오류, 셋째 기존지식에 근거한 오류이며 자세한 내용은 다음과 같다. (Tirosh, 1999, pp. 7-8)

① 알고리즘에 근거한 오류 - 분수 나눗셈의 표준 알고리즘인 ‘젯수의 역수를 취해 곱한다’는 것을 암기하는 과정에서 나타나는 오류이다. 예를 들어,  $3 \div 1/5$ 과 같은 계산에서  $1/3 \times 1/5$ 이라고 계산하는 경우가 많은데, 이는 알고리즘을 외우는 과정에서 젯수의 역수를 취해 곱한다는 것을 기억하지 못해, 대신 피젯수의 역수를 취한 것이다.

② 직관에 근거한 오류 - 이 오류는 분수에 대한 이해가 ‘전체-부분 모델’에만 한정되어 있을 때 특히 많이 나타난다. 예를 들어,  $a \div b$ 의 상황에서, 젯수는 반드시 정수여야 한다고 생각하거나 (즉, 분수로 나눈다는 것을 이해하지

못한다), 또는 젓수는 반드시 피젓수보다 작아야 한다고 생각하는 경우이다. 나눗셈을 통해 나타난 결과는 반드시 젓수보다 작아야 한다고 생각하는 경우도 이에 해당된다. 많은 경우  $3 \div 1/5$ 의 계산에서  $1/5$ 로 나눈다는 것을 개념적으로 이해하지 못하고, 이의 계산의 결과를  $3 \div 5$ 의 계산과 동일시하게 된다.

③ 기존 지식에 근거한 오류 - 분수의 개념에 대한 불확실한 이해를 하거나, 다른 연산의 성질과 관련지어 생각함으로써 발생하는 오류를 말하는데, 예를 들어  $1 \div 1/2$ 의 계산을 실행함에 있어 덧셈과 곱셈에서 교환 법칙이 성립하듯이 나눗셈에도 교환법칙이 성립한다고 생각하고  $1 \div 1/2$ 의 계산이  $1/2 \div 1$ 과 같다고 생각하고 답을 구하는 경우가 해당된다.

### 3) 분수로 나누기

분수로 나눈다는 것은 무엇을 의미하는가? Ball (1990)은 분수로 나눈다는 것을 이해하기 위한 기초로써 나눗셈 연산의 중요성을 주장하였다. 즉, 나눈다는 것은 ‘그룹 만들기’와 관련된다고 설명하였다. Ball이 생각한 두 종류의 그룹은 (1) 특별한 크기의 그룹들을 만들기 (forming groups of a certain size)과 (2)특정한 개수만큼의 그룹을 만들기(forming a certain number of groups)이다. 첫 번째의 개념은 포함제라 말할 수 있는데, 두 번째의 개념은 등분제로써 이해될 수도 있다.

먼저 자연수를 가지고 생각해 보자. 예를 들어, 교사가  $28 \div 4$ 라는 문제를 보고 다음과 같은 상황으로써 설명했다고 가정하자: “28명의 학생들이 있는 반에서 4명씩으로 이루어지는 소집단을 만든다고 할 때, 몇 개의 소집단이 만들어질까요?” 이는 4라는 크기를 갖는 그룹들을 만든 것이고, 28에 4가 몇 번 포함되어 있

는지를 묻는 것과 같으므로 포함제로서의 설명이 된다. 반면에  $28 \div 4$ 의 문제가 담고 있는 상황을 아이들에게 설명하기 위해 어떤 교사가 28명의 학생들을 4개의 소집단으로 만든다고 한다면 이 설명은 각 그룹에 속하는 학생들의 숫자를 묻는 것이 되고, 이는 28을 4등분한 것과 같으므로 등분제의 설명이 된다.

Ball은 자연수를 사용한 나눗셈의 상황에 대한 포함제와 등분제의 개념이 어떤 수를 분수로 나눈다는 것을 이해할 때도 영향을 미친다고 생각하였다. 참고로, 현재 6차 교육 과정에 수학 교과서에서도 이 두 가지 방법을 포함제, 등분제의 순서로 제시하고 있었다. 그러나 조금 더 깊이 살펴보면 포함제의 예는 많이 사라지고, 등분제의 개념이 좀더 광범위하게 사용되고 있음을 알 수 있다.

좀더 구체적으로 어떤 수를 분수로 나눈다는 것을 생각해 보자. 즉,  $1 \div 1/2$ 의 상황은 1을 가지고  $1/2$ 만큼의 크기를 갖는 그룹들을 만들기, 또는 1에 포함된  $1/2$ 의 개수를 구하는 것으로 이해될 수 있다. 자연수에서의 경우와 다른 점은 실제 이해를 돕기 위해서는 등분제 보다는 포함제의 설명이 훨씬 도움이 된다는 것인데, 이는  $1 \div 1/2$ 이라는 것의 현상학적 모델이 등분제 보다는 포함제로서 현상학적 설명이 훨씬 용이하다는 사실에 기인한다. 예를 들어,  $15 \div 1/2$ 을 설명한다 가정해 보자. 이를 위해 교사는 다음과 같은 설명을 채택할 수 있다: “어떤 빵집의 제빵사는 매일 15kg의 밀가루를 사용하고, 밀가루를 덜어낼 때 1컵짜리 계량컵을 사용한다. 그런데 오늘은 1컵짜리 계량컵을 찾을 수 없어, 대신  $1/2$ 컵 짜리 계량컵을 사용하기로 하였다. 그렇다면 그는 오늘 밀가루를 몇 번 덜어 낼 것인가?” Ball의 연구에서 보면 30%의 연구 대상자들이  $4(1/4) \div 1/2$ 을 나타낼 수 있는 설명을 찾으라는 문제를 해결하지 못하였

고, 많은 수가  $4(1/4) \div 2$ 를 나타내는 상황을 선택하였는데, 이는 바로 분수, 즉  $1/2$ 로 나눈다는 것의 개념적 이해를 하지 못하고 있음을 보여주는 좋은 예라 하겠다.

#### 4) PCK에 대한 이해: 교수학적 지식의 본질

그렇다면 수학 교육자들이 말하는 교수학적 지식(PCK)이란 무엇일까? Livingston과 Borko (1990)는 교수학적 지식을 다음과 같이 정의한다.

교수학적 지식이란 가르치고자 하는 특정한 지식 내용과 이를 지도하기 위한 교수 방법을 통합하는 것이다. (pp. 373-374)

위의 정의에서는 교수학적 지식(PCK)이 내용적 지식(SMK)과 밀접히 연관되어 있음을 강조하고 있다. PCK는 단순히 SMK를 습득하였다고 얻어지는 것이 아님을 설명하였으며, PCK의 본질은 교사가 가르치려고 하는 특정의 학생들에게 이해될 수 있는 형태로 SMK를 변형시킬 수 있는 능력을 소유하는 것을 의미한다고 하였다. Livingston과 Borko는 수학교사로서의 전문가와 초심 교사들의 교수 방식을 비교한 연구를 통해 “가르친다는 것은 매우 복잡한 인지적인 기술”이라고 주장하였다. 이들의 연구는 어느 특별한 SMK와 관련된 PCK를 다룬 것은 아니다. 그러나, 수학교사에게 필요한 지식이 내용적 지식(SMK)와 교수학적 지식(PCK)로 구분되어 존재하며, 이들의 역학 관계는 매우 복잡한 것임을 밝힌 의미 있는 연구이다.

특별히 분수 개념과 관련한 교수학적 지식을 다룬 연구로서 Even과 Tirosh (1995)가 실시한 초등학교 예비 교사들을 대상으로 한 ‘분수로

나누기 프로젝트’가 있다. 이 연구에서는 ① SMK를 구체적으로 기술하기, ② PCK의 탐구, 그리고 더 나아가 ③ 효과적인 교수 전략의 개발과 같은 3차원적 구성으로 예비 초등교사들이 필요로 하는 지식들을 구분하고 있다. 이들 또한 위의 3가지 지식들이 반드시 함께 동반되는 것이 아님을 강조하고, 예비 교사 프로그램에서 반드시 연관되어 지도되어야 할 분야라고 주장하였다. Even과 Tirosh가 행한 연구의 바람직한 점은 첫째, ‘가르칠 내용을 아는 것’과 ‘왜 그러한가’를 안다는 것이 구체적으로 교수에 있어서 어떤 의미를 지니는가를 탐구하려고 노력하였다는 것이고, 둘째로 이 두 개념을 도입하여 초등 학교 예비 교사들이 보유하고 있는 분수의 나눗셈에 관한 이해를 탐구하고 증진시킬 수 있는 전략들을 개발하려고 노력했다는 것이다.

### III. 연구의 내용

#### 1) 연구 목적

지금까지 수학을 가르치는 데 있어 내용적 지식의 중요성, 특히 분수의 개념 및 연산과 관련된 분야에는 많은 연구들이 있고, 또한 교수학적 지식의 중요성을 검토하는 많은 연구들이 역시 있음을 설명하였다. 그러나 수학교육에 있어서 교사 교육이라는 관점을 부각시켜 생각해 볼 때 이러한 두 분야의 보다 긴밀한 연관성을 묻는 연구들이 부족하다는 것이므로, 본 연구는 현재 초등 교사들이 가지고 있는 분수의 개념이라는 내용적 지식과 이들이 현재 보유하고 있는 교수학적 지식을 이해하는 것을 그 목적으로 하였다.

본 연구의 관심이 된 첫째 질문은 “예비 초

등 교사들이 어떠한 수를 분수로 나눈다는 것을 어떻게 이해하고 있을까?” 이다. 즉, 그들의 분수연산에 관한 내용적 지식(SMK)를 살펴보는 것이다. 둘째, “분수를 분수로 나눈다는 문제를 그들은 어떤 방법으로 아동들에게 가르치겠는가?” 라는 질문을 가지고 그들의 교수학적 지식(PCK)을 탐구하였다.

## 2) 연구 대상 및 연구 방법

본 연구에 참여한 예비 초등 교사들은 본 연구자들이 가르친 전주 교육 대학의 3학년 과정의 두 반의 학생들(A반 38명, B반 25명), 총 63명이다. 연구 분석에 사용된 자료는 분수와 소수의 발달이라는 단원이 시작되었던 3월과 4월에 걸쳐 수집되었다. 이들 두 반의 표본 설정은 연구자들이 가르치는 반이라는 연구의 제한점은 있으나, 전주 교육 대학의 3학년 전체 학생들의 분포와 비교하여 그리 무리가 없는 대표적인 예비 초등 교사 집단이다. 연구의 자료 수집 방법은 1단계- 전체 학생을 대상으로 한 질문법과, 2단계-분수의 개념과 분수 계산의 이해와 교수학적 지식을 묻는 문제들이 실린 지필 검사가 30분간 실시되었다.

1단계 질문법 - 각 반의 학생들은 다음과 같은 질문에 대답하였다.

- ①  $3 \div 2$ 를 계산할 수 있는가? 답은 얼마인가?
- ②  $3 \div 1/2$ 을 계산할 수 있는가? 답은 얼마인가?
- ③  $3/5 \div 2/7$ 를 계산할 수 있는가? 답은 얼마인가?

2단계 지필 검사 - 분수의 개념과 분수 계산의 이해를 묻는 문제들이 실린 지필 검사 실시.

①  $3 \div 2$ 의 상황을 설명하고 있는 문장(문제)을 기술하라.

②  $3 \div 1/2$ 의 상황을 1과 관련하여, 또는 다른 방식 설명하는 문장(문제)을 기술하라.

③ 학생들에게  $3/5 \div 2/7$ 의 계산을 어떻게 가르치겠는지 설명하라.

1단계로서 실시된 질문법을 통해 연구자가 의도한 것은 예비 초등 교사들이 분수의 계산을 정확히 실행할 수 있는지를 직접 확인하는 것이었다. 2단계인 지필 평가를 통해서도 분수의 여러 가지 개념들 중에서도 특히, 그들이 “어떠한 수를 분수로 나눈다는 것은 무엇을 의미하는가?”라는 개념을 이해하고 있는지(SMK)라는 내용적 지식을 살펴려는 것이었다. 또 한편으로는 예비 교사들이 “분수로 나누기라는 주제를 아동들에게 어떻게 가르칠 것인가?(PCK)”에 관한 정보를 수집하고자 하였다.

수거된 검사지는 다음과 같은 두 개의 범주에 충실하게 분석되어졌다. 첫째, 예비 교사들이 주어진 문제들에 답하는 과정을 통해 분수가 관련된 나눗셈에 대해 그 내용적 이해를 바르게 갖고 있는가? 둘째, 예비 교사들은 분수로 나눈다는 계산을 어떠한 방식으로 아동들에게 가르치려 하는가?

## IV. 연구 결과 분석 및 토론

### 1) 예비 교사들의 분수로 나누기에 대한 내용적 지식(SMK) 수준

질문법을 사용했을 때, 총 63명 예비 초등 교사 모두가 검사지에 사용된 ①, ②, ③번의 문제에 대한 답은 구할 수 있었다. 따라서 이들 예비 교사들이 ‘계산’을 통해 ‘정답’을 구할

수 있음이 밝혀졌다. 반면, 지필 검사의 결과는 질문법의 결과와는 다르게 매우 복잡한 양상을 보인다. ①번 문제인  $3 \div 2$ 의 상황을 설명하고 있는 문장을 기술하라는 문제에 대해 63명 예비 교사 모두가 적절한 문장을 기술 할 수 있었다. 한 예로서, “사과 3개를 두 사람이 먹게 된다면 한 사람 당 먹을 수 있는 양은 얼마일까?” 라든지, “엄마가 소부루 빵 3개를 형과 동생에게 똑같이 나누어주려고 해요. 형은 빵을 얼마나 먹을 수 있을까요?” 와 같은 설명이 있었다. 특이한 점은  $3 \div 2$ 의 상황에서는 포함제의 설명보다는 등분제의 설명이 절대적으로 많았다는 것이다. 즉, 3개의 구체물을 2명에게 나누어준다는 등의 예들이 많았다. 이들 예비 교사들이 설명을 위해 사용한 구체물에는 사과나 오렌지와 같은 과일, 또는 음식물들이 절대적으로 많았다. 또한 피제수에는 구체물 자체가 분리되어 생각되어 질 수 있는 것들을 많이 사용하였고 (예: 사과, 오렌지), 제수에서는 구체물 자체가 분리될 수 없는 것들이 많았다 (예: 사람).

②번 문제인  $3 \div 1/2$ 의 상황을 설명하는 문제에서는 43%의 예비 교사들이 옳은 상황의 설명을 제시하였으며, 57% (부적절한 상황 설명-49%, 설명이 아닌 알고리즘에만 국한된 대답-8%)의 예비 교사들이 부적절한 예를 기술하거나 문제를 설명하는 예를 들지 못했다.  $3 \div 1/2$ 에 대한 어떤 예비 교사의 설명은 “피자 3조각을 정확히 2등분 할 수 있는 방법을 쓰시오!” 였으며, 또 다른 예비 교사는 “ $3 \div 1/2$ 은 다시 말하면  $6 \div 1$ 과 같다”라는 설명을 제시하였다. 이 예비 교사의 경우 답안지에는 6이라는 답이 계산되어져 있었으나,  $3 \div 1/2$ 을 설명할 수 있는 적당한 예를 서술하는 데에는 실패하였다. 또 다른 예비 교사는 “사과 반쪽이 있다. 이것을 세 명의 사람에게 나누어준다면

완전한 사과는 몇 조각으로 나누어야 하나요?”라는 설명을 제시하였는데, 이것 역시 분수로 나누기라는 개념을 이해하지 못하고 단순히 계산으로 얻은 결과인 6이라는 답에 초점을 맞추어 나타난 결과에 불과하였다.

$3 \div 1/2$ 에 대해 옳은 방법으로 설명을 제시한 나머지 43%의 예비 교사들의 경우에 있어서도 그들이 이러한 상황을 이해하는데 어려웠음을 직접 관찰을 통해 알 수 있었다. 이들 중 많은 수는 처음에는  $3 \div 2$ 와  $3 \div 1/2$ 의 상황의 차이를 구분하지 못하였다. 그런데 그들이 계산을 통해 알아낸 답인  $3/2 = 1.5$ 와 6의 차이를 통해 문제를 해결할 수 있는 상황을 찾으려 했다. 이들 예비 교사들이 기술한 설명을 살펴보면, “사과 3개를  $1/2$ 개(절반)씩 나누어 먹는다면 모두 몇 명이 사과를 먹을 수 있을까?”와 같은, 아니면 “제과점에 케익이 3개 있습니다. 철수는 한번에 반절의 케익을 먹을 수 있는데 철수는 케익은 몇 번 먹을 수 있을까요?”와 같은 설명을 하였다. 많은 수의 예비교사들이 “3을  $1/2$  등분하면 어떻게 되지?”라는 질문을 생각하였고, 이들 대부분은 분수로 나눈다는 것의 개념을 잘 이해하지 못하였다.

이들 예비 교사들 중에서 약간 명이  $3 \div 1/2$ 의 상황에 대해 포함제의 의미로써 분수로 나눈다는 개념을 이해하고 있었다. 예를 들면, 한 예비 교사는 “설탕통에서 설탕을 큰 숟가락으로 세 번 덜어내야 하는데 큰 숟가락이 없고, 큰 숟가락의 절반의 양만큼 떠 낼 수 있는 작은 숟가락만 있다면 작은 숟가락으로는 몇 번을 덜어내야 큰 숟가락으로 세 번 덜어내는 것과 같을까?”라는 설명을 기술하였다. 등분제로 시도하려 했던 예비 교사들보다 이들은 3에  $1/2$ 이 몇 번 포함되어 있는가와 같은 질문을 스스로에게 던지고 있었고, 따라서 3을  $1/2$ 로 나눈다는 것의 설명을 등분제의 개념으로만 생

각하였던 예비 교사들에 비해 비교적 쉽게 문제를 해결하였다.

분수로 나누다는 것은 그 분수의 역수를 취해 곱한다는 표준 알고리즘으로  $3 \div 1/2$ 의 상황을 설명하는 예비 교사들도 있었는데 이들은  $3 \div 1/2$ 의 상황을 설명할 수 있는 예를 드는 대신,  $3 \div 1/2$ 은  $3 \times 2/1$ , 즉  $3 \times 2$ 로 표현할 수 있으며 그 해답은 6이라고 기술하였다. 이러한 예비 교사들은 전체의 8%에나 해당되었는데 이들의 특징은  $3 \div 1/2$ 을 설명할 수 있는 현상학적 예를 제시할 수 없고, 단지 분수 나눗셈 연산의 표준알고리즘만을 기억하고 있었다.

63명의 예비 교사들이 문제 ①, ②의 문제에 대해 보여준 수행의 분석 결과를 Tirosh가 말한  $a \div b$ 의 상황을 이해함에 있어 발생하는 오류들과 관련지어 생각해 보면, 먼저 이들 예비 교사들의 어느 한 명에게서도 알고리즘에 근거한 오류 (예: 알고리즘을 잘못 암기하고 있다)는 발견되지 않았다. 이들 모두는 분수로 나누다는 것은 분수의 역수를 취해 곱해준다는 표준 알고리즘을 알고, 그리고 그 알고리즘을 사용할 수 있었다. 이들 예비 교사들이 문제 ①과 ②에 대한 설명에서 절절한 답을 내지 못한 것은 주로 그들의 직관에 근거하거나 기존 지식에 근거하고 있었다. 그들 대부분이  $3 \div 1/2$ 의 계산에서  $1/2$ 로 나누다는 것을 개념적으로 이해하지 못했고, 많은 수의 예비 교사들은 계산의 결과를  $3 \div 2$ 의 계산과 동일하게 설명하였다. 따라서 이들이 문제 ③에 대해 매우 알고리즘에 치우친 교수 방법을 취할 것임을 예측할 수 있었다. 이들 예비 초등 교사들이 가지고 있는 교수학적 지식(PCK)에 대한 설명은 다음 절에서 더욱 자세히 설명하도록 한다.

결론적으로 이들 63명의 예비 초등 교사들이 지니고 있는 분수로 나누기라는 주제에 대한

내용적 이해(SMK)는 전반적으로 아주 제한적으로, 그리고 매우 낮은 수준에 머물러 있음을 알 수 있었다. 분수의 나눗셈에 관련한 연산이 초등학교 교육 과정 내에서 차지하고 있는 위치, 그리고 이 주제가 아동들에게 얼마만큼의 어려움을 주는가에 대한 우리의 이해를 생각해 볼 때 이 연구에 참여한 63명의 초등 예비 교사 집단의 수행 결과는 교사 교육이라는 입장에서 매우 심각한 논의를 불러일으킨다고 생각한다. 즉, 예비 초등 교사들이 가지고 있는 분수의 연산이라는 수학적 내용에 대한 내용적 지식(SMK)이 매우 취약한 상태였다(<표 1>).

<표 1> 예비 교사들의  $3 \div 1/2$ 에 대한 SMK 수준 분석

반응	퍼센트
적절한 설명 상황의 선택	43%
부적절한 상황 설명	49%
설명이 아닌 알고리즘에만 국한된 대답	8%

## 2) 예비 교사들의 분수로 나누기에 대한 교수학적 지식(PCK) 수준

예비 교사들이 '분수로 나누기'라는 주제를 아동들에게 어떻게 가르칠 것인지에 대한 정보를 얻기 위해 만들어진 문제 ③에 대한 결과를 분석하면 개념적 이해가 부족한 상태에서 알고리즘에 대한 의존성이 매우 심각함을 알 수 있다. 기억해야 할 사실은 이들 예비 교사들 모두가  $3/5 \div 2/7$ 의 값을 구할 수 있었다는 점이다. 그러나 그들에게 주어진 문제는 계산의 값을 구하는 것이 아니라, 어떻게 분수로 분수를 나누는 것을 설명하겠는지를 묻는 것이었고, 이 문제는 그들에게 상당한 어려움을 주었다.

64명의 예비 교사 중 44%가 제수의 역수를 취해 곱한다는 방법으로  $3/5 \div 2/7$ 를 가르치겠



다고 대답했으며, 이러한 교수 방식을 제시한 예비 교사들의 공통된 특징은 이러한 표준 알고리즘을 사용함에 있어 가능한 문제점들에 대한 고려가 없었다는 것이다. 이들은 아무런 비판 없이 표준 알고리즘이 최선의 교수 방법이라고 생각하였다. 따라서 앞서 서문에서 소개한 김 소진 예비 교사와 같은, 즉 이해를 이끌어 낼 수 있는 교수 방법의 고안이 어려우므로 우선 알고리즘이 효율적일 것이라 설명하는 예도 드물었다. 이들 예비 교사들에게는 분수로 나누는 것에 대한 가장 효율적인 교수 방식은 표준 알고리즘의 선택이었으며, 이것이 그들의 교수학적 지식을 대표하였다.

이들 예비 교사들 중 8%가 설명을 생각해 낼 수 없다며 포기하였다. 이들이 설명한 문제 ①과 ②에 대한 묘사들도 매우 빈약함을 발견하였다. 예를 들어,  $3/5 \div 2/7$ 을 어떻게 가르치겠느냐는 질문에 포기한 한 예비교사의  $3 \div 1/2$ 에 대한 설명은 “2명의 학생에게 사과 3개를 똑같이 나눠주기 위해선 사과가 몇 개가 필요할까?” 입을 살피볼 때 이들 예비 교사들의 분수 개념에 대한 내용적 지식의 부족이 이러한 교수학적 오해를 불러 일으켰다고 생각된다. 포기한 8%의 예비 교사들 중 또 다른 유형은 알고리즘적 방법 외의 설명을 찾으려 한 경우인데, 이들은 본인들이 암기해 분수로 나누기의 계산 문제를 풀 수 있는 표준 알고리즘의 방법이 적절한 교수방법이 아니라고 생각한 경우이다. 이들은 역수를 취해 곱하여 답을 구한다는 것을 알고 있는 것과는 별도로, 분수로 나누는 계산식의 의미를 파악해 보려고 애썼으나 이들의 수학적 지식이 이러한 노력을 뒷받침해주지 못하였다.

전혀 이해할 수 없는 설명들을 제시한 예비 교사들도 전체의 13%나 차지하였다. 예를 들면  $3/5 \div 2/7$ 이  $3 \div 5 \div 2 \div 7$ 과 같다고 설명하는

것처럼, 전혀 수학적 의미나 수반된 연산에 관한 이해가 동반되지 않은 설명을 하는 예비 교사들도 많았다. 이들 대부분의 예비 교사들은 문제 (1)과 (2)에 대한 설명도 매우 불안정한 상태로 제시하였는데, 분수 연산에 대한 내용적 이해도 매우 부족함을 알 수 있다.

17%에 해당하는 예비 교사들이  $3/5 \div 2/7$ 의 식이 나타내는 의미에 대한 개념적인 설명을 하려 시도하였고, 이들 교사들은 특징적으로 사각형과 같은 모델에  $3/5$ 과 그 것의  $2/7$ 이라는 모습을 표현하려고 노력하였다. 그러나 결국은 제수의 역수를 취해 곱한다는 표준 알고리즘으로 결론지어 설명을 마치는 경향을 보였다.

마지막으로, 18%의 예비 교사들은  $3/5 \div 2/7$ 을 가르치기 위해 대수적인 방식을 도입하였다. 제수와 피제수의 분모를 통분하여  $3/5$ 와  $2/7$ 을 표현한 후, 분자들 간의 나눗셈으로 문제를 설명한 경우가 많았다. 또 다른 방식으로는  $3/5 \div 2/7$ 을 마치  $a \div b = a/b$ 의 상황으로 생각하고, 분자와 분모에  $2/7$ 의 역수를 취해 분모를 1로 만들어 분자만을 계산하도록 설명하였는데, 이는 제수의 역수를 취해 계산한다는 알고리즘적 방법에 도달하게는 되었으나, 매우 다른 개념적 접근방식이라 생각된다. 이들은 왜 제수의 역수를 곱하게 되는지의 과정을 대수적 접근법으로 제시하려고 노력하였으나, 이들 역시 대부분이 실제  $3/5 \div 2/7$ 가 의미하는 내용을 이해하지는 못하고 있었다(<표 2>).

<표 2> 예비 초등교사들의  $3/5 \div 2/7$ 에 대한 PCK 수준 분석

반응	퍼센트
$2/7$ 의 역수를 취해 곱함	44%
설명을 생각할 수 없음(포기)	8%
부적절한 설명을 제시함	13%
개념적인 설명을 시도함	17%
대수적 풀이 방법의 사용	18%

### 3) 제언

연구자들은 본 연구를 통해 어떠한 수를 분수로 나눈다는 주제가 초등학교에서 가장 기계적이고, 또 가장 개념적인 이해는 부족한 단원 중의 하나라는 주장을 확인할 수 있었다. 예비 초등 교사들의 분수로 나누기라는 주제에 대한 내용적 지식(SMK)의 수준과 이 주제를 어떻게 가르칠 것인가라는 교수학적 지식(PCK)의 수준을 살펴보면, 이들에게 정확한 수학적 지식의 전달과 함께 그들이 이러한 지식을 수학지도와 연결시킬 수 있는 기회를 제공해야 할 필요를 강하게 느낄 수 있었다. 자료의 분석 결과는 현재 초등학교 예비 교사들이 알고리즘에 의존하는 연산 활동에 대한 지식을 매우 강하게 소유하고 있는 반면, 분수의 개념과 분수가 관련된 연산에 대한 근본적 이해는 매우 부족함을 보여주었다. 또한 이러한 제한적 이해 때문에 그들이 소유하고 있는 교수학적 지식도 알고리즘의 실행이라는 한계를 벗어나지 못하고 있었다. 이러한 결과는 현재의 수학과 교사의 교육 프로그램들에게 예비 교사들이 필요한 지식이 단지 '수학적 지식(SMK)', 또는 '수학적 지식(SMK) 더하기 교수학적 지식(PCK)'이 아닌 이 두 지식이 서로 구조적으로 긴밀하게 연결될 필요가 있음을 제시해 주고 있다. 만약 교과 구성을 계획할 때 나눗셈에 관한 부분이 있다면, 자연수로 나누기란 주제와 분수로 나누기란 주제의 분리된 학습보다는 이 둘을 통합해서 배울 수 있는 기회를 교사 교육 프로그램에서 제시하는 것도 의미 있는 방법이 될 것이라 생각한다.

본 연구를 통해 연구자들은 수학 교과에서 교사 교육 프로그램을 개발할 때 어떤 내용을 선택해야 하는지, 그리고 교수학적 지식을 제공하기 위한 활동에는 무엇이 있을지 사교하는

것이 얼마나 중요한 일임을 토의하는 기회를 제공받았다. 내용을 가르치는 것과 교수학적 지식의 함양을 목적하는 것은 동일한 것이 아니며, 이 둘의 획득을 위해서는 체계적으로 계획된 학습의 전달이 필요할 것이다. 사례 연구들을 통해 초등 수학의 주제들에서 예비 교사들이 보다 깊은 이해를 필요로 하는 부분들을 찾아내는 작업의 중요성도 간과할 수 없을 것이다. 실제로 우리는 예비 초등 교사들이 수학을 배우고 체계화 해나가는 과정에서 어떠한 어려움을 겪는지 접해볼 기회가 많지 않았다. 그들이 미래에 수학을 잘 가르칠 수 있도록 돕기 위해 교사 교육자들이 할 일을 계획하는 것의 중요성은 아무리 강조해도 지나치지 않을 것이다. 이러한 의미에서 이 연구의 결과는 현행 교사 교육 프로그램들이 간과하고 있을지도 모르는 예비 교사들이 갖고 있는 SMK와 PCK에서의 작은 구멍들을 찾아 메우고 연결하는 작업의 중요성을 잘 나타내 준다 하겠다.

### 참고문헌

- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90, 4, 449-467.
- Even, R., & Tirosh, D. (1995). Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher presentations of the subject matter. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 1-20.
- Fendel, D. M. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.

- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R., & Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 403-434.
- Livingston, C., & Borko, H. (1990). High school mathematics review lessons: Expert-novice distinctions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1), 16-32.
- Payne, J. N. (1976). Review of research on fractions. in R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 145-188). Athens: University of Georgia.
- Stoldolsky, S. (1988). *The subject matters: Classroom activity in math and social studies*. Chicago: University of Chicago Press.
- Tirosh, D. (1999). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 1, 5-25.

## **A Study on Elementary Preservice Teachers' Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge in Fraction-related Operations: A Teacher Education Perspective**

Seo, Kwan Seog (Junju University of Education)  
Jeon, Kyungsoon (Junju University of Education)

A case study was conducted to investigate the understandings of the subject matter knowledge and pedagogical content knowledge held by 63 elementary preservice teachers in dealing with the division by a fraction. The study results showed that, in terms of the subject matter knowledge, the preservice teachers did not have a conceptual understanding of the division by a fraction and, in terms of the pedagogical content knowledge, they depended heavily on algorithms without a conceptual understanding of the meaning of the division by a fraction.