大韓數學敎育學會誌 數學敎育學硏究 第 10 卷 第 1 號
The Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. X, No.1, 85-102, July 2000

# Logo 프로그래밍을 통한 초등학교 6학년 아동의 변수개념 이해[1)]

류 희 찬* · 신 혜 진**

## I. 도입

변수는 산술적 사고와 대수적 사고를 구분짓고 대수적 사고를 이해하는데 핵심적인 역할을 하는 개념으로, 대수 중심의 현대수학 따라서 학교 수학을 이해하는데 바탕이 되는 기본적인 개념이다. 아이디어를 표현하고 기술하기에 편리한 수단을 제공하는 변수는, 규칙의 진술을 쉽게 하며, 문제해결에서 간단하게 변수로 대체시킴으로써 새로운 계산을 하지 않고서도 임의의 많은 개별적인 경우를 표현할 수 있게 한다(Schoenfeld & Arcavi, 1988). 즉 변수는 일반화의 과정에서 형식적인 도구가 된다.

그러나, 변수 개념이 많은 학생들에게 어렵다는 명확한 증거들이 있다. 학생들은 한 문자가 여러 가지 값을 나타낼 수 있다는 것을 이해하지 못하며, 서로 다른 문자가 하나의 값을 나타낼 수 있다는 것을 받아들이지 못한다(Booth, 1984; Wagner, 1981; Kuchemann, 1981, Usiskin, 1988; 심규선, 1997). 또한 학생들은 두 개의 종속변수 사이의 체계적인 관계를 이해하는데 어려움을 느낀다(Kuchemann, 1981).

변수의 개념을 이해하는 것은 문자기호의 의미를 이해하는 것과 관련된다. 문자기호로부터 수학적 의미를 생성하는 것은 복잡한 인지과정이다. 수학적 기호는 특수한 사고를 불러일으키며, 개념적 대상을 밝히는 것을 도와준다. Peirce(1976)가 지적했듯이 기호의 기능은 해석자를 기호대상-물리적 또는 개념적 대상-과 관련시키는 것이다.

현행 교과서에서는, 초등학교 5학년부터 방정식이나 함수 관계의 지도를 위한 기초단계로서 문자가 도입된다. 이때, 문자는 단지 특정한 수를 대신하는 미지수로서의 의미가 강하다. 미지수로서의 변수의 의미가 수학에서 중요한 것은 사실이나 이는 변화를 설명하고 일단의 상황을 동시 고려하는 변수의 본질을 이해하는 데에는 대단히 제한된 의미만을 보여줄 뿐이다. 또한 함수는 대응표와 함께 도입되기 때문에, 변수의 동적인 의미가 부각되지 않는다. 한편, 중학교 수학에서의 문자는, 미지수, 계산대상, 도형, 일반화된 법칙이나 공식, 변하는 값, 어떤 집합의 임의의 원소를 나타내는 다양한 의미의 변수로 사용된다. 또한 산술에서 대수로의 급격한 전환에 의해 변수의 '대표성'이 부각되는 일반화된 의미로서의 문자 사용이 두드러지게 나타나고 있다. 일반화된 표현은 구체적인 상황에서 충분한 예가 주어지지 않은채 직접적으로 도입되고 있으며 일반화된 표현을

* 한국교원대학교
** 서울신상도초교
1) 본 고는 한국학술진흥재단이 지원하는 1998년도 대학부설연구소 지원 연구 과제인 「창의성 신장을 위한 컴퓨터 통합 수학교육과정 개발에 관한 연구」의 2년차 보고서(미간행)의 일부를 간추린 것이다.

특수한 경우에 적용하는 과정조차 충분히 제시되고 있지 않다(김남희, 1997). 그렇다면, 학생들의 변수 개념 학습의 어려움은, 구체적이고 단편적인 학습에서 형식적이고 기호 조작적인 학습으로의 직접 이행 때문이라고 볼 수 있다. 따라서, 두 시기를 이어줄 수 있는 중간 단계적인 경험이 요구된다.

많은 연구자들이 컴퓨터 프로그래밍, 특히 LOGO환경이 변수를 지도할 수 있는 자연스럽고 의미있는 환경을 제공해 준다고 보고했다(Hoyles & Sutherland, 1989; Sutherland, 1992; Tall, 1994). 변수는 변하는 수학적 대상의 불변적인 관계를 표현하기 위하여 변하는 양을 심리적으로 고정시키는 측면이 있다. LOGO프로그래밍에서 변수는 하나의 주소로 정의되며 불변적인 관계를 나타낸다. 이것은 한 절차내의 관계를 여전히 불변이게 한다는 것을 의미한다. 이러한 관점에서 프로그래밍에서의 변수는 대수에서의 변수와 동일한 상황에서 사용된다고 볼 수 있다. 그러나, LOGO 프로그래밍에서는 그림을 그리는 간단한 절차에서부터 변수를 사용하게 되므로, 변수사용이 쉽고 의미 있으며, 역동적이고, 동기를 유발한다.

Freudenthal(1991)에 따르면, 학생들은 수학보다는 수학화를, 추상보다는 추상화를, 셰마보다는 셰마형성을, 공식보다는 공식화를, 알고리즘보다는 알고리즘화를, 언어보다는 말하기를 재발명해야 한다. 그렇다면 학생들로 하여금 문자기호보다는 문자사용을 재발명하게 해야 하지 않을까? Logo환경에서 변수를 사용하는 경험은 기호화 과정의 상반되는 측면인 기호화와 해석에 대한 통찰력을 제공하면서 동시에 문자기호의 해석을 쉽게 하지 않을까?

다음 장은 학생들의 변수에 대한 이해를 분석하는 원리를 제공한다. 여기서는 수학에서의 변수사용을 분석하고 변수기호의 발달과 진보에 대한 역사적 개관을 할 것이다.

## II. 변수와 변수기호

오늘날 우리는 변수의 사용을 너무나 당연하게 여기며, 서로 다른 수학적 맥락에서 변수를 사용한다. Usiskin은 대수식의 여러 유형에서 사용되는 변수의 다양한 의미를 제시하였다. 일반화된 산술의 맥락에서 볼 때 변수는 패턴을 일반화하는 도구이다. 대수에서는 수들 사이의 관계를 통합적으로 설명하기 위하여 '임의의 수'를 나타내는 변수를 이용하여 일반화가 이루어진다. 예를 들어, 실수에 대한 덧셈의 교환법칙은 모든 실수에 대한 경우를 포괄적으로 표현하기 위하여 임의의 실수를 나타내는 문자a, b를 사용하여 a+b=b+a로 일반화되는 것이다. 문제 해결 과정의 맥락에서 변수는 방정식의 해에 대한 자리지기인 미지수로 생각된다. 미지수로서의 변수는 일반화하는 도구로서의 변수개념과 근본적으로 다르다. 일반화의 과정에서는 수들 사이에 존재하고 있는 관계를 통합적으로 나타내고자 하는 행위가 중요시 될 뿐 조건에 맞는 어떤 수를 찾고자하는 행위는 개입되지 않기 때문이다. 양 사이의 관계에서 변수는 독립변수, 종속변수, 매개변수로 생각된다. 이러한 변수 개념이 앞에서 다룬 두 변수와 구분되는 근본적인 차이는 여기서 말하는 변수는 그 값이 어떠한 관계를 유지하면서 변해간다는 점이다. 예를 들어, A=LM을 생각해 볼 수 있다. 여기서 문자는 어떠한 관계 속에서 서로 관련을 맺으면서 하나의 값이 변하면 다른 값들의 변화를 수반하고 있다. 구조의 맥락에서 변수는 어떤 성질들을 만족하는 임의의 대상을 나타내는 기호이다. 특히 대수에서 다루어지는 군, 환, 체, 정역, 벡터 공간과 같은

추상구조를 나타내는 변수는 임의의 대상으로 생각된다(이종영, 1999). 따라서 수학적인 문자 기호도 그것의 문맥적 운명에 의해 어떤 방법으로 특정화된 것으로 보지 않을 수 없다.

변수를 나타내는 기호의 발달단계를 고려하는 것도 중요하다. 첫 번째 단계는 특정 유형의 문제를 해결하기 위하여 문제 상황과 해를 일상언어로 표현했던 Diophantus시대 이전의 수사적인 단계이다. 두 번째 단계는 약어단계로서 Diophantus에서부터 16세기말까지 지속되었다. 이 단계에서는 미지수를 표현하기 위해 처음으로 문자를 도입하였으며 모든 문자는 수치적으로 계산되었다. 그러나 문자를 사용한 일반적인 해는 표현되지 않았다. 세 번째 단계의 기호대수는 Viete가 미지의 양뿐만 아니라 기지의 양을 나타내기 위해 문자를 사용하면서 시작되었다. 이로서 일반적인 해를 표현할 수 있게 되었으며 수관계를 통제하기 위한 문자 사용은 수학에 새로운 수 개념 즉 대수적인 수 개념 또는 기호적인 수 개념을 초래하였다.

변수를 사용하는 다양한 맥락과 변수기호의 진화과정은, 수학적 개념을 특정 기호로 나타내는 것과 관련된 복잡성과 수학적 의미가 개인의 해석 과정 없이 기호에 의해 직접 전달될 수 없다는 것을 보여준다.

Sutherland(1989)는 변수 개념을 몇 가지 범주로 정리하여 사용하였다. 각 범주는 Logo 프로그래밍과 대수 두 상황에서 학생들의 변수 사용에 대한 이해 정도를 분석하기 위한 틀을 제공하고 있다. 그녀가 고안한 범주는 다음과 같다.

① 변수라는 아이디어의 수용: 이를 위해서는 변수가 지니는 본질적인 의미에 따라 학생들이 변하는 수학적 대상들의 불변적인 관계를 인식하면서 그 대상을 문자로 고정시킬 수 있는지에 주목한다.

② 하나의 변수가 많은 수를 표현할 수 있다는 것의 이해: 학생들이 변수를 특정한 한 값만을 취하는 것으로 생각하는 경향이 있다. 이것은 학생들이 방정식에서의 미지수 개념에 지나치게 익숙해져 있어서 나타나는 현상이다. 그러나 변수는 변하는 많은 수를 표현하는 중요한 특성을 지니고 있다.

③ 임의의 변수명이 사용될 수 있다는 것의 이해: 학생들이 변수를 사용하고 조작하기 전에 그들이 변수에 이름을 붙여야 한다. 학생들에게 처음에 변수를 도입하였을 때 학생들은 변수명에 매우 많은 중요성을 부여하는 것으로 입증되었다. 한편, 의미 있는 이름을 선택함으로서 학생들에게 대상을 받아들이도록 권장하고 있다. 다른 한편으로는 의미있는 이름은 학생들에게 의미 자체가 몇 가지 의미와 몇 가지 힘을 지니고 있다는 것을 생각하도록 권장하고 있다. 학생들에게 '별 의미가 없는'이름과 학생들이 그들의 대수 학습에서 사용할 추상적이고 단문자 이름을 포함한 여러 개의 변수 명을 사용하도록 권장되어질 필요도 있다는 것이 제안되었다.

④ 다른 변수명이 같은 값을 가질 수 있다는 것의 이해: 대부분의 학생들은 표현되는 문자가 다르기 때문에 각각 다른 값을 갖는다고 생각한다.

⑤ 변수로 표현되는 식에서 완전성 결여(lack of closure)의 수용: 대부분의 학생들은 불완전한 대수식을 하나의 대상으로 인식하지 못한다는 연구 결과가 앞에서도 설명되었었다. 학생들이 완전성이 결여된 식을 수용한다는 것은 x+3과 같은 식에서 문자에 특수한 값을 대체하여 연산을 한 결과로서의 한 특수한 값을 찾는 것이 아니라 그 식 차체를 하나의 대상으로 인정한다는 뜻이다.

⑥ 변수에 의해 표현되는 식 사이의 2차 관

계 설명: Kuchemann(1981)은 연구 결과를 밝힌 다음 결론으로서 학생들이 이러한 관계를 이해했을 때에 드디어 변수 개념을 충분히 이해할 수 있게 된다고 하였다.

⑦ 일반화를 표현하기 위한 변수 사용: 대수를 학습할 때 학생들이 겪는 어려움은 종종 산술에서의 비형식적인 방법으로 이해 발생한다.

다음 절에서는 microworld에 근거를 둔 교수실험 방법론과 6학년 학생들을 대상으로 한 교수법 실험에 대해 기술할 것이다.

## III. 방법론

### 1) 교수법 실험

초등학교 6학년을 대상으로 microworld 교수법 실험이 수행되었다. 교수법 실험의 기본적이며 진정한 목표는 연구자가 학생들의 수학적 지식을 학습하고 구성하는 방법을 배우고 학생들의 개념 구성과 해석에 초점을 맞춘다(Cobb & Steffe, 1983). 따라서 교사, 학생, 컴퓨터사이의 상호작용은 학생들의 수학적 활동을 착수 및 유지시키게 된다. 학생들은 소프트웨어와 상호작용하면서 탐구하고 실험하며 조사하고 자신의 활동을 발견하며 정의하며 지식을 구성하면서 자신이 가르치고 있다는 것을 발견하는 반면 교사는 학생들의 말을 듣고 프로그래밍 활동을 관찰함으로서 자신이 학습하고 있다는 것을 발견하기 때문에, 컴퓨터, 교사, 학생 사이의 계속적인 상호작용은 교수-학습과정에 대한 교사와 학생의 기대를 변화시키는 잠재력을 가진다. 이러한 상호작용의 효력은 교사와 학생 모두 스스로의 이해에 대한 반성을 용이하게 한다.

교사, 학생, 컴퓨터 사이의 지속적인 상호작용은 학생들의 활동 없이는 불가능하다. 동시에 학생들이 활동에 착수하게 되는 것은 교사의 교수학적 의도가 담긴 과제와 컴퓨터라는 환경적 제약 내에서이다. 따라서 교수법 실험 방법론은 개인의 인식과 사회-문화적 힘의 암묵적 공존을 조화시킨다. Sinclair(1990)가 지적한대로 지식은 한 편으로는 추상화와 평형과 같은 매우 일반적인 인지과정의 결과지만, 또 한편으로는 대상이 사회적 의미를 가지고 개인에게 제시되는 방법의 결과다. 교수법 실험은 교사, 학생들 사이의 대화적 상호작용과 컴퓨터 대상활동을 특징으로 하는 교수에피소드로 구성된다. 이 교수법 실험의 주요 목표 중 하나는 변수 개념의 이해에 대한 컴퓨터, 교사, 학생간의 상호작용의 영향을 분석하는 것이다.

### 2) 대상

연구의 대상은 서울의 한 초등학교 6학년 학생 6명이었다. 학생들은 모두 컴퓨터 반 학생으로 2년 이상 컴퓨터를 다루어 본 경험이 있으며 실험에 자원했으며, 한 학생은 교사의 추천을 받은 학생이었다. 그러나 모두 Logo프로그래밍 경험은 없었다. 실험대상인 학생들의 성적은 넓게 분포되어 있었다.

### 3) 자료수집

학생들의 발전된 활동과 인식에서의 변화를 분석하기 위해 매일의 활동을 비디오 테이프와 오디오 테이프로 녹화(음)했으며, 학생들의 해결 방법들을 기록했다. 학생들에게 제공된 학습지와 프로그래밍 활동 결과가 담긴 디스켓도 수집되었다. 연구자가 교사로서 활동하기 때문에 학생과 교사, 학생과 학생, 학생과 컴퓨터 사이의 상호작용과 의미형성과정의 직접적 관

찰이 가능했다. 연구자와 지도자로서의 이중적 위치는 이점이 많이 있었다. 변수는 초등학생들에게 낯선 개념이고 컴퓨터는 수학수업에 직접 쓰이지 않고 있었기 때문에, 연구자의 연구 목적과 6학년이라는 학생들의 행동 특성에 맞게 내용을 조직할 수 있었다. 무엇보다도 효과적인 것은 학생들의 반응과 즉각적인 피드백에 따라 계획된 활동을 지도하는 과정에서 수정할 수 있다는 점이었다. 또한 이러한 이중역할의 장점을 다음과 같은 두 가지로 요약할 수 있다.

① 연구자가 필요하다고 느낄 때마다 학생들의 사고과정과 결정에 대해서 탐색할 수 있다.

② 변수 지도 과정에서 만들었던 교수학적 결정에 대한 교사로서의 원리를 자각할 수 있다.

교수-학습 활동은 주로 학생들 두 사람이 함께 해결할 것을 기대하는 과제를 제공했다. 적절한 시간이 지난 다음 연구자는 학생들의 해결에 대해 이야기했다.

### 4) 학생들의 수학수업에 대한 기대

학생들이 이전에 받은 수학수업은 학생들이 전통적인 알고리즘을 사용하여 산술적 연산의 수행을 기대한다는 의미에서 전통적이다. 학생들은 과제에 대한 논의나 정당화보다는 정답 맞추기에 관심이 있었다. 교사가 그렇다고 말하면 답은 옳은 것이며, 문제해결의 방법은 교사가 기대하는 것이었다.

학생들에게 수업활동에 대한 microworld 접근은 이전의 수업과는 매우 달랐다. 교수법 실험에서 학생들은 자신들에게 의미있는 방법으로 문제를 해결해야 했으며, 그 방법에 대해 학생들 서로 정당화를 요구했다. 학생들의 활동은 때때로 학생들의 개념적 발달을 용이하게 하는 새로운 수학적 과제의 생성에 이르게 했다. 일반적으로 교수과제의 생성과 연구활동은 교사-학생의 협력과 함께 발달했다고 말할 수 있다.

## IV. 분석

### 1) 변수라는 아이디어의 수용

학생들의 이전까지 변수에 대해 변하는 대상에서의 변화의 의미나 일반화된 표현에서의 대표의 의미를 경험한 적이 없었다. 또한 변수를 나타내는 기호도 네모나 동그라미를 사용하기 때문에 한 문맥 내에서 같은 변수가 같은 값을 또는 다른 기호가 같은 값을 가질 수 있다는 변수의 의미를 이해하는데 이르지 못하고 있었다. 변하는 대상을 다루는 정비례, 반비례에서는 대응표에 기록된 수들 사이의 관계에 주목시키고 있기 때문에 어떠한 관계에 의해 변하는 변화의 의미를 경험하지 못했다. 또한 산술의 계산규칙이나 수의 성질을 일반화한 표현도 구체적인 상황에서의 충분한 예가 주어지지 않았다. 실제적인 문자경험은 문자에 여러 값을 대입하는 경험보다는 등식의 성질을 이용하여 방정식을 풀어 계산 결과를 얻는 과정을 강조하기 때문에 은연중에 문자는 유일한 값을 가지는 것이라는 생각을 가지게 한다. Logo 교실에 왔을 때 학생들은 문자가 방정식을 풀 때 사용할 수 있으며, 유일한 값을 가진다고 생각하고 있었다. 또한 학생들의 암묵적인 변수의 변역인 '어떤수'의 범위도 30, 40 등의 매우 한정된 수에 머물렀다.

따라서, 연구자의 첫 번째 단계는 변수라는 아이디어를 도입하는 것이었다. 학생들은 Logo의 원시명령어를 학습하는 과정에서 변수를 사

한 개의 변수를 가진
절차를 만드는 방법

변수이름을 선택합니다.
예를 들어, :something을 선택한 다음 절차를 정의합니다.

```
To Line :something
  rt 45
  fd :something
end
```

지금까지 만들어 본 절차와 비교해 봅시다.

다음을 입력해 봅시다.

Line

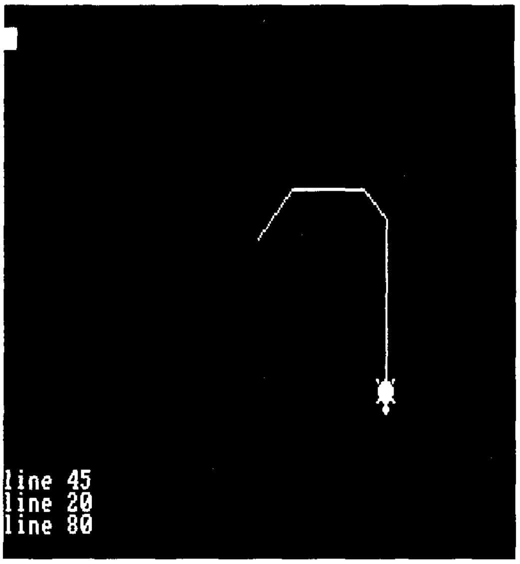
어떤 일이 일어나나요?

이제 위에서 만든 절차를 실행시키기 위해 다음을 입력해 봅시다.

Line [ 어떤 수 ]

Line 다음에 수(들)을 넣어 절차를 실행시켜 보세요. 어떤 일이 일어나나요?

<그림 1>




<그림 2>

용할 수 있는 과제를 전혀 만들지 않았으며, 이러한 사실은 Hillel(1992)의 실험과 일치하는 결과였다. 따라서 변수라는 아이디어를 도입할 수 있는 과제가 요구되었다. 학생들에게 다양한 변수값을 대입하게 함으로서 변수를 나타내는 문자는 변화를 표현하기 위해 사용되면 단지 특정한 수를 나타내는 것이 아니라는 것을 이해하게 할 필요가 있었다. 과제는 변수를 담고 있는 절차에서 변수의 역할을 알아내는 것이었다. 첫 번째 절차<그림 1>은 변화를 발생시키는 변수의 개념을 소개하고 변수명은 임의로 정할 수 있음을 이해시키기 위한 것인데 반해 두 번째 절차는 학생들이 변수가 길이만을 변화시킬 수 있다는 오개념을 갖지 않게 하기 위해 제공하는 절차였다.

학생들이 변수의 역할을 해석할 때 컴퓨터의 역할에 주목할 필요가 있다. 변수값을 넣을 때 화면의 대상이 변화하기 때문에 학생들은 컴퓨터 화면에 나오는 대상들의 변화를 변수값을 변화시키는 행동과 연관시켜 해석했다<그림 2>. 따라서 변수를 나타내는 기호는 단지 특정한 수가 아니며 대상을 (여기서는 선분의 길이) 변화시키기 위해 사용한다고 해석했다. 즉, 컴퓨터 화면에 나타난 직선은 변화를 나타내는 구체적인 방법 (수를 변화시키는 활동)과 추상적인 방법(변수)을 중개하는 준개념과 같은 것으로 해석될 수 있다. 그러나 학생 C와 D의 과제 2와 관련된 활동은 대상의 변화와 변수값을 연결시켜 해석하는 것이 쉬운 일은 아님을 보여준다. 학생 C와 학생 D는 두 변수값을 입력하는 활동과 컴퓨터 화면에 나타난 결과 사이의 관계를 해석할 때 각의 크기에 대한 자신들의 개념에 기초하였다. 수학적으로는 각의 크기가 선분의 길이와 관련이 없지만, C와 D에게 각의 크기는 선분의 길이와 관련이 있었다. 따라서 각으로 보여지는 화면의 결과물의 크기를 변화시키기 위해 각과 선분의 길이를 정해주는 두 변수값을 동시에 변화시켰다. 결국 C와 D는 두 변수의 역할을 구별할 수 없었다.

이러한 경우에 교사의 역할은 필수적이라고 보여진다. 여기서 연구자는 두 값을 각각 따로 분리해서 변화시킬 것을 제안했다. 학생 C와 D는 이 제안에 따라 하나의 변수값을 고정시켜 다른 하나를 변화시키면서 각과 선분의 독립된 변화를 볼 수 있었고 또 이렇게 봄으로서 각 변수의 기능을 구분할 수 있었다. 학생 C와 D가 이러한 활동을 통해 서로 독립된 변수를 받아들일 뿐 아니라 선분과 각에 대한 오개념을 수정하는데 기여했다.

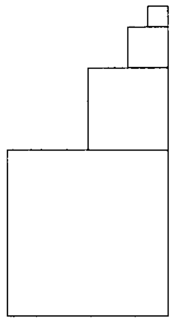
2) 변수 사용하기

학생들은 변수를 사용하는 과제를 스스로 선택하지 않는다는 것은 Sutherland(1992)의 연구 결과에서 밝혀진 바다. 실험 대상이었던 학생들이 변수를 학습한 다음 변수를 사용하기 위해 스스로 선택한 과제는 크기를 임의로 할 수 있는 정삼각형 또는 정육각형 등이었다. 크기를 임의로 하기 위해 변수를 사용한다는 것은 도형의 일반구조 속에서 변하는 것과 불변인 것을 구분할 수 있다는 것을 나타내지만, fd 다음의 수를 변수로 나타내기만 한다면 되고 하나의 변수만 사용한다는 점에서 상대적으로 쉬운 과제다. 따라서 학생들이 변수를 학습하는 초기에는 변수를 사용하는 여러 맥락과 과제를 제공할 필요가 있다.

(1) 자발적으로 변수 사용하기

연구자는 학생들이 관계를 나타내기 위해 변수를 사용할 수 있는 정사각형 과제<그림3>을 제공하였다. 이 과제는 학생들이 변하는 것을 확인하고 변하는 것들 사이의 관계를 명확히 하기 위해 변수를 사용하도록 하는데 목적이 있었다.

특히 이 과제에 대한 해석은 학생들이 대상을 보는 방법과 교사가 대상을 보는 방법이 얼마나 다른가를 보여주었다.



<그림 3>

학생 A는 대상을 공장이라고 했으며, B, C, F는 정사각형 탑, F, D는 계단모양이라고 했다. 그리고 학생들의 대상에 대한 해석이 다를 때 어느 쪽을 선택하는가는 누구의 의견이 강하냐 보다는 어느 쪽이 절차를 정의하기 쉬우냐에 따라 결정되었다. 그러나 연구자의 개입 (대상의 이름은 정사각형탑이다.)은 학생들로 하여금 지각적 영역의 현상학적 구조를 재정의하게 하였다. 연구자의 이러한 개입은 만약 학생들이 대상을 계단모양이나 공장이라고 본다면 절차도 단지 fd와 rt만을 사용한 고정된 크기를 가지도록 정의되었을 것이며, 관계를 표현하기 위해 변수를 사용할 수 있다는 이해를 발달시키려는 교수학적 목적에서 볼 때 적절한 것이었다고 판단된다.

학생들은 이 과제에서 처음부터 자발적으로 변수를 사용하지 않았지만 일단 사용의 필요성을 느낄 때 연구자가 권하자 사용하는데 쉽게 동의했다.

1 F: 또 고쳐야 돼. 귀찮아.
2 연구: 어떤 점이 귀찮은데?
3 F: 자꾸 왔다갔다해야 하잖아요.
4 연구: 새로운 절차를 써 주면 안돼?

5 E: 그럴 필요가 없잖아요, 길이만 바꿔주면 되는데

6 연구: 그게 귀찮다면 변수를 사용하는 것은 어때?

7 E: 맞다! 그러면 편하지! 뒤로 가 봐.

8 F: 아까 뭐라 그랬지? 변수?

9 E: 그래! 뭐라고 하지?… 정사각형 그리잖아.

10 F: 크기라고 할까?

11 E: 아냐! 그게 아니지. 길이지.

1-5 열은 학생 E와 F가 대상에서 변하는 것이 존재하고 따라서 변화를 나타내기 위해 길이를 변화시키지만, 그것을 나타내기 위해 변수를 사용할 수 있다는 생각을 하지 못하고 있음을 보여준다. 그러나 연구자의 제안은 E와 F의 변수에 대한 이해와 사용의 필요성 때문에 쉽게 수용되었다. 9-11열의 대화는 학생 E와 학생 F가 무엇에 대하여 변수를 사용하려고 하는지 명확하게 인식하고 있음을 보여준다. 즉, 두 사람은 대상은 크기가 다른 정사각형으로 이루어져 있으며, 이러한 크기가 다른 정사각형의 한 변의 길이를 나타내기 위해 변수를 사용했다.

일반적인 크기를 갖는 정사각형 탑을 그리는 절차를 정의하고 나자 학생들은 다음 정사각형을 그리기 위한 이동거리는 각각의 정사각형의 크기와 관계가 있다는 것을 화면에 출력된 결과를 통해 알 수 있었다. 이때 학생들은 이 문제의 해결을 위해 변수를 사용하였다. 학생들이 변수를 사용할 수 있는 과제에 대하여 스스로 변수라는 아이디어를 떠올리지는 않는다 해도 일단 사용하고 나면 그 이후에는 자발적으로 변수를 사용할 수 있다는 것을 보여 주었다.

학생들은 이 과제를 해결한 다음 과제를 해결하는데 변수가 필요했으며 사용하는데 어려움이 없었다고 말했다. 여기서 주목할 것은 학생들이 문제를 해결의 결과가 아니라 인지과정이다. 학생 E와 F의 경우를 살펴보자. 처음에 학생들은 대상을 정사각형을 쌓아 놓은 것으로 보지 않았다. 그러나 연구자가 대상의 이름이 정사각형 탑이라고 하자 학생들의 활동은 연구자의 '말'에 의해 구조화된 공간 안에서 활동하였다. 그러나 비록 정사각형을 쌓아놓은 것으로 보기는 했지만 E와 F는 처음 정사각형의 크기를 임의로 설정하였다. 이것은 학생들이 그림으로 주어진 대상의 경험적 시각적 특성에 초점을 맞추고 있다는 것을 보여준다. 이러한 시각은 특수한 크기의 정사각형을 그리는 절차로 나타났다. 시각적 대상을 나타내는 절차의 표현은 추상적이며 대수적인 표현인 s/2 등과 동치인 형태를 띈다. 동시에 시각적 대상을 나타내는 절차는 수자를 사용하기 때문에 그것들은 구체적이며 경험적인 특성을 유지하고 있다. 학생들은 추상적인 표현을 이해하기 시작하지만 표현에서 구체적이고 추상적인 특성에 의존하게 된다. 이러한 중간적인 표현들은 준개념과 유사한 것이다. 학생들이 변수를 사용하는 것이 쉬운 것은 바로 기호적 표현들을 보다 구체적으로 이해했기 때문이다. 그러나 학생들의 이러한 이해는 방해가 되는 것이 아니라 보다 추상적 일반화를 진행하는데 도움을 주었다.

### (2) 서로 관련된 변수로 나타내기

학생들은 일반화된 방법을 형식적으로 표현하기 위해 변수를 사용할 수 있다. 구조화된 면담에서 학생들은 직사각형의 넓이를 구하기 위해 변수를 사용했었다. 그러나 항상 것은 아니다. 그것은 학생들이 형식화를 목표로 하느냐에 달려있다. 정다각형을 그리는 과제에서 학생A와 B는 정다각형의 외각을 구하는 방법을 알고 있었다. 그러나 변의 수와 한 외각의 크기를 서로 관련된 변수로 놓지 않았다. 두

사람의 목표는 형식화가 아니라 그림 그리기에 있었기 때문이다. 따라서 학생 A와 B는 변의 수와 외각의 크기를 각각의 변수로 놓고 그림을 그릴 때 적절한 수를 넣어 주는 방법을 사용했다. 여기서 분명 학생 A와 B는 변하는 것을 나타내는 변수의 의미는 알고 있지만, 그림을 목표로 하기 때문에 서로 관련된 변수로 놓을 필요가 없다.

12 연구: 너희가 만든 절차에는 변수가 두 개 사용되고 있는데 :po는 무엇을 나타내는 거니?
13 A: 변이 몇 갠가…
14 연구: :nana는?
15 B: 각도요, 한 번에 몇 도 도는가
16 연구: 어떤 값이든 가질 수 있니?
17 B: 그럼요, 변순데…
18 연구: 그럼 선생님이 이런 값을 넣어 봐도 될까?(tv 3 50이라고 타이핑) …변이 셋! 외각이 50!

위의 에피소드에서 주목할 것은 연구자의 개입방법이다. 연구자의 개입은 다음과 같은 특징을 가지고 있다. 학생들이 가지고 있던 기존의 말과 행동-여기서는 변수에 대한 이해-에 융합되어야 한다-이것은 학생들의 자기-조절을 강화한다-.둘째 Logo이라는 환경의 특성을 살린다-이것은 microworld의 이념에 부합된다. 18열에 보이는 연구자의 행동은 학생 A와 B 자신들이 변수에 대해 가진 이해와 대립되지 않았기 때문에 이러한 실행의 불가능함을 지적할 수 없었다. 그리고 이 실행은 학생들이 원하지 않는 결과-학생들이 괴물이라고 부른-을 낳았기 때문에 학생들은 변수에 통제가 필요하다는 것을 깨달았다. 물론 이 말이 학생들이 항상 관련된 변수를 사용할 수 있다는 뜻은 아니다. 단지 학생들은 변수의 통제가 타인의 강요에 의해서가 아니라 자신들에게 의미있는 행동임을 깨달았다는 것이다.

여기서 우리가 떠올릴 수 있는 질문은 다음과 같다. 이러한 상황에서 교사가 취할 수 있는 또 다른 행동은 어떤 것일까? 만약 지필 환경이라면 교사는 어떤 방법으로 학생들에게 서로 관련된 변수의 필요성을 역설할 것인가?

### 3) 변수에 대한 해석

#### (1) 변수의 변역

변수의 변역은 수 또는 수가 아닌 어떤 대상으로 이루어진 집합으로서 변수로 사용된 문자가 취할 수 있는 모든 값들로 구성되어 있다. Rosnick(1982)는 문자의 사용법과 문자의 의미 파악에 중요한 판단 기준 중 하나로 변수의 변역을 꼽는다.

Logo에서의 변수값은 모든 실수를 포함한다. 그러나 실험 초기에 학생들이 생각하는 '어떤 수'의 범위는 매우 한정되어 있었을 뿐 아니라 특히 소수사용에서 문제점을 드러냈다. 다음 대화는 학생들이 변수값으로 소수를 사용할 때 나타내는 어려움을 보여준다.

19 E: 정11각형 해 보자.
20 F: 360 나누기 11
21 E: 뭐였지? print?
22 F: 맞아. (타이핑한다) 32.7273…
23 E: 내가 이걸 계산할 수 있을 거라고 생각하냐?
24 F: 소수잖아! 이거 …안하고 그냥 12각형으로 넘어가면 안돼?
25 E: 그럴까? 선생님!
26 C: (그림을) 작게 만들어야 보자. (2 타이핑)
27 D: 소수점 찍어야 돼!
28 C: 소수점을 꼭 찍어야 돼?
29 D: 응! 그래야 작아 져.
30 C: 해 봐.
31 D: 2.0 (타이핑)
32 C: 2.05

24열은 E와 F가 단지 결과가 소수라는 이유만으로 문제해결을 포기하고 소수 사용을 회피하려는 모습을 보여주고 27열과 28열은 소수점 효과에 대한 오개념을 가지고 있음을 보여준다. 학생들의 소수에 대한 오개념은 변수의 변역의 확대를 방해했다. 학생들의 이러한 반응은 소수를 사용하는 경험이 매우 제한되어 있으며, APU(1985)검사의 결과와 일치하기 때문에 놀라운 반응이 아니다.

학생들은 과제를 해결하기 위해 컴퓨터와 상호 작용하면서 변수의 변역을 확장시킬 수 있었다. 비례요소를 나타내는 변수의 역할을 알아내기 위해서는 작은 수를 사용할 필요가 있었다. 과제에서 처음 글자의 크기는 40이었고 비례인자로 변수를 곱했기 때문에 화면의 크기라는 환경적 제약은 학생들로 하여금 이전에 사용하던 10단위의 변수값 대신 소수를 사용하게 했다. 여기서 주목할 것은 컴퓨터의 역할이다. 앞에서 말했듯이 학생들은 환경적 제약 때문에 변수값의 사용 영역을 확대시켰을 뿐 아니라 소수에 대해 잘못 알고 있었음을 확인시켜 주었다.

32 연구: 점점 더 작게 만들 수 없니? 어떻게?
33 C: 있어요. 야! 2.0부터 차례로 넣어 봐.
34 D: 2.0하면 안돼. 처음 거보다 크잖아.
35 C: 그럼 1.0부터

34열은 학생 D가 소수점이 수를 작게 만든다는 생각이 바뀌었음을 보여준다. 이것은 2.0이 1보다 큰 수임을 결과물을 통해서 발견했기 때문이라고 생각된다. 뿐만 아니라 C와 D는 1.0부터 수를 넣어가면서 시행착오를 통해 점점 작아지는 글자를 썼다. C와 D는 컴퓨터를 통해 나오는 결과물은 보면서 점점 작아지는 수의 순서를 확인하였다.

(2) 변수 기호에 대한 해석

많은 연구들(Collis, 1974; Kuchemann, 1981; Booth, 1984; Wagner, 1981)이 학생들은 대수에서 변수를 나타내기 위해 문자를 사용한다는 아이디어를 받아들이고 사용할 때 어려움을 느낀다고 보고했다. 더욱이 변수를 표시하는 기호의 변화가 변수가 나타내고 있는 대상의 변화를 함의하며 일반적으로 변수로 사용되는 알파벳을 다룰 때 알파벳의 순서가 수의 순서에 대응되어 있다고 생각하고 있다는 연구결과도 있었다.

함수게임은 변수기호에 대한 이러한 인지적 장애를 예방할 목적으로 제공되었다. 학생들이 변수기호의 임의성을 이해하는 것은 Logo환경에서는 쉬운 일이었다. Logo에서 변수는 임의로 정할 수 있으며 학생들은 이미 변수명을 임의로 정하는 경험을 해 보았다. 다음 대화는 변수명의 임의성과 변수명의 변화가 대상의 변화를 함의하지 않는다는 것을 보여준다.

36 연구: 어떠니? 두 사람이 만든 함수는 같은 함수일까?
37 A, B: 네!
38 연구: 왜?
38 B: 둘 다 똑같은 결과가 나오잖아요.
39 A: 맞아요.
40 A: (즉시 edit 모드로 이동한다)
41 연구: 두 함수가 같니?
42 A: B는 변수를 앞에 넣었는데 저는 변수를 뒤에 넣었어요.
43 연구: 그런데도 이 두 함수가 서로 같은 거니?
44 B: 같은 거요.
45 A: 똑같아요! 65*12나 12*65나 같잖아요.

42열은 학생 A는 변수라고 말하고 있다. 그러나 실제로 두 사람이 사용한 변수명은 x와

su로 서로 달랐다. 그럼에도 불구하고 변수라고 총칭했다는 것은 변수명이 임의적임을 이해하고 있다는 것을 나타낸다. 이전의 학습에서 두 사람은 변수명을 임의로 정하여 절차를 정의해 보았다. 이러한 경험이 변수명의 변화가 대상의 변화를 함의하지는 않는다는 것을 이해하는데 도움을 주었다고 볼 수 있다. 또한 알파벳의 순서가 수의 순서에 대응한다는 생각도 이러한 경험을 한 경우는 나타나지 않는다는 것을 알 수 있다.

(3) 2차 관계에 대한 이해

Kuchemann은 학생들이 문자를 변수로 볼 수 있을 때까지는 대수에서의 문자사용의 잠재력을 깨달을 수 없다고 주장했다. 학생들이 문자를 변수로 보기 전까지는 C.S.M.S. 항목 "2n과 n+2중 어느 쪽이 더 큰가? 설명하시오."에 대해서 바르게 대답할 수 없다고도 주장했다. "이 문제의 초점은 학생들이 두 식의 상대적 크기가 n의 값에 따라 다르다는 것을 인식하는지 알아보려는 것이다." 14세 학생들의 6%만이 이 문제에 바르게 대답했으며, 이 문제에 대한 바른 응답은 2차 관계 즉, 집합 사이의 관계는 다른 집합사이의 관계에 의존한다는 아이디어를 받아들일 때 가능했다고 주장했다. 또한 Collis는 연산이 행해지지 않는 대수식을 하나의 대상으로 받아들일 수 있는 능력을 완전성 결여의 수용이라고 하였으며 명명하였으며, 많은 학생들이 이것을 이해하는데 어려움을 겪는 것으로 나타났다.

연구자는 함수가 서로 다를 때는 어떤 관계를 갖는지 알아내는 과제<그림 4>를 제시했다.

이 활동의 의도는 각 연산의 결과들이 독립변수에 따라 어떻게 변하며, 두 함수간의 2차 관계를 인식하게 되도록 하는 것이었다. 연구

다음 두 함수기에 대한 절차를 써 봅시다.

```
To Y1 :X
print :X + 5
End
```

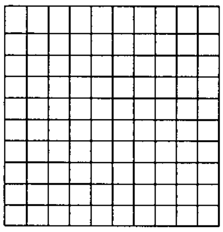
```
To Y2 :X
print :X * 5
End
```

두 함수기는 서로 같다고 할 수 있다고 있을까요? 이유를 말해봅시다.
이제 다른 값을 입력해 보고, 결과를 정리해 봅시다.

| 입력 | 출력 | |
|---|---|---|
| X | Y1 | Y2 |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

| 입력 | 출력 | |
|---|---|---|
| X | Y1 | Y2 |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Y1의 출력값이 Y2의 출력값보다 클 때는?
Y2의 출력값이 Y1의 출력값보다 클 때는?
Y1의 출력값과 Y2의 출력값이 같을 때는?
다음 그래프를 완성해 봅시다.



<그림 4>

자의 의도는 단순히 학생들이 수를 대입하면서 그 조사결과만을 중심으로 2차 관계가 있다는 것을 인식시키는데 관심이 있었다. 그러나 학생들은 이보다 한 걸음 더 나아가서 2차 관계를 찾을 수 있는 방법을 스스로 개발했다. 다음의 대화는 학생들이 어떻게 2차 관계의 해집합을 구하는지를 보여준다.

46 E: 아! 차이가 자꾸 커지잖아.
47 F: po도 커지잖아
48 E: 알아! po도 커지는데, nana하고 po의 차이가 점점 커진다고
49 F: 100 한 번 넣어 봐.
50 E: (100을 넣어 출력값을 낸다) 500, 25. 이것 봐.
51 F: 나도 그럴 거라고 생각했어.

학생 E와 F는 처음에 3, 6, 9, 12, 15, 18과

같은 수를 넣어 결과를 출력하였다. 46-48열은 두 함수에 변수값을 넣어 본 결과를 단순히 비교하는 것이 아니라 각각의 함수값의 변화정도를 비교하고 있음을 보여준다. 두 사람은 더 이상 큰 값을 넣는다는 것은 의미가 없는 일이라는 합의에 도달했다. 그래서 학생 E와 F는 보다 작은 수(소수를 포함하여)를 변수값으로 선택하여 대입하기 시작했다. 학생들의 과제해결에서 보이는 이와 같은 자신감과 시도는 컴퓨터와의 상호작용과 학습과제의 구조 때문이라고 볼 수 있다. 먼저 컴퓨터 환경에서는 학생들은 스스로 계산을 할 필요가 없기 때문에 학생들이 사용을 꺼렸던 다양한 수의 사용이 허용된다. 다음으로 과제에는 변수값이 지정되어 있지 않고 학생들이 스스로 선택하게 되어 있기 때문에 어떤 결정을 요구한다. 학생들이 두 식의 상대적 크기를 비교하고 함수식을 만들 수 있다는 것은 완전성이 결여된 식을 잠재적으로 계산 가능한 하나의 실재로 파악할 수 있음을 보여준다.

(4) 계산규칙이나 수의 성질의 일반화된 표현에 사용되는 변수

초등학교 교과서에서는 산술의 규칙이나 수의 성질을 일반화하는 표현으로 동그라미나 세모 등을 이용한 식이 이용되고 있다. 그러나 이에 대한 지도가 구체적인 상황에서의 충분한 예가 주어지지 않은 채 즉각적인 이해를 바라면서 곧바로 도입되고 있다(김남희, 1997).

다음의 대화는 이와 같은 방법으로 학습한 곱셈과 나눗셈에 대해 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 보여준다. 학생 A와 학생 B는 각각 함수 x*0.5, x/2을 만들었으며 상대의 함수를 모르는 채로 함수값에 따라 결과가 같다는 것을 확인하고 두 함수를 실제로 비교해 보기로 했다.

52 B: 그런데 어떻게 같은 수가 나와요? 저기는 나누기를 해줬고 저는 곱하기를 했는대요?

53 연구: 곱셈과 나눗셈은 같은 결과를 가질 수 없니?

54 B: 곱하면 커지고 나누면 작아지잖아요.

55 연구: 그러면 두 함수기는 서로 다른 걸까?

56 B: 다른 수를 넣어 봐요. 180!

52열은 학생 B가 곱셈과 나눗셈에 대해 어떻게 생각하고 있는지 확인시켜 주는 질문이다. 학생 B는 곱셈에 대해 동수누가 모델을 가지고 있기 때문에 곱셈은 증가하고 나누면 감소한다고 생각한다. 이러한 모델은 사실이고 직관적으로 수용할 수 있지만 연산자가 범자연수일 때만이다. 여기서 주목할 것은 학생 B가 이미 분수와 자연수의 덧셈과 곱셈사이의 관계를 배웠다는 사실이다. 그러나 그 경험은 연산규칙을 나타내는데는 유용했을지 모르지만 연산개념을 확장시키는데는 충분하지 못했음을 보여준다.

이 과제에서 학생 B는 자신이 가지고 있는 동수누가 모델에 따라 서로 다른 결과를 낳게 하는 변수값을 찾을 수 있을 거라고 생각했다. 56열은 학생 B가 동수누가 모델을 의심하기 보다는 서로 다른 함수값을 갖게 하는 변수값이 있으며 그것을 찾으려고 시도하고 있음을 보여준다. 그러나 여러 수를 대입해 보았지만 결국 찾지 못했다. 이러한 상황은 학생들의 개념을 확장시킬 수 있는 기회를 제공한다. 실제로 학생 B는 곱했다고 해서 반드시 증가하는 것은 아니라는 사실을 깨달았다고 말했다. 연구자는 :x*0.5과 :x*1.3을 제시함으로서 그러나 예를 탐구해 보게 했다.

학생들이 연산에 대해 가지 선입관과 그것의

극복을 보여주는 또 다른 예로 학생 A의 활동을 살펴볼 수 있다. 함수게임에서 학생 A는 자신이 생각할 수 있는 가장 어려운 함수를 만들고 싶어했다. 따라서 나눗셈이라는 연산과 소수 사용이 선택되었다. 이것은 소수사용을 꺼리는 학생들의 공통적인 경향과 나눗셈은 어렵다는 선입관을 보여준다. 그렇게 만들어진 함수가 x/0.5였다. 결국 학생 A는 수를 넣어보기까지는 이 함수가 갖는 수학적 의미를 이해하지 못했다고 볼 수 있다. 그러나 실제로 입력값을 넣어보면서 그 결과가 입력값과 너무나 가까우며, 나눗셈은 작아질거라는 예상을 깨고 입력값이 작아지자 반대로 함수값은 커진다는 것을 확인하고 매우 놀라워했다.

이러한 예들은 과거에 교과서에서 제시된 연산규칙이나 수의 성질을 나타내는 표현들이 학생들에게 연산규칙은 알려주었으나 연산개념을 확장시키지 못했음을 보여준다. 컴퓨터를 통해 함수를 탐구하는 활동은 변수기호를 이해하는데 도움을 주지만 동시에 변수와 관련된 주변 개념들 즉, 연산개념을 확장시키는데 도움을 준다는 것을 알 수 있었다.

### 4) 학생들의 변수이해에 대한 과제를 통한 면담

학생들과의 수업을 분석하면서 다음과 같은 몇 가지 가설이 만들어졌다.

① Logo프로그래밍 과제에서 변수를 사용한 경험이 변수라는 아이디어를 수용할 수 있다.

② 과제의 해결을 위해 많은 수의 입력이 필요했던 변수와 관련된 과제를 다루어 보았기 때문에 하나의 변수가 많은 수를 나타낼 수 있다는 것을 이해할 수 있다.

③ 연구자의 지시에 의해 절차를 정의하기 위해 변수명을 임의로 선정 및 전환했을 때 그 것이 결과물에 하등의 영향을 주지 않는다는 것을 경험했기 때문에 변수명 자체는 중요하지 않다는 것을 이해했을 것이다.

④ 함수게임과 함수조사는 완전성 결여를 수용하는데 도움을 주었을 것이다.

⑤ 함수조사는 두 식 사이에 2차 관계가 존재한다는 것을 이해하는데 도움을 주었을 것이다.

이러한 가설을 조사하기 위하여 6명의 학생을 대상으로 과제를 통한 구조화된 면담이 실시되었다(<그림5>, <그림6>).

다음에서 볼 수 있듯이 6명의 학생들은 모두 변수라는 아이디어를 수용하고 있는 것으로 나타났다. 그러나 학생 A의 경우 변하는 것을 나타내기 위해 변수를 사용한다는 아이디어는 적극적으로 수용하고 스스로도 그렇게 사용했으나 관계를 명확히 하기 위해 변수를 사용한다는 아이디어는 자발적으로 기호화되지 못하고 연구자의 질문 후에 관계를 나타낼 필요가 있음을 인식했다.

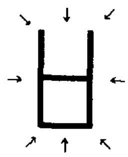
변수가 나타내는 값의 범위에 있어서는 학생들이 말한 수에서 질적인 차이를 찾을 수 있다. 학생 A, D, F가 흔한 자연수 몇 개만을 예로 든 반면 학생 B는 소수를, 학생 C는 많은 다양한 수를, 학생 E는 매우 큰 수를 변수값으로 들었다. 특히 학생 B는 소수의 사용을 꺼리던 것에서 벗어나서 스스로 소수의 예를 들 수 있을 만큼 발전했음을 보여 주었다.

변수명은 학생 A와 C를 제외하고는 모두 하나의 문자를 변수명으로 선택하였다. 이것은 Logo로 학습할 때, 단어 또는 약자를 사용하던 것에서 간단함을 선호하는 쪽으로 바뀌었음을 보여준다. 한편 학생 A가 선택한 변수명은 연구자가 한 번 제시한 적이 있었던 것이다. 학생 A는 그 후에도 이 변수명을 선호했다.

서로 다른 변수명이 같은 값을 가질 수 있는

1.어떤 크기의 ㄴ도 그릴 수 있는 절차를 만들려고 합니다. 아래에 절차를 써 봅시다.

2. 보여주는 그림을 보고 크기를 마음대로 할 수 있는 절차를 써 봅시다.



3. 다음 절차를 살펴봅시다.

```
to angle :x :y
  rt 90
  fd :x + 20
  rt :y + 30
  fd :x + 40
end
```

만약, angle 20 20을 입력하면, 화면에는 어떤 그림이 그려질까요?

4-1.

```
to line :x
  fd :x + 3  ---------- ①
  fd :x      ---------- ②
  fd :x - 2  ---------- ③
  fd :x - 5  ---------- ④
end
```

<그림 5>

4-2

```
to move :a :b :c
  fd :a fd :b fd :c -------- ①
  rt 90
  fd :c fd :b fd :a -------- ②
end
```

위의 명령어 ①, ②는 언제 같은 길이의 선분을 그릴까?

4-3

```
to ANN :A :B :C :D
  fd :A fd :B fd :D -------- ①
  rt 90
  fd :A fd :C fd :D -------- ②
end
```

위의 명령어 ①, ②는 언제 같은 길이의 선분을 그릴까?

4-4

```
to rob :x
  fd 2 * :x -------- ①
  fd 2 + :x -------- ②
end
```

위의 명령어 ①과 ② 중 어느 것이 더 길이가 긴 선분을 그릴까?

5.

```
to line :x
  fd 2 * :x + 10 -------- ①
  fd 30          -------- ②
end
```

위의 명령어 ①과 ②의 길이는 같은가?

6. 어떤 크기의 직사각형의 둘레를 계산할 수 있는 절차를 만들려고 한다. 직사각형과 그 둘레를 구하는 절차를 정의하세요.

<그림 6>

가에 대해서 네 명의 학생은 그렇다고 즉시 대답했지만, 학생 A와 학생 F는 처음에는 변수개념의 이해에 대한 인지적 장애라고 분류된 오개념을 나타냈다. 즉, 결코 같을 수 없는 이유를 묻는 연구자의 질문에 학생 A와 학생 F는 "서로 다르잖아요"라고 응답했다. 그러나 연구자가 두 문자가 어떤 값을 가질 수 있는가를 묻자 곧 생각을 바꾸어 같을 수 있다고 대답했다. 이것은 두 학생이 처음에는 두 문자를 변수라기 보다는 문자로 인식했다는 것을 보여준다. 그러나 연구자의 질문에 의해 변수라는 사실을 재인식하고 어떤 값도 가질 수 있다는 변수의 개념에 맞게 대답할 수 있었다.

학생들은 문제 2번 3번에 걸쳐 문제를 해석하는데 어려움이 없었다. 이것은 학생들이 완전성이 결여된 식을 수용하고 있음을 보여준다. 실제로 학생들은 과제에서 간단한 함수기를 만들어 보았다. 이것이 학생들이 완전성이 결여된 식을 수용하는데 도움이 되었다고 보인다.

학생 6명 모두 두 식간의 2차 관계를 지적했다. 학생 B와 C가 변수값으로 소수를 사용한 것은, logo로 학습하는 과정에서 보여주었던 소수사용의 기피하던 것에서 변화를 보이는 것이며, 학생 E의 경우 변수의 변역의 연속성을 인식하고 있음을 보여준다. 학생들의 이러한 행동들은 2차 관계조사 학습이 도움을 주었다고 보인다.

문제 5에 대한 응답은 6명의 학생들이 일상언어로 표현된 일반적인 방법을 변수를 사용해서 형식화 할 수 있음을 보여주고 있다.

### 5) 수학에 대한 신념의 변화

6명의 학생들은 모두 수업을 즐거워하였다. 학생 A의 경우 때때로 학생 B에게 의존하는 경우가 있지만 대체적으로 활동을 즐겼다. 그 이유는 한 번도 접해보지 못했던 소프트웨어이기 때문은 아니다. 학생들이 모두 컴퓨터반 학생들이고 많은 애니메이션을 다루어보았다는 점을 감안할 때, 대단히 느리고 내가 원하는 대로 움직이지 않는 Logo는 답답하게 느껴졌을 것이다.

학생들은 Logo 환경에서 서로 다투고 대립하고 의미를 묻고 합의에 도달했다. 학생들은 수업을 "이전에는 수학에 자신이 없었지만 지금은 자신이 생겼다" 또는 "평소에 학교 수학 수업이 재미가 없었는데, 이 수업을 해 보고 나니 학교 수학 수업시간이 더 재미없게 느껴질 것 같다", "이렇게 생각을 많이 해보긴 처음이다"라고 평가했다. 이것은 학생들이 무언가 학습했다고 느꼈기 때문에 나타나는 반응이라고 볼 수 있다. 즉, 학생들은 수학시간에 시행착오도 하고 오랫동안 생각하여 결과를 확인한다는 점등을 매우 즐겁게 받아들였다.

## VI. 결론 및 반성

위의 분석결과로 부터 여러 가지 결론을 이끌어 낼 수 있다.

첫째, 학생들은 스스로 변수를 사용할 수 있는 과제를 선택하지는 않는다는 것이다. 연구자는 변수를 도입하기 전에 변수를 도입할 수 있는 기회로 이용하기 위해 원시명령어를 지도하는 과정에서 자율적 과제 선정의 기회를 주었지만 변수를 도입할 수 있는 경우는 없었다. 변수도입을 위해서는 교사에 의한 과제가 필요하다고 볼 수 있다.

둘째, 학생들은 변수라는 아이디어를 받아들이고 변수를 사용할 수 있는 과제가 주어졌다고 해도 스스로 변수를 사용하지 않을 수 있다. 그러나 일단 변수를 사용해 본 경험이 있으면 그 이후에는 변수 사용이 자발적일 수 있다. 따라서 학생들이 변수를 사용할 수 있는 적절한 과제를 제시해 줄 뿐 아니라 사용을 권장할 필요가 있다.

셋째, 변수를 이해할 때 컴퓨터가 중요한 역할을 할 수 있음을 보여준다. 특히 화면에 나타나는 대상은 변수를 사용한 추상적이고 일반적인 관계의 표현과 학생들의 구체적인 경험의 중간에 위치한다. 이러한 시각적인 형태는 교사의 입장에서는 추상적이며 대수적인 표현과 일치하지만, 동시에 형태는 크기 등과 같은 구체적이고 경험적인 특성을 유지하기 때문에 학생들에게는 구체적인 경험을 제공한다. 그리고 이러한 시각적 형태의 이중적 특성이 수업 중 논의에서 생산적으로 참여하고 일반적이고 추상적인 이해를 막지는 못한다. 이 과정에서 필연적으로 발견되는 학생들의 변수, 수, 도형, 연산 등에 대한 오개념은 학생들에 의해 발견되고 교사는 이것을 개념을 확장시키는 기회로 이용할 수 있다.

넷째, 학생들이 대상을 보는 시각과 교사가 보는 시각은 다르며 반드시 수학적이라고 볼 수는 없다. 따라서 교사는 학생들의 현재의 지식과 이해에 적응할 필요가 있으며, 이러한 적응이 학생과 교사의 상호작용을 유지시키는데 결정적인 역할을 한다. 연구자와의 상호작용은 학생들이 시각적 영상을 해석하는데 가지는 어려움이 대상에 대한 기존의 지식과 관련이 있다는 것을 설명해 주었다.

다섯째, Logo환경에서 변수를 지도하기 위해서는 특별한 과제와 발견적 질문들이 필요했

다. 학생들이 어떤 개념을 학습할 때, 그 개념을 발견하기 위해서는 행하고 생각해야만 한다. 행하는 것과 사고하는 것은 동시에 일어날 수 있으며 또한 둘 중 하나가 선행할 수도 있다. 행하는 것과 사고하는 것 게다가 과정들에 대해 사고하는 것과 행하는 것은 발견적 질문들에 의해 안내 받는다. 앞에서 살펴보았듯이 학생들은 스스로 변수라는 아이디어를 받아들이는 과정은 행하는 것과 사고하는 것이 동시에 일어날 수 있음을 보여준다. 이러한 방법은 학생들에게 호기심을 조장하고 학생들이 학습하는 것들의 이유를 알아내고 가능한한 많이 깊게 사고할 수 있게 했다. 인과에 대한 사고는 수학학습을 의미있게 만들고 즐겁게 한다. 학생들이 수업 후에 보인 수학에 대한 태도는 바로 이러한 활동의 결과로 볼 수 있다.

여섯째, 학생들의 대화는 학교에서 암묵적으로 변수를 나타내기 위해 사용되는 기호나 모양의 경험이 변수의 심층을 이해에 충분히 기여하지 못했음을 보여주었다. 학생들은 기호나 네모 등을 변화 및 다가 이름으로 보지 않았다. 특히 연산규칙을 표현하기 위해 사용되는 네모 등은 계산방법을 알려주지만 연산의 개념자체는 발달시키지 못하고 있음을 볼 수 있다.

일곱째, 기호화와 해석은 변수기호를 통하여 변화 및 관계성이라는 대수적 의미를 구성할 수 있는 서로 다르지만 상호보완적인 활동으로 보인다. 학생들은 Logo에서 관계를 나타내기 위해 변수를 스스로 선택하는 자유를 보장받았으며 이러한 자유는 변수기호가 함수관계에 영향을 주지 않는다는 해석에 기여했다. 반대로 변수에 값을 넣어보면서 변수의 역할을 해석하는 활동은 변하는 대상을 나타내기 위해 변수를 사용하라는 연구자의 제안을 자연스럽게 받아들이게 했다.

본 연구의 결과 학생들의 변수에 대한 이해뿐 아니라 소수, 연산, 기하개념을 학습하는데 매우 긍정적인 효과를 줄 것으로 기대할 수 있었다. 특히 소수와 연산개념에 대한 효과를 고려할 때 단지 변수개념만이 아니더라도 Logo를 활용할 가치가 있어 보인다. 그러나 변수개념을 지도하기 위해 컴퓨터를 활용하는데에는 여전히 많은 문제가 남아있다.

첫째, 컴퓨터를 활용하여 변수를 지도할 수 있는 다양한 과제와 지필 환경과 연계시킬 수 있는 방안이 연구되어야 한다.

둘째, 컴퓨터에서의 협력활동의 조직방법과 시기 등에 대한 심도 있는 분석이 필요하다. 본 연구에서 역할분담이 완벽하게 이루어져 학습의 기회를 놓치게 되는 사례가 기술되었다.

셋째, 본 연구에서 제시된 사례는 컴퓨터를 사용한 변수 수업의 극히 일부분에 지나지 않는다. 컴퓨터를 사용하여 변수를 지도할 수 있는 단원이 중학교와 연계하여 계발되어야 효과적인 변수지도를 할 수 있을 것으로 보인다.

## 참고문헌


김남희 (1997), 변수 개념의 교수학적 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

심규선 (1997), 교육용 프로그래밍 언어 Mal을 이용한 함수개념 지도. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

이종영 (1999), 컴퓨터 기반 수학 학습-지도 환경에 관한 교수학적 분석. 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

Booth, L. (1984). *Childrens straitegies and error.* Windsor, NFER-Nelson.

Cobb, P. & Steffe, L. P.(1983) The constructivist researcher as teacher and model builde. *Journal for Research in Mathematics Education,* 14, 83-94.

Collis K. F.(1974). Cognitive development and mathematics Learning. Paper prepared for PME Workshop, Centre for Science Education, Chesea Colledge, London, 28 June.

Freudentgal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic Publishers Group. Boston.

Hillel, J. (1992). The Notion of variable in the context of turtle Graphics. In Hoyles, C. & Noss, R (Ed.), *Learning mathematics and logo.* London : The MIT Press.

Hoyles, C & Sutherland, R. (1989). *Logo mathematics in the classroom.* London : Routledge.

Kuchemann, D. E. (1981). Algebra, In K. Hart(Ed.), *Children's understanding of mathematics*(pp.11-16). London; Murray.

Resnick, P. C. (1982). The use of letters in precalculus algebra. UMI, AAC8219845, University of Massachusetts.

Schoenfeld, A. H. & Archivi, A. (1988). On the meaning of variable. *Mathematics Teacher,* 81(6), 420-427.

Sinclair, H. (1990). Learning the interactive recreation of knowledge, In L.P. Steffe and T. Wood (Eds). *Transforming children's mathematical knowledge; International perspectives*(pp. 19-29). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

Sutherland, R. (1992). What is algebraic about programing in Logo? In Hoyles, C. & Noss, R (Ed.), *Learning mathematics and logo.* London : The MIT Press.

Tall, D. (1994). Computer emvironments for the learning of mathematics. In R. Biehler, R. W., Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann(Eds.), *Didatics of mathematics as a scientifics discipline.* Kluwer Academic Publishers.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A. F. Coxford (Ed.). *The idea of algebra, K-12* (1988 Yearbook). Reston, VA: NCTM.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and funtion under transformation of variable. *Journal for Reaserch in Mathematics Education,* 12(2), 107-118.

# A Case Study On the 6th Graders' Understanding of Variables Using LOGO Programming

Hee-chan Lew (Korea National University of Education)
Hye Jin Shin (Sinsangdo Elementary School)

The concept of variables is central to mathematics teaching and learning in junior and senior high school. Understanding the concept provides the basis for the transition

from arithmetic to algebra and necessary for the meaningful use of all advanced mathematics. Despite the importance of the concept, however, much has been written in the last decade concerning students' difficulties with the concept.

This Thesis is based on research to investigate the hypothesis that LOGO programming will contribute to 6th grader' learning of variables. The aim of the research were to; · investigate practice on pupils' understanding of variables before the activity with a computer; · identify functions of LOGO programming in pupils' using and understanding of variable symbols, variable domain and the relationship between two variable dependent expressions during the activity using a computer; · investigate the influence of pupils' mathematical belief on understanding and using variables.

The research consisted predominantly of a case study of 6 pupils' discourse and activities concerning variable during their abnormal lessons and interviews with researcher. The data collected for this study included video recordings of the pupils' work with their spoken language.