대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.1, 283~310, March 2000

연구동향

수학교육 연구 동향
-네덜란드의 현실적 수학교육-

정 영 옥(진주교육대학교)

I. 들어가며

최근 수학교육은 '수학은 인간의 활동'이라는 관점 하에 그에 따른 교수학습에 대한 많은 연구들이 진행되고 있다. 이러한 관점은 궁극적으로는 수학 인식론에 대한 근본적인 변화에 기인한 것이라고 생각할 수 있다. 즉, '새수학'의 실패 이후로 그 대안으로 대두된 구성주의가 그 바탕을 이룬다고 할 것이다. 이러한 구성주의는 객관적이고 절대적인 실체를 거부하는 좀더 심오한 수리철학적인 문제는 덮어두더라도, '인간은 능동적인 학습자'라는 것을 더욱 강조하면서 우리의 수학 교육 현실에 전환의 계기를 마련하고 있다. 이러한 동향에 발맞추어 우리나라의 7차 수학교육과정에서도 구성주의를 그 기초로 활동을 중시하며 자기주도적 학습이 가능하고, 창의적이며 다양한 사고의 여지가 있는 교육과정의 개발이 진행되고 있다. 또 최근에는 미국수학교사협의회가 1990년대의 수학교육의 방향을 제시한 '수학교육과정과 평가의 새로운 방향'을 발표한 이래 2000년대를 위한 'Standards 2000'을 제안하였고, 이는 1990년대의 맥을 이으면서 그 동안의 많은 경험을 살려서 더 많은 것들을 보완하고, 특히 최근 10년간 급속히 발달해온 컴퓨터를 수학 학습에 좀더 적극적으로 반영하고자 하는 것이다.

그러나, 이러한 '인간활동으로서의 수학'을 강조하는 수학교수학습이 구성주의에만 유일한 것은 아니다. 이미 1970년대 초부터 활동으로서의 수학을 기본 전제로 수학교수학습에 대한 이론적·실제적 연구를 시행해 온 '현실적 수학교육'이 바로 그 한 예가 될 수 있을 것이다. 이는 네덜란드의 1970년대의 IOWO 연구소의 초등학교 수학교육과정 연구를 위한 'Wiskobas'팀으로부터, 1980년대의 OW&OC, 1990년대는 Freudenthal 연구소[1]로 개칭된

1) IOWO는 Institute for Development of Mathematics Education(Instituut voor de

Freudenthal의 아이디어를 지지하는 사람들이 수 십 년간 연구해 온 수학교육의 한 사조를 일컫는다. 이 사조는 한편으로는 미국에서 네덜란드로 밀려올 것 같은 '새수학'에 대한 반작용이었고, 다른 한편으로는 그 당시 네덜란드 수학교육의 지배적인 접근방식인 '기계적 수학교육'에 대한 반작용이기도 하였다. 약 30년이라는 기간동안 Freudenthal의 '이상적 현실주의'가 그 지지자들의 '현실적 현실주의'로 더욱 구체화되고 보완되어 왔고, 이러한 보완과정에서 기본적인 기능에 대한 더 많은 초점이 맞추어져 왔다(Treffers, 1991).

본 연구에서는 이러한 현실적 수학교육의 이론적 배경을 살펴보고, 그 동안 진행되어 온 교육과정 개혁을 위한 노력을 개관한 다음, 그 노력을 구체화한 수업의 실제 를 살펴보고자 한다.

II. 현실적 수학교육의 이론적 배경

이 장에서는 네덜란드의 현실적 수학교육의 기초가 되는 이론적 배경으로 기본 원리와 수업이론을 고찰하고자 한다.

1. 현실적 수학교육의 기본 원리

현실적 수학교육은 '인간 활동으로서의 수학'이라는 관점에 그 뿌리를 두고, 안내된 재발명과 점진적인 수학화, 수준이론, 교수학적 현상학을 그 기본 원리로 삼고 있다. 첫 번째 원리인 '점진적인 수학화'와 '안내된 재발명'은 수학자의 활동을 모든 학습의 중심에 놓는 Freudenthal의 관점에 기초한다. 이러한 그의 생각이 명확하게 드러난 것은 1968년 강연 'Why to teach mathematics so as to be useful?'에서이다.

> 인간이 배워야 하는 것은 닫힌 체계로서의 수학이 아니라 활동, 즉 현실을 수학화하는 과정 그리고 가능하다면 수학을 수학화하는 과정이다(Freudenthal, 1968, p.7).

Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs), OW&OC는 Research Group on Mathematics Education and Educational Computer Center(Vakgroep voor het Onderzoek van Wiskunde & Onderwijs Computercentrun)를 의미하는 네덜란드어의 약자이고, Freudenthal Institute의 정식 명칭은 Developmental Research for Mathematics and Informatics Education(OWIO)이다.

이 때 수학화는 현상을 조직화하는 활동을 의미한다. 그에 따르면, 어린 아동을 위한 수학교육은 무엇보다도 일상적 현실을 수학화하는 것에 목표를 두어야 한다. 그러나, 그들의 수준에 맞는 수학을 수학화하는 과정도 역시 중요하다. 학생들은 개념학습이나 문제해결 절차에서 이루어지는 일반화하기, 추측하기, 반성하기, 정당화하기, 증명하기, 모델링, 기호화, 정의하기, 도식화하기 등의 수학적 활동을 경험할 기회를 가져야 한다.

이에 동반되는 안내된 재발명 원리(Freudenthal, 1973)에 의하면, 학생들은 수학이 발명된 과정에 유사한 하나의 과정을 경험할 기회를 가져야 한다. 즉, 학습 과정은 학생들이 스스로 결과를 찾을 수 있도록 계획되어야 한다. 이를 위해 수학사나 아동들의 비형식적 지식과 전략이 교육과정 설계를 위한 근원이 될 수 있다. 교육과정 개발자는 이러한 것들을 근원으로 한 사고실험을 바탕으로 학생들이 스스로 답에 이르는 경로를 상상하는 것이 중요하다. 일반적으로 사람들은 다양한 범위의 사고와 전략을 가능하게 하는 문맥 문제들을 찾을 필요가 있으며, 점진적인 수학화의 과정을 통해서 가능한 학습경로를 찾아가도록 하는 것이 필요하다.

둘째, 수준이론에 관하여 살펴보면, 수학화는 수준 상승과 밀접한 관련을 갖는다. 수준 상승이라는 아이디어는 Freudenthal의 수학 학습 개념의 핵심에 있다. 한 수준에서의 조작 활동이 다음 수준에서 분석의 대상이 된다. 한 수준에서의 조작 대상이 다음 수준에서는 교과 내용이 된다. 이러한 그의 수준이론은 Van Hiele의 수준이론을 기초로 하고 있지만, Van Hiele 이론은 거시적인 반면 Freudenthal의 수준은 미시적이다. Van Hiele(1986)은 여러 가지 사고 수준에 대한 그의 아이디어를 수학교육에서의 많은 문제들을 위한 해석의 틀로 도입한다. 그는 교사와 학생간의 의사소통 과정을 분석하였고 교사와 학생들이 사용하는 개념의 의미가 서로 다르다는 것을 관찰하였다. 비록 같은 용어들이 사용되었지만, 그것들의 의미는 서로 다른 준거틀에 기반을 두고 있다. 교사들은 그들 나름대로 자신이 가르칠 내용에 관한 여러 가지 관계들의 틀을 가지고 있지만 학생들은 그렇지 않다. 그 결과 그러한 틀의 존재를 미리 가정하는 주장들에 대한 논의가 불가능하다. 쌍방이 모두 같은 틀을 가지고 있을 때만 자유롭게 논증을 기초로 의견일치에 도달할 수 있다. 그의 이론을 학교수준에 적용하기 위해서는 기초 수준, 제 1 수준, 제 2 수준이 중요하다. 따라서, 이러한 수준이론에서 고려하여야 할 것은 아동이 이러한 수준의 비약이 이루어질 수 있도록 어떤 교육과정과 교수학적 방법을 취하는가 하는 점이다.

세 번째 원리인 교수학적 현상학은 이러한 수준의 비약을 가능하도록 취해야 할 교수학적 조처를 위한 하나의 준비가 될 수 있다. Freudenthal(1983)은 현상학적 방법을 통해 수학을 분석함으로써 수학을 인간의 활동으로 보고 수학적 활동의 본질을 수학화로 인식하였

다. 수학화는 현상을 수학적 수단인 본질로 조직하는 것을 의미하며, 수학화 과정은 현상과 본질의 교대 작용에 의한 수준 상승의 불연속적 과정이라고 볼 때, 교수학적 현상학은 이런 현상과 본질의 상대적인 관계를 교수학적 측면에서 논하는 것이라 할 수 있다. 이와 같은 관점에서 보면, 역사적으로나 개인적으로나 수학적 개념, 아이디어, 구조의 형성은 많은 현상을 다루어 봄으로써 심상을 구성하고 나중에 이론화할 수 있는 기반을 만들어 주는 것이 중요하다. 또한, 교수학적 현상학은 현실을 수학의 응용을 위한 근원으로만 보는 것이 아니라 현실 속에서 직관적 관념을 개발하기 위한 또는 심상을 구성하기 위한 개념 형성의 근원을 찾는 것을 목표로 하고 있다. 우리가 수학을 실제적인 문제들을 해결하는 과정에서 역사적으로 발달된 것으로 본다면, 추상적인 수학을 구체화한 구체물에 의존하기보다는 이러한 발달 과정을 가능하게 했던 문제들을 현시대의 응용에서 찾아보는 것이 합리적일 것이다. 형식적 수학은 상황고유의 문제 해결 절차와 개념을 다양한 상황들에 대해 일반화하고 형식화하는 과정에서 출현되었다고 생각할 수 있다. 따라서, 이러한 교수학적 현상학적 탐구의 목표는 상황 특유의 접근 방식이 일반화될 수 있는 문제 상황들을 찾고, 수직적 수학화의 기초로 간주할 수 있는 패러다임적인 해결 절차들을 발전시킬 수 있는 상황들을 찾는 것이다.

2. '현실적'의 의미

현실적 수학교육은 Treffers(1987)가 수평적 수학화와 수직적 수학화에 대한 구분을 통해 기존의 수학교육 사조를 기계적, 구조적, 경험적이라 부르고 수학화를 중시하는 네덜란드의 수학교육을 현실적이라고 부른데 기인한다. 이러한 수평적 · 수직적 수학화의 공공연한 진술에도 불구하고, 현실적 수학교육은 '실세계 수학교육' 말하자면 수평적 수학화가 중시되는 수학교육으로 이해하기 쉽다. Freudenthal(1991)이 지적하듯이, 수평적 수학화라고 표현되는 것과 수직적 수학화라고 표현되는 것 사이의 경계는 잘 정의되지 않는다. 핵심적인 것은 '현실'이라는 것이 무엇을 의미하는가 하는 것이다. Freudenthal(1991, p. 17)은 "나는 '현실'이라는 용어를 어떤 상식의 단계에서 실제적으로 경험되는 것에 적용하고자 한다"라고 말한다. 그에게 있어서 현실은 감각적 경험과 해석의 혼합물로 이해된다. 이는 수학 또한 개인의 현실의 일부가 될 수 있다는 것이다. 현실은 정적인 것이 아니라 당면한 개인의 학습 과정의 영향을 받아 성장하는 것이다. 이것이 또한 Freudenthal(1991, p. 18)의 "현실에서 출발하고 현실에서 머무르는 수학"에 대한 표현이 어떻게 이해되어야 하는가를 보여주는

것이다. Van den Brink(1991, p. 80)는 '현실적'이란 "아동들이 그 상황을 상상하고, 자신의 아이디어, 경험, 환상을 구현할 수 있다"는 의미임을 주장한다. '상상하다'의 네덜란드 번역은 'zich REALISIEren'이다(Van den Panhuizen-Heuvel, 1998). 따라서, 네덜란드 수학교육 개혁이 '현실적'이라고 불리는 이유는 현실 세계와의 연결성 때문만이 아니라 아동들의 마음속에서 무엇인가 그려내거나 상상할 수 있는 문제 상황들을 제시하는 것을 강조하는 것과 관련된다. 이것이 의미하는 바는 문제들이 학생들에게 제시되는 문맥이 실세계의 문맥일 수 있지만 항상 그럴 필요가 있는 것은 아님을 의미한다. 환상적인 동화의 세계 심지어는 형식적인 수학 세계조차도 그것들이 학생들의 마음속에서 현실적인 것으로 느껴진다면 문제를 위한 적절한 문맥들이 될 수 있다. 말하자면, 현실적이란 단순한 일상생활을 의미하기보다는 그것을 포함하는 더 광범위한 세계로 아동이 체험할 수 있고, 감정이입이 될 수 있으며, 자신의 여러 가지 경험을 혼합해서 생각하고 상상력을 불러일으킬 수 있는 상황을 의미하며, 그러한 상황에서 수학적인 세계로 들어서는 것이 수평적 수학화이고 수학적인 세계에서 좀더 추상적인 수학의 세계로 한 걸음 더 진전하는 것이 수직적 수학화이며, 이것이 또 아동의 현실이 되고 이러한 순환과정이 반복되면서 현실이 성장되어 가는 것이다. 따라서, 현실적 수학교육에서 중요한 것은 단순히 아동의 현실 세계에서 시작한다는 것뿐 아니라 수업상황 자체가 아동의 체험의 일부가, 즉 현실화되도록 하는 것이 중요한 것이라고 할 수 있다. 따라서, 모든 수업에서 수시로 이러한 현실의 세계와 수학의 세계가 교대되도록 하는 것이 중요하다.

현실적 수학교육에서 수학은 우선적으로 하나의 과정, 인간 활동으로 간주될 수 있다. 동시에 안내된 재발명 원리는 교사의 적절한 안내에 의해 이러한 활동을 통한 수준 상승에 의해 산물로서의 수학에 이르게 된다는 것을 의미한다. 이를 위해 아동의 상상력이 발휘될 수 있는 적절한 상황들이 마련되어야 하며, 이러한 체험된 수학을 통해서 아동들은 수학이 생의 일부가 되며 여전히 유용하게 인식되는 것이다.

3. 현실적 수학교육의 수업이론

현실적 수학교육의 수업이론은 안내된 재발명 원리와 점진적인 수학화를 구현해 나가기 위한 좀더 구체적인 원리로서 Treffers(1987)가 제안하였다. 이는 첫째, 현상학적 탐구, 둘째, 수직적 도구에 의한 연결, 셋째, 학생들 자신의 구성과 산물, 넷째, 상호작용수업, 다섯째, 학습영역의 연결이다. 이러한 원리들을 좀더 상세하게 살펴보면 다음과 같다.

(1) 현상학적 탐구

현실적 수학교육에서의 수업의 첫 번째 단계는 구체적인 문맥으로 시작된다. 문맥이란 "어떤 구체적인 수업 과정에서 학생들에게 열려 있는, 수학화되어야 할 현실의 영역(Freudenthal, 1991, p. 73)"을 의미한다. 이 단계에서는 수학화를 염두에 두면서 여러 가지 개념과 구조가 내포된 현실 상황을 탐구한다. 이러한 탐구에서 중요한 것은 여러 가지 개념과 구조의 본질적인 측면에 관한 풍부한 직관적인 관념 또는 비형식적 지식과 전략을 개발하도록 하는 것이다. 또한 구체적이라는 의미는 어린이들이 조작할 퀴즈네어 막대나 블록들과 같은 구체물과는 전혀 다른 것이다. 이는 '현실적'이라는 것을 의미하며, 아동이 상상하고, 그 자신의 경험을 활용하고, 자신의 비형식적 전략들이 표출될 수 있는 상황을 의미한다. 이 때 현실이란 개념, 아이디어, 연산 및 구조의 근원으로서도 또한 그것들을 응용하는 영역으로서도 공헌한다.

(2) 수직적 도구에 의한 연결

수학적 개념이나 기능을 학습하는 것은 장기간에 걸쳐서 진행되는 과정이고 다양한 추상화 수준에 따라 이행되는 과정이다. 수학교육의 중요한 문제의 하나는 이와 같이 추상적인 수학적 지식을 어떻게 가르치는가의 문제이다. 지금까지의 일반적인 방식은 그러한 추상적 지식을 구체화한 구체물을 제시하는 것이다. 그러나, 구체물의 사용이 실제로 아동들이 수학적 통찰에 도달할 수 있도록 도움을 주지는 않는다. 구체물에 의한 접근 방식은 이미 완성된 지름길로 곧바로 접근하도록 되어있기 때문에, 제시된 구체물 자체는 구체적일 수 있지만 그러한 구체물이 드러내어야 할 수학이 여전히 아동들에게는 추상적이다. 즉, 구체물에 의한 수업은 아동들의 상황적인, 비형식적 지식을 간과하기 때문에 아동들의 기존의 인지구조와 맞물리지 못한다고 볼 수 있다. 이에 Cobb(1987)은 교수학적 표현에 구현된 수학적 개념은 그것들을 이미 가지고 있어서 그 구체물에서 그것들을 인식할 수 있는 전문가들만 볼 수 있다고 말한다. 즉, 구체물에 의한 외적인 표현과 그 안에 들어 있는 정신적 표상은 일치하기 어렵다는 것이다. 구체물 행동과 그것을 통해서 도달해야 할 정신적 행동은 동형으로 보기 어렵다는 것이다. 이에, 현실적 수학교육에서는 아동의 비형식적 지식과 전략에 기초한 수업의 필요성을 주장하며, 이를 위해 모델의 사용을 중시한다. 지금까지의 구체물이 이미 존재하는 모델을 나타낸다면, 현실적 수학교육에서는 모델이란 학생들 스스로가 문제 해결 과정에서 개발한 것이다(Treffers, 1991). 이러한 모델은 다양하며, 모델의 사용은 여러 가지 자료, 화살표 기호와 같은 시각적 모델, 상황 모델, 도식, 다이어그램, 그리고 기

호와 같은 수학적 수단들이 제공되거나 아동들에 의해 탐구되고, 개발되도록 한다는 것을 의미한다(Streefland, 1990).

(3) 학생들 자신의 구성과 산물

수준 상승은 반성적 사고에 의해서 촉진되며, 갈등이나 학생들 자신의 활동은 반성적 사고가 일어나도록 하는 데 도움이 될 수 있다. 이런 반성적 사고를 가능케 하고 학생들의 활동을 더욱 활성화하기 위해서는 주어진 문맥을 다루어 가는 것도 중요하지만, 어떤 단계에 이르러서는 좀더 새로운 상황에 직면하도록 할 필요가 있다. 현실과 관련된 문제나 수학적인 문제로서 다양한 해결책과 때로는 다양한 수준에 따른 해결책을 허용하는 열린 문제나 해결되기 전에 자료나 준거들을 스스로 보충할 것을 요구하는 불완전한 문제 또는 모순이 되는 문제를 다루는 것도 필요하다. 또한 스스로 문제를 고안하고 기호나 용어, 도식 또는 모델을 고안하는 등의 활동을 통해서 학생들은 수업에서 수학화 과정을 스스로 경험해 갈 수 있다(Streefland, 1988).

Van den Brink(1987)는 특히 아동의 자유로운 산물 중에 '교과서 저자로서의 아동'을 강조한다. 아동들은 수학을 잘하든 못하든 다음에 입학할 어린 아동들을 위한 수학책을 만든다는 데 대해 즉각적인 열의를 보인다. 아동들은 새로운 아이디어들을 많이 생각해 내는데, 교재와 유사한 문제 뿐 아니라 교재에서는 보기 어려운 교실상황을 소재로 문제를 만들기도 하고 어떤 학생은 유치원 학생들이 현재 소유하고 있다고 생각되는 만들기, 그리기, 세기 등의 기능을 고려한 후에 그 기능에 맞도록 계산 문제들을 각색하기도 한다. 또한 수학책에 넣을 게임 등을 만들어 낸다. 특히 이러한 수학책은 또한 개별화에 적절하다. 즉, 아동은 이러한 과정에서 자신들의 수준을 드러내고 자발적으로 더 나은 성취를 하도록 자극한다는 것이다. 일부 아동들은 큰 수들을 더 빨리 도입하기도 하고 그것들을 다양한 문제와 응용에 사용하기도 한다. 따라서, 학생들 자신의 자유로운 구성과 산물을 통해 학생들은 스스로 수학 학습과정에 공헌할 수 있는 기회가 극대화된다고 할 수 있을 것이다.

(4) 상호작용수업

재발명에 의한 학습은 다양한 현실들로부터 출발해서 다양한 기법들을 개발하면서 자유롭게 문제들과 수학적 절차들을 구성하고 만들어 낼 기회를 목표로 한다. Streefland(1990)는 이러한 열린, 현실적 접근은 개별화되고 다양한 반응 패턴들을 불러일으키기 때문에, 상호작용을 위한 반복적인 기회들이 존재한다고 말한다. 학생들은 여러 아이디어들을 비교하

고 교환하며, 서로 다른 수학화의 수준에서 문제의 해결책에 관해 논의할 것이고, 때로는 인지적 갈등 상황을 경험하면서 더 나은 진보를 위한 최선의 방법을 협의할 것이다. 일반적으로 자기 자신의 활동과 다른 사람들의 활동을 비교할 기회는 또한 자기 자신의 문제 해결방법을 반성할 기회도 제공한다. 집단 학습을 촉진하기 위한 상호작용의 요구는 학습을 위한 사회적 문맥으로서의 학교 학습 환경을 존중함으로써 충족될 수 있다. 이곳이 아동들 상호간에 아이디어들을 교환하고, 협의하고, 여러 주장들을 반박하고, 논의하는 일들이 장기적인 학습과정에 공헌하고 진정으로 개별화된 교수를 위한 전제조건의 역할을 할 수 있는 곳이다. 동시에 상호작용은 전체 집단이 수학 학습에서 진보할 수 있도록 도와준다. 학생들이 개발한 비형식적인 전략들과 절차들을 구사할 수 있는 기회를 잘라버리기 보다는 그것들이 허용되고, 촉진되고 이용되도록 하는 것이 중요하다.

(5) 학습 영역의 연결

수학을 배운다는 것은 단편적인 지식과 기능을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 지식과 기능을 하나의 구조화된 전체로 조직하는 것이다. 따라서, 새로운 개념과 기능은 기존의 지식체에 동화되거나 아니면 기존의 지식체 자체가 이 새로운 개념과 기능에 의해 새롭게 조직되어야 한다. 따라서, 새로운 관점에서 기존의 지식을 살펴보는 기회를 마련해야 하고 교사는 이런 기회를 충분히 제공해야 한다. 따라서, 하나의 새로운 개념과 기능을 알기 위한 출발점이 되는 예견 학습과 새로운 개념과 기능을 알았을 때, 기존의 지식체를 새로운 안목에서 보는 회고학습이 이루어져야 한다. 즉, 수학을 학습한다는 것은 단지 지식과 기능의 관련된 요소들의 모임을 마음속에 비축해두기보다는 잘 조직화되고 의미 있는 전체에 적합한 구조화된 지식과 기능들을 구축하는 것을 의미한다. 예견 학습과 회고 학습의 연장선상에서 학습 영역의 혼합을 생각해 볼 수가 있는데, 이것은 관련된 학습 과정을 전체로 보는 관점이다. 학습은 가능한 한 일찍부터 지속적으로 서로 얽혀 있는 여러 영역들로 조직되어야만 한다. 수학의 다양한 영역들이 횡적·종적으로 연결되어 전체적인 구조화가 이루어질 때, 수학을 여러 복합적인 상황에 응용할 수 있다. 또한 처음부터 응용과 순수수학이 결합되어야 하며, 현실이 수학적 구조와 개념의 근원이자 응용 영역이 되도록 지도되어야 한다. 따라서, 여러 가지 학습 가닥을 포함하고 있는 상황 모델로서 작용할 수 있는 문맥을 찾아내는 것이 중요하다.

III. 현실적 수학교육 개혁의 과정

이 장에서는 앞장에서 제시된 이론적 배경을 기초로 실제 네덜란드에서 이루어진 수학교육과정 개혁 과정을 살펴보고자 한다. 네덜란드에서 '현실적 수학교육에 기초한 교육과정'[2]의 개발은 초등학교를 위한 Wiskobas 프로젝트, 대학진학을 준비하는 고등학교를 위한 Hewet[3] 프로젝트, 대학비진학 학생들을 위한 프로젝트, 중등학교를 위한 Wiskunde 12-16 프로젝트의 순으로 이루어졌고, 현재도 계속해서 수정・보완되고 있다.[4]

1. 초등 수학교육과정 개혁 : Wiskobas 프로젝트

네덜란드 수학교육 개혁의 실제적인 동인은 1968년 Wijdeveld와 Goffrey가 창안한 'Wiskobas'[5] 프로젝트의 착수에 있다. Wiskobas는 CMLW[6]의 한 프로젝트였는데, 이 위원회는 처음에 중등학교에서의 수학교육을 현대화하기 위해 1961년 정부가 설립한 것이었다. 1970년 Wiskobas 프로젝트의 시작과 함께, 이러한 관심이 초등학교에도 쏟아졌다. 1971년 IOWO의 설립은 Wiskobas 프로젝트의 전문적인 개발에 필요한 것들을 제공해주었으며, 이러한 개발을 더 확고하게 하였다. 네덜란드의 이러한 개발은 국제적인 활동과도 보조를 맞춘 것이었다. 그 당시, 다른 국가에서도 비슷한 연구와 개발을 위한 연구소들이 설립되고 있었다. 예를 들면, 영국의 Shell Center, 독일의 Institut für Mathematik in Bielefeld 뿐만 아니라 많은 미국의 연구소들이 당시부터 시작되었다.

비록 Wiskobas의 기초는 Wijdeveld와 Goffrey에 의해 놓여졌지만, 네덜란드 교육개혁에 불을 당긴 사람은 IOWO의 의장인 Freudenthal이었다. 그의 가장 기본적인 관점은 수학은

2) 네덜란드의 초등교육은 6살에서 12살 또는 13살까지인데, 이는 필수적으로 거의 동일한 교육과정에 따른다고 볼 수 있다. 단, 사립학교들은 크게 다를 수도 있다. 중등교육은 매우 다양화되어 있다. 대부분의 중등학교들은 12살에서 16살까지의 학생들을 대상으로 4년의 교육과정을 가진다. 또한 직업교육을 위한 학교도 있다. 5년제인 중등학교는 공업학교의 학생들이나 낮은 수준의 중등교사들을 위한 단과대학에 입학할 학생들을 준비시킨다. 6년제 학교는 일반적으로 대학에 입학하기를 희망하는 문과와 이과 학생들을 위한 것이다.
3) 'Reshuffling Mathematics I and II'을 의미하는 네덜란드어의 약자이다.
4) 1998년 이후로 익과 학생들을 위한 교육과정인 수학 B를 응용 중심으로 개정하고 있다. 또한 1998년에서 2000년까지 초등학교 교육과정에 대한 개요를 준비하고 있다.
5) Mathematics in Primary School을 나타내는 네덜란드어 약자이다.
6) Mathematics Curriculum Modernization Committee를 나타내는 네덜란드어 약자이다.

현실과 연결되어야 하며, 아동 가까이에 머물러 있어야 하며 사회와 관련지어져야 한다는 것이다. 이로 인해 인간적인 가치가 생기게 된다는 것이다. 이러한 관점은 수학을 교과내용으로 보는 것이 아니라 인간활동으로서 보는 것이다. 안내된 재발명에 의한 점진적인 수학화라는 대전제 하에 이 연구는 1970년부터 본격적으로 진행되어, 1975년까지 초등 학교 실험 수학교육과정을 완성하였다. 이러한 연구 결과가 1976년 'Five Years of IOWO'라는 주제로 Freudenthal의 은퇴를 기념하여 보고되었다. 또한 이러한 경험을 중심으로 Treffers는 'Three Dimension'(1978, 1987)[7]에서 현실적 수학교육을 위한 모델을 제시한다. 다음으로 1976년부터 1980년까지 교과서를 계속 정련하였다. 이러한 현실적 초등 수학교육 교과서는 물론 1980년에서 1990년 사이에 처음에 개발된 교과서들이 계속 수정 보완되어 왔고,[8] 1980년에는 5%, 1990년에는 75%, 1998년에는 80%의 초등학교에서 사용하고 있다[9].

---

7) 1978년은 이 책이 네덜란드로 출판된 연도이고, 1987년은 영어로 번역되어 나온 연도인데, 제 7 장의 '수업이론을 위한 틀' 은 현실적 수학교육에 대한 이해를 돕기 위해 영어판에 새롭게 삽입된 내용으로, 이로써 현실적 수학교육의 이론적 틀이 체계화되었고 대체적으로 완성되었다고 볼 수 있다. 이 책에는 Wiskobas가 개발한 수업자료 중 '걸리버여행기', '주근깨 마을', '8의 나라', '세는 문제', '장기판 위의 곡식' 등을 간략하게 제시하고 있다.

8) 이 당시의 개혁의 초점은 기본 기능과 현실적 수학교육의 특징을 균형있게 종합하는 것이었다. 그 이후로도 계속 보완되어왔는데, 1989년 Treffers, A., De Moor, E 및 Feijs, E.는 초등학교의 계산-수학 수업을 위한 국가 프로그램의 초안 'Proeve van Nationaal Programma voor het reken-wiskunde onderwijs op de basisschool'을 썼고, 그 이후로 초등학교 수학을 위한 Rekenen & Wiskunde 교과서시리즈가 출판되었다.

9) 이러한 교과서의 개발과 더불어 Freudenthal 연구소는 교사들이 학교 현장에서 현실적 수학교육을 실행하기 위한 많은 지원을 하고 있다. 그 대표적인 프로젝트로 TAL 프로젝트와 Math Net을 들 수 있다. TAL프로젝트는 1997년에서 2000년까지 실행될 Teaching Learning Trajectories for Primary School Mathematics의 약자로 교육부에 의해 제안되었다. 이 프로젝트의 목표는 초등학교 아동들의 수학에 대한 종적인 교수 학습 경로를 기술하는 것이다. 이러한 경로들은 유치원에서 초등학교 6학년까지 아동의 수학적 이해가 어떻게 발달해 가는지에 대한 전반적인 개관을 보여준다. 아동들은 초등학교 수학의 목표를 성취하기 위하여 자신의 경로를 따라 통과할 것이라는 기본적인 아이디어가 이 프로젝트의 핵심이다. 이는 수업실제와 교사의 전문적인 발달, 몇몇의 수업 실제에 대한 좋은 예가 비디오로 녹화되어 있기 때문에 교사들이 실제적인 많은 도움을 받을 수 있다. Math Net 프로젝트는 교사들이 초등학교 학생들에게 현실적 수학교육을 할 때 도움을 주기 위한 것이다. 이는 두 가지의 활동을 한다. 하나는 교사들이 정기적으로 만나서 그들의 일상적인 수학 수업에 대해 서로 이야기하는 것이고, 다른 하나는 Freudenthal 연구소의 연구원들이 교사들의 모임에 참여하여 문제 상황에 대해 이야기를 듣고 그것을 충분히 반영하기 위한 것이다. 인터넷 웹 사이트를 통해서 동료들과 의사소통할 수 있는 많은 기회들이 있다. 또한 많은 게임, 활동지,

이러한 계속적인 개발연구의 목표는 세로 산술, 분수, 비, 측정과 기하에 관련된 교수학습자료의 개발과 더불어 현실적 수학교육의 이론적 틀을 개발하는 것이었다(Treffers and Goffree, 1985) 이러한 결과 안내된 재발명에 의한 점진적인 수학화를 기본원리로 문맥의 사용, 모델의 사용, 학생들 자신의 구성과 제작, 학습과정의 상호작용, 학습 영역의 연결 등을 수업이론으로 개발하였고, 이는 앞장에서 기술한 바 있다.

또한 1986년 CITO[10]가 주관한 전국가시험을 계기로 1987년부터 현실적 초등수학교육과 관련된 평가 연구인 More 프로젝트가 진행되어 현실적 초등 수학교육에 적절한 테스트를 개발하는 데 중점을 두었다(Van den Panhuizen-Heuvel, 1996).

2. 중등 수학교육과정 개혁 : Hewet 프로젝트

Hewet 프로젝트[11]는 대학진학을 위한 인문계 고등학교 학생들을 위한 교육개혁 운동의 일환이다. 이러한 프로젝트가 시작되기 전의 네덜란드 고등학교의 수학교육과정은 1968년에 도입된 것이다. 이는 수학 Ⅰ과 수학 Ⅱ로 구분되어 있었고, 학생들은 아무 것도 선택하지 않기, 수학 Ⅰ, 수학 Ⅰ과 수학 Ⅱ의 세 가지 방법 중 어느 한 가지를 선택할 수 있었다. 수학 Ⅰ은 해석학과 통계학, 수학 Ⅱ는 주로 선형대수였다. 수학 Ⅰ은 정밀과학, 농학, 의학 등을 전공할 학생들을 위한 것이었고, 수학 Ⅱ는 좀더 광범위하게 수학을 배우고 싶은 학생

실제적인 조언 등 교사들이 많은 아이디어를 얻을 수 있는 공간을 마련하고 있다.

10) 이는 National Assessment Institute를 나타내는 네덜란드어 약자이다.

11) 다음은 대학에 진학하지 않는 학생들을 위한 교육과정 개혁의 노력도 이루어졌는데, 이는 1987년 3개학교를 대상으로 실시되어서, 1989년에는 25개 학교가 참가하였고, 그 결과 1990년에 새로운 교육과정이 도입되었다. Hewet 프로젝트가 주로 수학 A를 위한 교육과정 개혁이었다면, 최근에 수학 B를 위한 교육과정 개혁 노력이 이루어지고 있는데 그것이 Profi 프로젝트이다. Profi 프로젝트는 자연과학을 지망하는 고등학교 학생들의 국가 수학교육과정과 테스트를 개발하는 데 목적이 있다. 모델링, 추상화, 추론을 균형 있게 포함하는 새로운 교과과정을 개발하는 것이 이 프로젝트의 기본 원리이다. 이 프로젝트의 첫 번째 단계에서는 미적분과 기하에 대한 8개의 소책자가 발행되었다. 가장 특징적인 것은 그래프 계산기에서 Cabri에 이르기까지 공학을 통합적이고 교수학적으로 의미있게 사용하는 것이고, 물리, 수학사, 문맥들을 사용하는 것과 이산적인 개념에서 연속적인 개념까지 지도하는 것이다. 기하학 분야에서는 Voronoi diagrams와 같은 현대적인 응용을 theory of cyclic quadrangles 및 conics와 같은 고전적인 주제와 통합시키는 것이 가장 큰 특징이라 할 수 있다. 고전적인 주제에서는 증명과 그 발견에 많은 관심이 주어진다. 두 번째 단계에서는 학생들이 소그룹으로 할 수 있는 좀더 많은 열린 과제들을 개발하는 것이다.

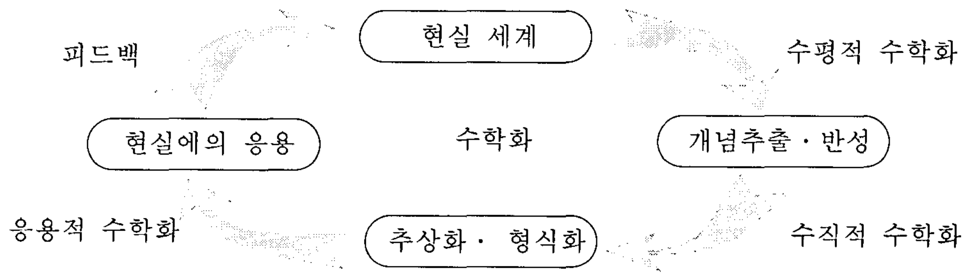
들을 위한 것이었다. 이 당시 경제학과 사회과학 등을 전공할 문과 학생들은 수학을 배울 필요가 없었다. 그러나 시대가 변함에 따라 문과 학생들을 위한 수학의 필요성이 증가되었다. 그러나 이 학생들에게 수학 Ⅰ은 별로 도움이 되지 않을 뿐 아니라 성공적으로 공부하는 학생들도 거의 없었다. 70년대에 이러한 문제를 거론하는 보고서들이 나오긴 하였지만 1981년 2월에 Hewet 보고서를 제시한 위원회가 개최될 때까지는 실제적인 변화는 일어나지 않았다. 이 보고서에서 제시한 내용은 수학 B는 자연과학과 공학을 지원하는 학생들을 위한 교육과정, 수학 A는 경제학과 사회과학을 지원하는 학생들을 위한 교육과정으로 새로운 제안을 시도하고자 하는 것이었다.

이러한 Hewet 프로젝트는 1981년에 시작되어, 6년 동안 진행되었으며, 그 결과가 De Lange의 박사논문인 Mathematics, Insight and Meaning(1987)에 보고되어 있다. 수학 A는 도구로서의 수학을 강조하며, 기초 및 응용해석학, 응용행렬, 확률과 통계, 자동 정보 처리를 그 내용으로 하고 있다. 해석학에서는 도함수와 미분 법칙, 최적화 문제, 주기함수와 삼각함수, 지수함수와 로그함수 특히 이것들이 생물학과 경제학과 관련하여 다루어지고 있다. 행렬에서는 덧셈과 곱셈, 인접 행렬, 연결 행렬, 이주행렬, 확률행렬, 정보행렬, 인구 폭발 행렬, 연립 일차 방정식, 선형 프로그래밍 등을 다룬다. 통계와 확률에서는 통계자료를 해석하는 방법으로서 빈도수, 히스토그램, 누적빈도수, 순열, 조합, 이항분포와 초기하분포, 가설 검정 등을 다룬다. 자동정보처리에서는 앞의 영역들과 관련하여 몇 가지 기본 프로그래밍을 배운다. 수학 B는 개혁 이전 수학 Ⅰ에서 다루었던 미적분, 또한 새롭게 다시 도입된 공간 기하를 포함한다.

이 프로젝트의 진행은 수학 A에 초점을 맞추면서 단계적으로 진행되었다. 1981년 8월부터 2개 학교를 대상으로 실험을 시작하였고, 1983년 8월부터 10개 학교를 더 증가시켰고, 1984년 9월부터 40개 학교를 더 늘렸으며, 1985년 나머지 학교들이 모두 참가하였다. 이러한 실험은 국가에서 제시하는 평가를 통해 계속 점검되면서 진행되었다. 또한 처음 2개 학교를 제외하고는 교사교육과 더불어 같이 진행되었다. 또한 이 연구의 고문인 Kindt와 De Lange는 처음 보고서를 제출하고, 선정된 2개 실험학교의 모든 수업을 참관하고, 교수학습 자료를 개발하고, 교사교육과정을 조직하고, 최종적인 보고서를 담당한 사람들이다. 또한 연구자들은 참관과 더불어 학생들과 교사들과 면담을 통해 이러한 자료들을 계속 수정 보완하였고, 이것이 1985년 새로운 교육과정으로 소개되었다.

이 교육과정의 가장 큰 특징은 실제적인 응용을 가장 최우선으로 놓는 것이었다. 이를 위해 경제학, 사회과학, 생물학, 의학, 지리학 등 여러 학과와 관련된 책들을 참조로 영감을 얻어 교수학습자료를 창안하였다. 이러한 생각은 Wiskobas 프로젝트와 마찬가지로, 현실적

인 문맥을 수학화의 근원이자 응용의 근원으로 삼고자 하는 것이다. 따라서 현실적 문맥의 탐구, 수학적 개념의 추출, 추상화 및 형식화, 현실 세계의 응용 싸이클이 전개되는 것이 이러한 교육과정의 가장 핵심적인 부분이다. 이 과정을 나타내면 <그림 1>과 같다.



<그림 1> 수업에서의 수학화 과정

또한 이 연구의 주된 특징 중의 하나는 '수학 A를 어떻게 평가할 것인가?'를 처음부터 고려해왔다는 것이다. 이는 교사들의 우려를 반영한 것이기도 하였지만, 이러한 교육과정이 의미 있게 반영되기 위해서는 필수적인 것이었다(De Lange and Kindt, 1984). 이에 Hewet 팀은 수학 A를 위한 목표가 실험교과서에 명백히 드러나는가 하는 문제와 일상적인 시험에서와 같이 시간 제한이 있는 지필고사가 이 프로그램을 지배하지 못하도록 하는 문제를 스스로 제기하고 그 해결책을 모색하였다. 이 교육과정의 목표는 수학화, 반성, 발명, 창조와 같은 중요한 활동들이기 때문에 단순한 지필고사로는 이러한 능력 등을 평가할 수 없다는 것이다. 이에 대안적인 과제들이 제시되었는데, 예를 들면, 가정 과제, 두 단계 과제, 구두 과제, 수필 과제 등이다(De Lange and Verhage, 1987). 이러한 과제들을 통해서 테스트 자체가 학습과정에서 구성적이고 생산적인 역할을 할 수 있으며, 학생들이 그들의 능력을 충분히 보일 수 있는 기회를 보이고자 하는 것이다.

3. 중등 수학교육과정 개혁 : Wiskunde 12-16

Wiskunde 12-16 프로젝트는 중등학교 12세에서 16세의 학생들의 교육과정 개혁을 위한 것이다. 이 프로젝트는 Freudenthal 연구소와 SLO[12]의 공동 연구로 1987년에서 1992년까지

12) Foundation for Curriculum Development의 네덜란드어 약자이다.

진행되었다. 그 결과는 1992년 9월 '새로운 교육과정 수학 12-16의 기초(Achtergronden van het Nieuwe Leerplan Wiskunde 12-16)'라는 보고서 두 권으로 교육부에 제출되었다. 이는 1993년 12세의 학생들을 위한 새로운 교육과정으로 도입되었다(De Lange, 1993).

이러한 교육과정의 변화의 기저에는 수학교육의 중요한 목표가 이전처럼 학생들에게 교과내용으로 수학을 도입하는 것이 아니라 학생들이 사회에서 자신의 능력을 충분히 발휘할 수 있도록 준비시키는 것이라는 생각이 깔려 있다. 점점 더 수학의 응용영역들이 증대되고 있기 때문에 이러한 준비 과정에서 중요한 것은 응용이다. 이러한 관점 하에 Wiskunde 12-16 프로젝트는 고급산술, 대수, 기하, 통계와 그래프를 중심으로 그 교육과정을 응용중심으로 개발하는 데 중점을 두었다. 개발된 자료는 '측정 공식', '잔디베기', '정육면체만들기', '자리 정하기', '경주로', '규칙성과 대칭', '확대와 축소', '맥박', '성장의 차이', '그래프 그리기', '비행 시뮬레이션', '메카', '회전풍차', '계통도', '산' 등 많은 것들이 포함되어 있다.

IV. 현실적 수학교육의 실제

이 장에서는 앞장에서 개관한 교육과정의 실제를 살펴보기 위해 초등학교 1학년을 위한 '수중나라'(Freudenthal, 1976), 6학년을 위한 '걸리버 여행기(Treffers, 1987)'와 관련된 수업 일부를 간단히 소개하고자 한다.

'수중나라' 프로젝트는 우리나라 제 7 차 교육과정의 내용과 비교해보면, 도형영역의 공간 감각기르기에 해당되는 부분이다. 참고로 '수중나라'와 관련된 우리나라 교육과정의 내용을 살펴보면, 1-가 입체도형의 모양, 1-나 평면도형의 모양, 점판에서 공간 감각기르기, 2-가 기본적인 평면도형, 구체물의 이동에서 공간 감각 기르기, 2-나 입체도형의 구성, 3-가 각과 평면도형, 평면도형의 이동에서 공간감각 그리기 등이다. 물론 이러한 내용들은 '수중나라'의 내용과 완전히 일치하는 것은 아니다.

우리나라 교육과정의 도형 영역의 내용과 현실적 수학교육의 기하 영역의 내용의 근본적인 차이점은 우리나라의 경우에는 입체도형의 모양을 다룰 때 물론 실생활과의 연결성을 고려하여 주변의 물건 중에 상자모양, 둥근 기둥모양, 공모양 등을 찾아보도록 시도하고 있지만, 그런 물건들이 제공되는 공간은 고려되지 않는다. 반면 현실적 수학교육의 기하의 특징은 우리가 살아 움직이는 공간에 대한 탐구라는 점이다. 수준이론에 따라, 현실적인 공간과 유사하면서도 좀더 다루기 쉬운 공간을 출발점으로 선택하고 그러한 공간에 존재하는 현상들을 주로 지각적 수단에 의해 구조화할 수 있게 한다. 이러한 직관적 관념이 이후의

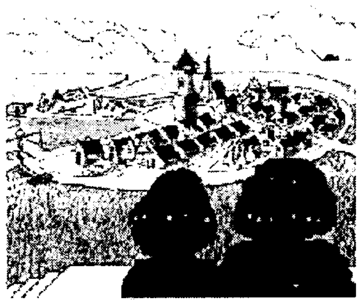
개념형성을 위한 광범위한 기초가 되며, 추론, 논의, 언어적 상징, 그림 등에 의해 표현된다. 그 다음 단계에서 여러 가지 개념이 명백해진다. 또한 현실적 수학교육의 특징은 기하영역을 다루면서도 측정이나 수와 연산과 관련된 활동을 같이 포함할 뿐만 아니라 우리나라 교육과정의 여러 학년에 걸친 내용을 하나의 커다란 주제속에서 통합적으로 다룬다는 점이다.

'수중나라'에서 다루어지고 있는 내용은 지각적 수단에 의해 가공의 공간인 수중나라를 탐색하는 기초적인 단계이며, 우리나라 교육과정의 1-가에서 3-가까지의 내용을 발전시키기 위한 준비활동으로 생각할 수 있다. 예를 들면, 블록으로 만들어진 산을 보고 블록으로 직접 만들어 보는 활동을 통해 입체도형의 구성을 위한 준비활동을 할 수 있고, 사진을 찍은 사진사의 위치를 찾는 경험에서 위치와 각의 직관적인 의미를 파악할 수 있고, 그림 지도에서 위치 찾는 활동을 통해 좌표의 직관적인 관념을 형성할 수 있다.

요약하면, '수중나라' 활동은 우리가 살아 움직이는 공간에 대한 탐구 활동으로 기하의 초보인 2차원, 3차원 공간의 도형에 대한 명백한 개념이 다루어지기 전에 가공의 공간에서 여러 가지 공간적 현상들을 지각적 수단에 의해 다루어보는 활동을 통해 직관적인 관념을 형성시키기 위한 것이다.

수중나라

'수중나라'(가공의 섬) 프로젝트는 1학년 아동들을 위한 활동으로 6주 정도의 시간이 걸린다. 이 기간동안 아동들은 많은 활동들을 수행한다. 그것들 중의 하나는 '공간 탐색'이라는 용어로 대변될 수 있다. 그러나 이는 2차원 또는 3차원 형태들을 인식하고 적절한 용어를 사용하는 것 이상을 의미한다. 다양한 상황에서 아동들은 실제로 자신을 수중나라의 세계로 이동시키는 경험을 가지게 된다. 여러 가지 경험을 한 후에 상세한 위치들을 찾아내고, 여러 길을 추적해보고, 거리를 비교해보고, 건물의 구조들을 분석해 보고, 도시 계획과 주차장에 관련된 문제들을 해결해보면서 많은 경험들이 이루어진다. <그림 2>



<그림 2>

1. 도입

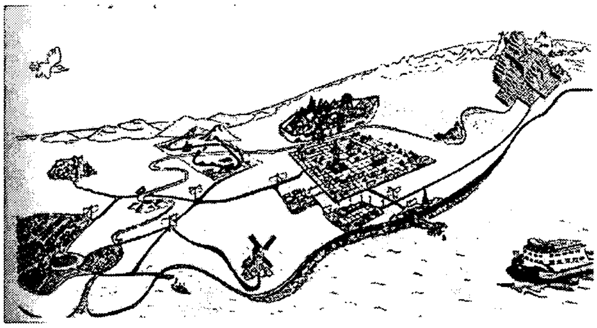
수중나라가 그려진 포스터가 교실에 걸려있고, 교사와 학생들은 섬을 탐험할 준비가 되어 있다. <그림 3>

· 여러분은 무엇을 보았죠?

· 여러분은 그것이 어디에 있는 것을 보았죠?

자발적인 반응들이 공간 탐험의 여러 측면과 개념으로 진행하기 위한 충분한 출발점을 제시한다.

아동들에게는 수중나라를 나타내는 jig-saw퍼즐이 제시된다. 아동들은 그것을 다시 맞춘다. 지금은 조각들을 맞추어야 하는 반대 상황이 된다.



<그림 3>

· 이 새가 어디에 있을까?

· 이 길은 어떻게 구부러졌을까?

· 그것은 어떤 탑이지?

그리고 나서 아동들은 자신의 수중나라 지도에 색을 칠한다. 블록으로 이루어진 산은 노란색으로, 나무는 녹색으로, 물은 파란색으로 칠한다.

2. 길 표지와 거리

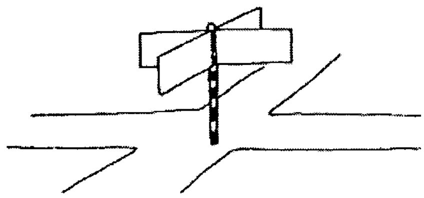
이 십자로에 길 표지판을 하나 놓아보세요.

· 그 표지판은 팔이 몇 개나 있어야 할까?

· 그 팔에는 어떤 그림들이 부착되어야 할까?

<그림 4>

방향들을 그림으로 표시하는 표지판 하나가 제시된다.



<그림 4>

· 표지판을 그것에 해당되는 십자로에 세워보세요.

이러한 과제는 훌륭한 상상력을 필요로 한다.

· 이 길이 4 ㎞라면, 저 길은 거리가 얼마일까?

· 여러분은 1km 길이의 길을 찾을 수 있나요?

이것은 모두 거리의 비에 관한 것들이다. 'km'는 여기서는 하나의 용어라고 볼 수 있다. 또한 4 km의 모래 길은 4 km의 포장된 길과는 다르다는 것이 중요한 것이다.

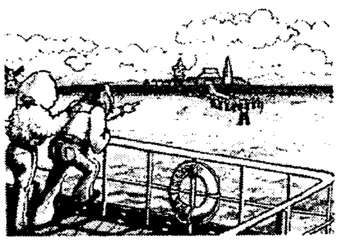
3. 사진들

교사는 그녀가 방학 동안 찍은 사진들의 일부를 가져와서 그것들에 관해 이야기한다. 자신의 사진을 가져온 아이들도 있다. Charley는 자신의 앨범 속에 사진이 있다. 수중나라에서 자전거 여행을 하는 소년들이 찍은 사진들은 담은 앨범도 있다. <그림 5>

· 이 사진을 어디서 찍었을까요?

· 여러분은 수중 나라에서 그 지점을 정확히 지적할 수 있어요?

· 왜 거기라고 생각하지요?



<그림 5>

이러한 사진들을 찍었을 때, 사진사는 여러 지점에 서 있을 수 있다. 더 가까이, 더 멀리, 높이, 낮게, 좀더 왼쪽으로 등.

4. 건물

OHP를 사용해서 블록 산이 벽에 투사된다. <그림 6>

"우리는 산에 올라가려고 해요"라고 교사는 말한다.

우리는 어떻게 올라갈 수 있을까요? 이것은 그림이죠, 그렇지 않아요?

교사의 손가락이 산을 오르고 있다.

"조심하세요, 한 번에 한 블록씩만."

리타야, 너는 어떻게 올라갈래?

다르게 올라가는 방법을 아는 사람?

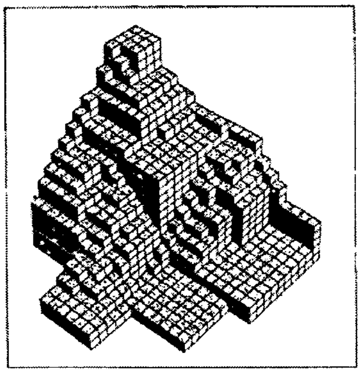
막다른 길이 보이는 사람?

여러분은 산 저쪽 편에서 올라올 수 있을까요?

여러분은 이 산을 실제로 만들어 볼 수 있을까요?

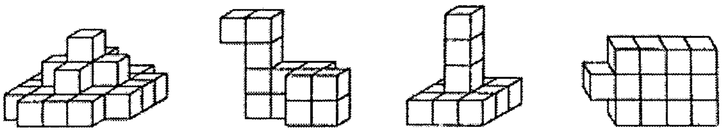
"아뇨, 너무 블록들이 많아요." Anne는 말한다.

"우리는 뒤편에 블록들이 얼마나 있는지 모르잖아요."



<그림 6>

아이들은 건물 그림들이 그려진 종이들을 받는다. <그림 7>



<그림 7>

· 여러분은 어떤 것들을 만들 수 있을까요?

5. 여러 가지 경로

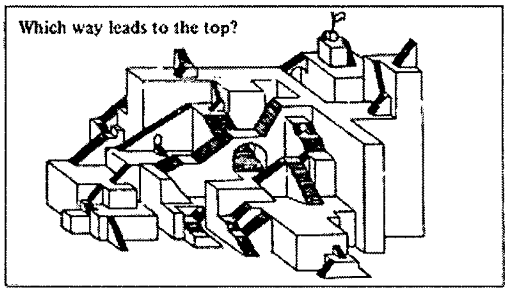
블록 산뿐만 아니라 거기에는 여러 가지 길도 있다. 정사각형 격자들인 그 도시의 지도 위에서의 여행이 시작된다. <그림 8>

아동들은 다섯 개의 편지를 다섯 집에 배달해야 하는 우체부의 모든 가능한 길들을 기술한다. 그들은 Dick의 집에서 정육점과 빵집으로 가는 가장 짧은 길을 구해야 한다. 아이들은 여러 미로와 성들을 거쳐서 수중나라를 여행한다. Peter가 미로에서 길을 잃어버렸다. 그러나 그는 나가는 길을 알고 있는 John에게 가는 방법을 알고 있다.

· 어떤 길로 가야 꼭대기에 이를 수 있을까?

· 거기에는 더 많은 길들이 있을까?

· 일단 여러분이 꼭대기에 있다면 어떻게 내려올 수 있을까요?



< 그림 8 >

6. 탐색

수중나라를 탐험하고 방문한 후에, 우리는 이제 그것에 관해 이야기하려고 한다.

교사는 그 섬에는 버스들이 있고, 그 버스 정류장에 기다리고 있는 사람들이 5명 있다고 말한다.

버스가 떠났을 때, 그 버스에는 8명이 타고 있다.

· 어떤 일들이 일어났을까?

· 그 사람들은 모두 시장에서 내린다. 버스는 어느 방향으로 갈 수 있을까?

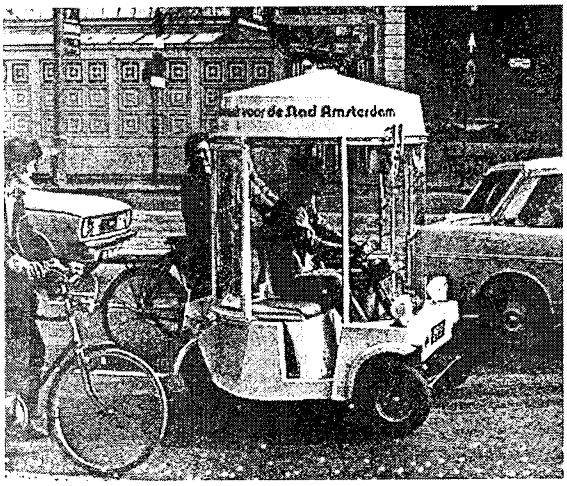
전차들은 세로길과 가로길을 따라 달린다. <그림 9>

7번째 정거장에서 배터리가 다 소모된다.

· 여러분은 얼마나 멀리 갈 수 있지요?

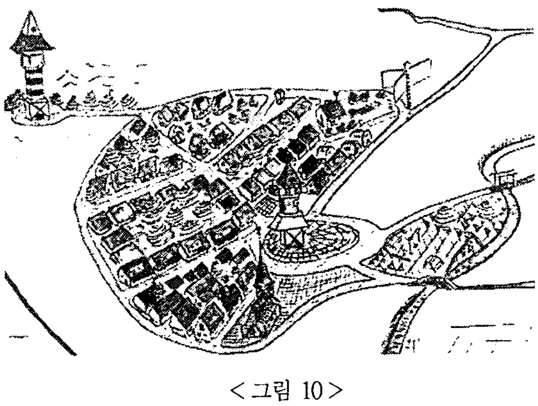
· 누가 더 멀리 갈 수 있을까?

· 여기가 충전 장소라면, 그 다음에 여러분은 얼마나 멀리까지 갈 수 있을까?



< 그림 9 >

성 니콜라스씨는 배로 도착했다. 지금 그는 말을 타고 도시사람들을 방문한다. 그는 물론 모든 가로길들을 방문해야 하며 각각 한번씩만 그렇게 하는 것을 좋을 것이다. <그림 10>



< 그림 10 >

· 누가 좋은 길을 생각해낼 수 있을까?

· 경찰관들이 교통을 통제하고 서로에게 성 니콜라스씨가 오는 것을 신호할 수 있도록 가능하면 많은 거리들을 볼 수 있도록 하려면 그들을 어디에 배치하는 것이 좋을까?

"저기에 그가 온다." 교사는 소리치고, "그는 등대 방향으로 움직이고 있다."라고 말한다.

· 교사는 어느 길을 말한다고 할 수 있을까요?

사람, 동물, 여러 가지 사물들에 대한 이야기들이 제시되며, 아이들은 그들이 수중나라의 어디에 있는지를 추측해야 한다.

녹음기에서 세 '목소리', 즉 화자, 방앗간 주인과 그 방앗간 주인의 말을 찾고 있는 경찰관의 소리가 들린다. 그들은 그들이 어디에 있는지, 어떻게 거기에 왔는지, 어디에서 그 말을 보았는지 이야기한다.

· 누가 그 말을 찾을 수 있을까?

아동들은 항상 수중나라에 머물 수는 없다. 수중나라 활동은 교실에서 계속된다.

교실에 별들이 진열되어 있다. <그림 11>

교사는 다음과 같이 말한다.

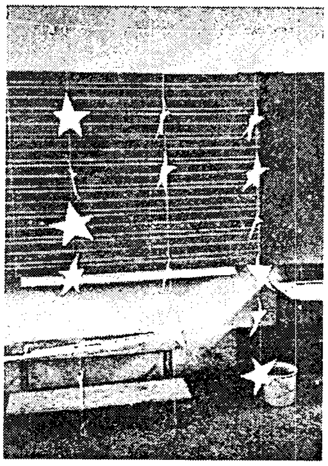
"나는 그 별들 중의 하나를 생각하고 있어요, 어느 것인지 추측해보세요."

"저거요." Peter는 말하고 그것을 가리킨다.

"어느 것, 교사는 이것 … 아니면 저것?" 그녀는 모르는 체 한다. 그녀는 그가 어떤 것을 말하는지 알지 못한다.

"아뇨, 그는 첫 번째 줄의 하나를 말하는 거예요."라고 Mary가 말한다.

Mary는 위치를 기술하는 방법을 이해하고 있다. 곧바로 그들 모두는 그것을 어떻게 하는지 안다. Peter도, "세 번째 줄의 위에서 두 번째요."라고 그는 말한다.



<그림 11>

7. 결론

수중나라에 관한 기하 수업에서 여러 가지 그림과 사진들이 중요한 역할을 한다. 사실상, 방학동안의 사진은 단지 사진 이상이고, 그 이면에는 전체 세계가 들어 있다. 갑자기 여러분은 뜨거운 태양과 천둥소리 등이 기억날 것이다. 이것이 바로 우리가 "현실화"라고 하는 말의 의미이다. 그림, 사진, 또는 하나의 단어도 그 이면에 있는 전체 세계를 의미할 수 있다. 그러한 세계에서 여러분은 여러 가지 상황들을 상상할 수 있고 여러분이 전에 결코 해보지 않은 일들을 할 수 있다. "첫 날에는 해변가에서 그렇게 많은 시간을 보내서는 안된다…." 현실화가 수중나라에서는 핵심적이다.

· 여러분은 그 건물을 만들 수 있을까요?

· 그것이 무너질까요?

· 길 표지판을 여기에 세운다면 그것이 옳은 방향을 가르칠까요?

· 그 전차가 거기에 갈 수 있을까?

수학을 인간의 활동으로 개념화하는데 현실화가 가장 중요한 역할을 한다. 이러한 현실화의 개념이 다른 나라의 수학교육과 네덜란드 수학교육을 구별하는 가장 큰 특징이다.

걸리버 여행기

걸리버 여행기는 비와 측정과 관련된 내용으로 소인국에 있는 걸리버를 소재로 아동들이 알고 있는 경험을 근거로 현재에 있는 도시와 소인국에 관한 정보에서 여러 건물의 크기나 도로의 폭을 생각해 보는 경험과 걸리버가 입는 옷이나 음식을 소인국 사람들이 입는 옷이나 음식과 비교하면서 길이의 비와 넓이의 비와의 관련성에 대한 직관적인 생각을 발전시킨다.

1. 도입

처음 수업 시간에 교사는 Jonathan Swift의 '걸리버 여행기'의 일부를 읽는다.

· 이 이야기가 정말 일어날 수 있을까?

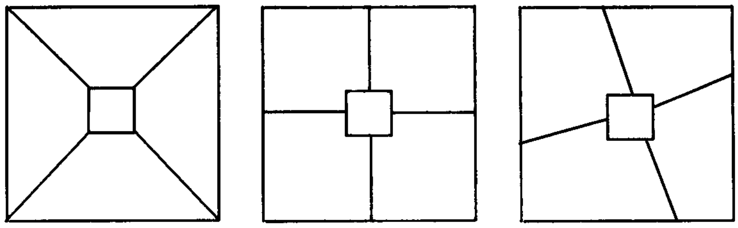
2. 평면도

그 다음 활동은 이야기를 잘 읽고 Lilliput의 수도인 Mildendo의 평면도를 그리는 것이다.


Gulliver

"이 도시는 정사각형 모양이고 성벽의 각 변의 길이는 500 feet이다. 큰 도로가 두 개 있는데, 이 도로들은 서로 교차하며 이 도시를 네 구역으로 분할하며, 도로 폭은 5 feet이다. 내가 들어갈 수는 없지만 내가 지나가면서 보기만 했던 골목길의 폭은 12에서 18인치이다. 이 도시에는 50 만 명의 인구가 거주하고 있다. 이곳에는 3층에서 5층까지의 집들이 있다. 가게와 시장들도 많이 있다. 황제의 궁전은 이 도시의 중심에 있는데, 여기서 두 개의 큰 도로가 만난다. 이 궁전은 건물에서 20 feet 떨어진 길이가 2 feet인 벽으로 둘러싸여 있다. 나는 황제 폐하의 허락을 받아서 이 벽을 넘어갔다. 벽과 궁전 사이의 공간이 무척 넓어서, 나는 쉽게 모든 면을 볼 수 있었다. 정원은 길이 40 feet의 광장이고 두 개의 또 다른 정원이 있다. 가장 안쪽으로는 왕의 거처가 있고, 나는 이것을 매우 보고 싶었지만 그 일이 매우 어렵다는 것을 알게되었다. 왜냐하면 한 성곽에서 다른 성곽으로 통하는 대문들이 단지 그 높이가 18인치이고 폭이 7인치였기 때문이다."

아동들이 그린 평면도는 다음과 같은 것들 외에도 여러 가지가 있을 수 있다.



3. 인구 밀도

Mildendo는 우리가 살고 있는 세계의 한 도시와 비교될 수 있다. 이 이야기는 우리에게 축도가 12임을 알려준다.

- 주도로가 상대적으로 넓은가?
- 작은 도로들이 너무 좁지는 않은가?
- 벽은 어떤가?
- 이것은 중국의 만리장성에 비유할 수 있는가?
- 우리의 주도로와 작은 도로의 폭은 얼마나 될까?
- Mildendo의 인구밀도는 조밀한가?

아동들은 이러한 질문에 대한 답을 구하기 위해, 현재의 도시 중에서 비교하기 적절하다고 생각되는 곳을 선택하고, 그 도시에 대한 정보를 비교하면서 여러 가지 사고활동을 하게 된다.

4. 걸리버의 옷

아동들은 걸리버와 소인국 사람들을 비교하면서, 축도가 12일 때 넓이의 변화를 비형식적으로 살펴보는 활동을 하게 된다.

- 우리가 Lilliput의 사람들이라면 Gulliver는 얼마나 클까?
- 그의 신발, 옷, 손수건은 얼마나 클까?
- Gulliver의 손수건을 하나 만들려면, Lilliput 사람들의 손수건이 몇 장이나 필요 한가?
- Gulliver의 옷 한 벌로 Lilliput 사람들의 옷을 몇 벌이나 만들 수 있을까?

5. 음식문제

아동들은 넓이에 대한 문제를 살펴 본 후에 부피와 관련이 있을 듯한 다음과 같은 문제들을 다룬다.

- Gulliver는 Lilliput 사람들 몇 명분의 식사를 소비하겠는가?

· Gulliver의 몸무게는 몇 명의 Lilliput 사람들의 몸무게와 같은가?

아동들은 처음에는 세제곱과 관련된 생각을 하기 쉬운데, 교사는 이 때 사람이 필요로 하는 식사의 양은 부피가 아닌 겉넓이와 관련된다는 사실을 일러줄 필요가 있다.

이와 같이 아동들은 걸리버여행기를 통해서 여러 형태의 비 문제를 다룸과 동시에 여러 가지 수학적 내용을 통합적으로 다루어 볼 수 있는 프로젝트이다.

V. 나오며

지금까지 1970년대부터 이루어진 네덜란드 수학교육과정의 개혁에 관해 살펴보았다. 이 교육과정의 가장 핵심이 되는 것은 아동의 현실 속에서 수학이 출발하고 머물러야 한다는 것이다. 이를 통해 아동은 수학의 유용성을 깨닫게 될 것이며, 아동의 마음 속에 수학이 정말 중요한 것으로 자리잡기를 기대하는 것일 것이다. 이러한 목표를 향한 노력은 하루 아침에 이루어진 것이 아니며 한 번 만들어진 대로 그대로 있었던 것도 아니다. 또한 이러한 교육과정 개혁이 처음에 기대한 것만큼 처음부터 큰 성과를 거둔 것도 아니다. 그러나, Freudenthal이 제안한 안내된 재발명에 의한 점진적인 수학화하는 대전제를 성취하기 위해 계속적인 관찰과 면담과 분석을 통해 수정 보완한 결과, 오늘날의 큰 성과를 거둔 것으로 생각할 수 있다.

현재 개발되고 있는 제 7 차 교육과정을 위한 교과서의 중요한 부분이 아동의 활동과 실생활 상황일 것이다. 그러나, 우리가 아동의 수학을 실생활 상황에만 묶어 둘 때, 우리가 찾을 수 있는 소재는 아주 제한적일 것이라는 생각이 든다. 실제로 본 연구에서 실례로 든 수중나라나 걸리버 여행기와 비교해 볼 때, 우리의 교과서에서 찾아볼 수 있는 상황은 다소 단편적인 것으로 여겨진다. 그렇다고 우리나라에 네덜란드의 교육과정을 그대로 도입할 수는 없는 일이다. 우리의 교육과정이 성공하려면, 우리나라 아동들에게 적합한 흥미롭고 많은 생각을 요하는 상황들이 절실히 필요하다고 할 수 있다. 또한 그러한 것은 단순히 교과서를 미리 만들어서 제시해 주는 방법보다는 만드는 과정에 충분히 아동의 반응과 생각을 고려하는 방법이 많은 노력을 필요로 하기는 하지만 효과적일 것이라는 것이다. 즉, 교육과정의 개발은 하향식보다는 상향식으로 개발될 때, 좀더 아동에게 접근할 수 있을 것이라는 것이다. 이런 점에서 네덜란드의 수학교육이 지향하는 현실적 수학교육이 우리에게 많은 시사점을 줄 수 있으리라고 생각한다.

참 고 문 헌

Cobb, P.(1987). Information-processing psychology and mathematics education - A constructivist perspective. *The Journal of Mathematics Behavior,* 6(1), 4-40.

De Lange, J.(1987). *Mathematics, insight and meaning. teaching, learning and testing of mathematics for the life and social Sciences.* Utrecht: OW&OC.

______(1993). Between end and beginning. Mathematics education for 12-16 years olds: 1987-2002. *Educational Studies in Mathematics*, 25(1/2), 137-160.

De Lange, J., & Kindt, M.(1984). *The Hewet project: Report on an experiment leading to a new curriculum for pre-university students.* Zeitschrift für Didaktik der Mathematik, 2, 74-78.

Freudenthal, H.(1968). Why to teach mathematics so as to be beautiful? *Educational Studies in Mathematics,* 1, 3-8.

______(1973) Mathematics as an educational task. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

______(Eds.)(1976). Five years IOWO - On H. Freudenthal's retirement from the directorship of IOWO. *Educational Studies in Mathematics*, 7(3).

______(1991) Revisiting mathematics education. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L.(1988). Reconstructive learning. *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* 1(12), 75-91.

______(1990). Realistic mathematics education: What does it mean?. In K. Gravemeijer (Ed.), *Contexts free productions tests and geometry in realistic mathematics education*(pp.1-9). Culemborg: Techinipress.

Treffers, A.(1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland. (Ed.), *Realistic mathematics education in* *primary school: On the occasion of opening of the Freudenthal Institute*(pp.11-20). Utrecht: CD-β Press.

Treffers, A. & Goffrey, F.(1985). Rational analysis of realistic mathematics education. *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 97-121.

Van den Brink, F. J.(1987). Children as arithmetic book authors. *For the Learning of Mathematics,* 7(2), 44-47.

______(1991). Realistic arithmetic education for young children. In R. Streefland(ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp.77-92). Utrecht : CD-β Press.

Van den Heuvel-Panhuizen, M.(1996). *Assessment realistic mathematics education.* Utrecht: CD-β Press.

______(1998). Realistic mathematics education. http://www.fi.uu.nl/en/rme/welcome. html, NORMA Lecture, 5-9.

Van Hiele, P.(1986) *Structure and insight.* Academic Publishers.

〈참고자료〉

Freudenthal의 생애

Freudenthal(1905-1990)은 수학자이며 수학교육학자이다. 그의 생애는 크게 두 시기로 구분될 수 있다. 첫 번째는 20년대 후반 사회군국주의가 동유럽의 과학공동체의 기초를 파괴시켰던 그 시기까지로 수학을 연구하는 시기였다. 두 번째는 Utrecht 대학에서의 수학 교수 활동 및 연구, 과학, 역사, 철학에 대한 연구뿐만 아니라 수학교육학에 대한 그의 안목을 발달시켜 나갔던 시기이다. 이러한 두 시기 사이에는 휴지기가 있었는데, 이는 두 시기를 구분짓는 중요한 시기라고 생각할 수 있다. 이 시기는 제 2 차 세계대전 때 독일이 점령하고 있는 동안 Amsterdam과 Utrecht에서 차별대우를 받고, 직업을 가질 수도 없고, 도망다니고, 감금되고 마침내는 숨어 살게된 유대인으로서 Freudenthal에게는 사회와 완전히 고립된 시기였다. 그는 몇 명의 친구와 특히 네덜란드인인 그의 부인 Susanne의 용기에 힘입어 유대인의 대학살을 견디어 낼 수 있었다. 이러한 경험이 그 이후에 절대적인 영향을 미치지

는 않았다 할지라도, 그가 전쟁 이후에 후세대의 사람들을 이성적인, 즉 더 유능하고 책임감 있게 학문을 할 수 있도록 이끄는 문제에 기울이게 된 것은 이러한 배경에서 생각해야 할 것이다.

그는 1905년 Berlin 근처 Lückenwalde에서 탄생하였다. 그는 수학에 있어서는 '천재소년' 이었다. 그는 어려서부터 수학에 뛰어난 학생으로서 12세 모든 학교수학을 마스터하고 15세 이후로는 Reye, Fiedler, Planck, Einstein 등의 저서를 연구하였다. 1923년에 대학에 입학하여 역사와 문학을 수학하고, 물리와 철학을 부전공, 수학을 전공하였다. 1923년 그가 그의 학업을 시작했을 때, Berlin은 학문 분야에서 두드러진 위치에 있었고 아주 포괄적인 교과들을 제공하였다. 그의 학문적 성장에 가장 영향을 미친 사람은 위상기하학자인 Heinz Hopf와 Lie Group과 직관주의자로 알려진 Karl Löwner였다. 1930년 '위상 공간과 군의 한계에 대하여 über die Enden topologisher Räume und Gruppen'로 박사학위를 받았다. 그의 수학에 관련된 연구분야 중 하나는 homology와 homotopy의 관계로서 1934년 homotopyclass위의 사상에 관한 세계적으로 인정된 풀이를 발견하였다. 전쟁이 끝난 후, 그는 확률론, 옥타브기하, 수학사와 관련된 주제들을 연구했으며, 특히 Lie Group 및 그와 관련된 기하인 대수적 위상수학의 특별한 분야를 연구하였다.

순수수학 외에도 Freudenthal은 수학의 기초에 관한 문제에도 몰두하였다. 20세기의 수리철학의 논제는 형식주의자인 Hilbert와 직관주의자인 Brouwer의 관점 사이의 논쟁이었다. Göttingen은 형식주의를 지지하였고, Berlin은 직관주의를 지지하였다. 이 때 직관주의자의 주요 대표자 중의 한 사람이 Karl Löwner였고, 그는 Freudenthal의 스승으로서 그에게 많은 영향을 미쳤다. Freudenthal은 1927년 Brouwer가 Berlin으로 초빙강연을 왔을 때, 더 많은 영향을 받게되었다. 직관주의에 대한 Freudenthal의 격렬한 관심으로 인해, Brouwer는 그를 네덜란드로 초청하였다. 따라서, 그는 박사학위논문을 마친 후 1930년 Amsterdam으로 갔다. 1931년 그는 Brouwer 밑에서 "수학에서의 양과 질"이라는 내용으로 교수 자격 논문을 썼다. 직관주의자의 영향은 Freudenthal의 수리철학적 사고에 남아 있고, 그의 마지막 책인 'Revisiting Mathematics Education'에 명백히 드러나 있다.

Freudenthal의 교수학적 관점은 많은 준비 끝에 이루어졌다. 우선 그는 대학의 교수학과 관련된 교육학적 논의를 시작하였고, 점차 학교수학으로 관심을 갖기 시작하였다. 그는 일찍이 수학수업개혁을 위해서는 교사양성이 중요함을 깨닫고 그것에 대한 많은 의견들을 출판하였다.

Freudenthal은 자신의 학습을 반성하고 그것으로부터 도식화, 국소적 조직화, 전체적 조직화, 형식화, 공리화 등의 개념을 발전시켰으며, 점진적인 수학화를 수학 학습의 본질적인

범주로 생각하였다. 그의 교육학적 지평의 기초는 집안에서 아이들을 양육하는 과정에 있었다. 이러한 기초가 수학교육학적 개념화로 발달된 것은 Dina van Hiele-Geldof와 Pierre van Hiele 등을 비롯한 몇몇 사람들을 만난 이후이다. van Hiele, P.는 Freidenthal에게서 학위과정을 밟아 1957년 그에게서 박사학위를 받았다. 이것이 Freudenthal이 배출한 첫 번째 수학교육학 학위 논문이었다.

수학수업에 대한 실제적인 개혁노력으로서 Freudnethal은 1950년대 말부터 수학교육과 관련된 비판 및 그의 관점을 출판하였다. 1959년 Royamont에서 수학 수업의 근대화를 위한 유명한 OECD회의가 개최되었을 때, 부르바키즘이 수학수업 개혁의 기초로서 받아들여졌고, 그 결과 학습심리학자들과 교수학자들은 부르바키의 기본 구조와 심리학의 발달단계의 관련성에 대한 Piaget의 유추에 영향을 받았다. Freudenthal은 이 회의에 불참한 관계로 이러한 논의에 이의를 제기하지 못한 것을 대단히 유감으로 생각하였다.

그 이후로 수학교육과 관련된 더 많은 논문들을 발표하였고, 학습에 대한 그의 개념화를 더 명확히 하였다. 점진적인 수학화라는 그의 학습 개념은 무엇보다도 풍부하고 현실적인 문맥을 가진 학습 내용을 준비하고, 원칙적으로 수학의 응용에 기초한 수업을 중시한다. 더욱이 그는 사회적 맥락에서 상호작용의 학습, 즉 이질적인 그룹내에서 서로 다른 수준의 학생들이 반성적인 의사소통을 함으로써 그 수준을 높일 수 있음을 강조한다.

이러한 그의 관점은 1971년 Utrecht에서 IOWO의 기초를 세우는 데 작용하였다. IOWO는 수학교육과정의 현대화를 위한 네덜란드 정부의 위원회의 분과로 설립되었고, Freudemthal이 이 연구소의 총책임자였다. 이 연구소의 과제는 교육과정 단원을 만들어 내는 데 있었다. 그리고 나서, 개혁의 퇴조와 더불어 어려움을 겪다가, OW&OC라는 이름으로 Utrecht 대학의 연구그룹으로 축소되었다. 그러나, 그의 수학교육에 대한 엄밀한 주장은 이 연구 그룹이 1980년대 이후로 계속 발전할 수 있는 기틀을 마련하였다. 이러한 과정에서 이 연구 그룹의 중요성에 의해 다시 연구소로 승급되었고, 이제는 세계적으로 수학수업에 대한 연구, 개발, 고문을 위한 가장 인정받는 조직 중의 하나가 되었다. Freudenthal은 1990년 10월 13일에 세상을 떠났다. 이에 OW&OC는 그에 대한 경의의 표시로 "Freudenthal Institute"로 개칭하였다. 현재 이 연구소는 브라질로부터 미국의 수학교육에 이르기까지 많은 영향을 미치고 있다.

또한 Freudenthal은 수학수업과 수학교육학에 대한 연구를 자극하기 위해서 1968년 국제적인 학술지인 Educational Studies in Mathematics를 창간하였고, 1977년까지 편집자로 지냈다.

그는 1973년부터 1990년까지 광범위한 작품들을 출판하였다. 그 중 중요한 몇 가지를 살

펴보면 다음과 같다. 그의 수학교육학의 첫 번째 주요 작품은 1973년에 출판된 <Mathematics as an Educational Task>이다. 이 책은 '고등관점에서 본 학교수학'에 대한 그의 생각을 표현한 책이라 볼 수 있다. 그 주요 관점은 수학은 완성품이 아니라 교수 학습 과정에서 발생된다는 것이다. 그는 학교수학의 영역들의 기초가 되는 아이디어를 분석하고 수학화 활동과 관련지어 생각하고, 역사적 고찰을 통해서 중심적인 아이디어를 명백히 하고, 개인의 학습과정과 새로운 수업 아이디어를 제시하였다. 1978년 <Weeding and Sewing>에서, 그는 이전까지의 수업론, 교육학, 심리학이나 교육과정 개발 등에 대한 날카로운 비판을 하면서, 수학교육학이 하나의 과학이 되기 위한 조건들을 제시하였다. 1983년 출판된 <Didactical Phenomenology of Mathematical Structure>는 가장 풍부한 수업 아이디어를 제공한 책으로서, 15개의 수학의 주제영역을 다루면서 IOWO에서 현상에 대한 수학화를 고려했던 근거를 제시하고자 하였다. 이 대 교수학적 현상학이란 그 현상과 수학적으로 조직화한 대응물 사이의 관계가 교수학적 측면에서 어떻게 다루어지는 가를 탐구하는 것이다. 그의 마지막 작품인 <Revisiting Mathematics Education>은 "중국강연"이라는 소제목을 달고 있다. 이는 1987년 중국에서의 강연여행을 하는 동안 IOWO나 OW&OC의 활동에 대한 전제없이는 중국인들이 그 의도를 잘 이해할 수 없을 것이라는 생각에서 출판되었다. 그는 이 책에서 자신의 지금까지의 글들을 더 명백하고 설득적인 형태로 함축성 있게 요약하였다.

이러한 그의 생각을 일관성있게 실천하는 것이 Freudenthal 연구소가 담당해야 할 일일 것이다.