대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.1, 259~281, March 2000

교구

대수타일을 이용한 수학학습

김 남 희 (난곡중학교)

I. 머리말

본 고에서는 학교수학의 학습에 활용될 수 있는 수학교구로 많은 교사들에게 알려져 있는 대수타일(Algebra tiles)을 논의의 대상으로 하여 이를 활용한 수학학습에 관해 다루어보고자 한다.

대수 타일은 '학교수학'을 통해 이미 소개된 바 있는 딘즈블럭 즉, 다진수 블럭(Multibase Arithmetic Block; MAB)의 아이디어를 변형한 것으로 두 개의 변수를 나타내는 타일을 이용하여 다항식의 전개나 인수분해의 지도에 주로 사용되고 있는 교구이다(김남희, 1999). 변수의 개념을 직접적인 조작활동을 통해 다룰 수 있게 하는 대수타일은 비교적 최근에 소개된 교구이지만 이미 많은 수학교사들에게 '대수막대'라는 이름으로 널리 알려져 있으며 특히, 우리 나라 제 6차 수학교육과정에 따른 수학 교과서에서는 다항식의 전개와 인수분해 과정을 지도하는 방법의 예로 대수타일을 이용한 조작활동을 제시하고 있기도 하다(김연식, 김흥기, 1996, p.62). 교육과정에 따른 교과서의 내용에 대수타일의 활용이 제시되어 있는가의 여부와 상관없이 실제로 대수타일을 자체 제작하거나 종이로 만들어 학교 수학수업에 활용하고 있는 교사들도 많이 있다. 본 고는 수학교사들로 하여금 대수 타일을 어떻게 활용하여야 할 것인가에 대한 안목을 갖게 하는데 목적을 둔다. 이러한 입장아래 수학수업에 대수타일을 보다 효과적으로 활용할 수 있도록 하는 지도 방법의 예를 제시해 보고자 한다.

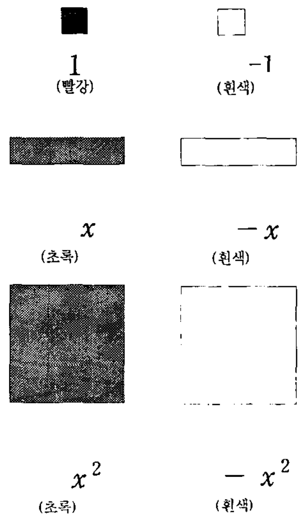
II. 대수타일

1. 대수타일의 구성

대수학습에 이용되는 구체적 조작물인 대수타일은 다항식의 연산 및 다항식의 곱셈과 인수분해 도입에 유용한 지도방법을 제공하는 것으로 알려져 있다. 대수타일의 기본 셋트는 다음의 세 가지 유형의 타일들로 구성된다.

1과 -1을 나타내는 정사각형 모양의 타일 (1×1 크기)
x와 $-x$를 나타내는 직사각형 모양의 타일 ($1\times x$ 크기)
x^2과 $-x^2$를 나타내는 정사각형 모양의 타일($x\times x$ 크기)

대수타일에서 양수와 음수의 구분은 타일의 색에 기초한다. 양수를 나타내는 타일 1, x, x^2과 음수를 나타내는 타일 -1, $-x$, $-x^2$은 서로 다른 색을 가진다. 상품화되어 있는 대수타일의 색을 살펴보면 제작회사마다 서로 다른 색을 취하고 있지만 기본적으로 1을 나타내기 위한 색, x, x^2을 나타내기 위한 색, -1, $-x$, $-x^2$을 나타내기 위한 색으로 3 가지 색을 사용하고 있다[1].



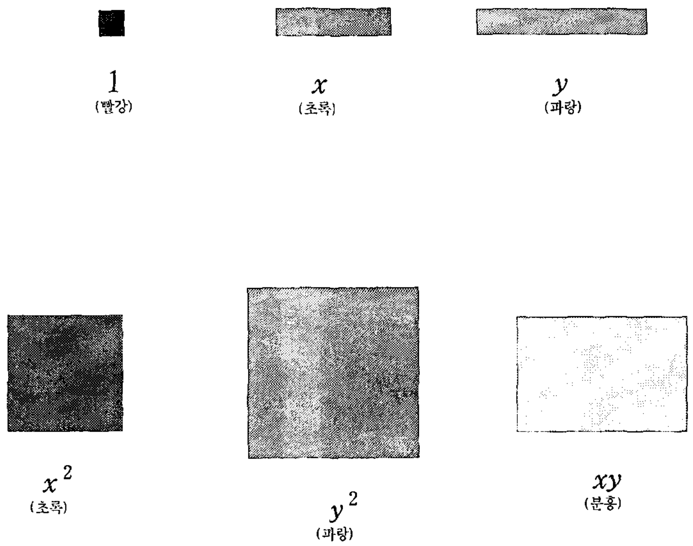
<그림 1> 대수타일 기본 세트

예를 들어, <그림 1>과 같이 1은 빨간색으로 하고, x와 x^2은 초록색으로 하며 음수인

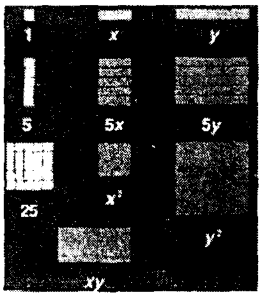
1) <그림 1>에 제시된 타일의 색은 미국에서 상품화되어 사용되고 있는 대수타일의 예이다.

-1, $-x$, $-x^2$은 모두 흰색을 사용할 수 있다.

위의 기본세트로는 하나의 변수만을 다룰 수 있다. 기본세트에 들어있는 타일의 모양과 색을 나타내고 있는 <그림 1>은 변수명으로 문자 x를 사용하고 있지만 그것이 실제 지도 과정에서 반드시 문자 x를 사용해야 함을 의미하고 있는 것은 아니다[2].



<그림 2> 두 개의 변수를 다루기 위한 대수타일의 크기 비교



<그림 3> 대수타일의 예

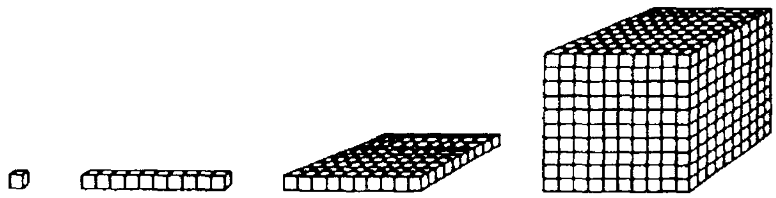
두 개의 변수를 다루는 대수식을 학습하기 위해서는 또 다른 변수를 나타내기 위해 다른 색과 다른 크기로 된 타일을 첨가하여야 한다. 두 개의 변수 예를 들어, x 와 y를 모두 다루려면 y, y^2, xy를 나타내는 타일을 첨가하여야 한다. 물론 색을 달리한 같은 크기의 음수 타일도 필요하다. <그림 2>는 두 개의 변수를 다룰 수 있게 하는 대수타일의 구성요소들의 모양, 색 그리고 타일의 상대적인 크기 비교를 잘 보여주고 있다. <그림 3>은 상품화되어 있는 대수타일의 구성요소를 나타내고

2) 문자 x 대신에 y, t, k, a등을 사용해도 무방한 것이다.

있다(김효정, 1995, p.20). <그림 3>에 5, $5x$, $5y$, 25를 나타내는 타일은 편의상 큰 수를 나타내기 위한 것으로서 상품에 포함되어 있기도 하고 그렇지 않기도 하다. 대수타일은 1, x, y의 길이의 비가 정수비가 되지 않도록 만들어져야 한다. 그 이유는 다항식의 인수분해에서 같은 문제에 대해 서로 다른 답안이 나오는 것을 방지하게 위함이다. 이에 대해서는 다른 구체적 조작물과의 관련성에 대한 아래의 설명에서 자세히 다룬다.

2. 다른 구체적 조작물과의 관련성

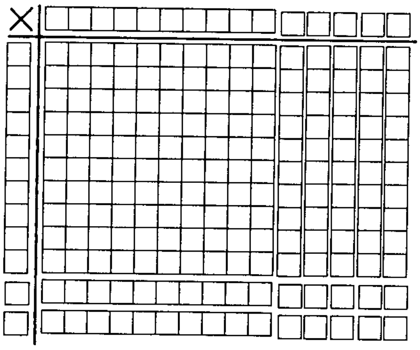
대수의 아이디어를 설명하기 위해서 조작물을 처음 사용한 사람은 십진블럭(base-10 blocks)을 사용했던 수학교육자 딘즈(Zoltan Dienes)이다.



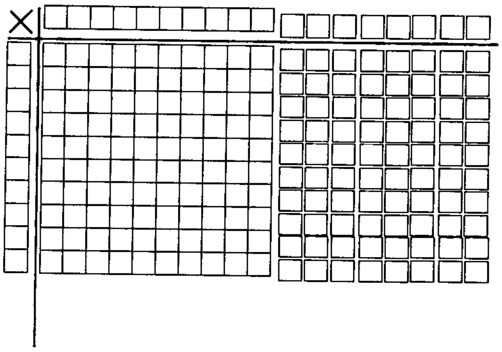
<그림 4> 십진블럭(base-10 blocks)의 구성 요소에 대한 이름(Moser,1992, p.127)

십진블럭은 자리값 개념이나 자연수, 소수의 사칙연산 지도에 효과적으로 사용될 뿐 만 아니라 각 블록들을 1, x, x^2등의 변수를 나타내는 것으로 취급하면 다항식의 지도에도 활용할 수 있다(김남희, 1999, pp.307-308). 가령, 단위블럭을 1로 하고 10으로 사용되는 막대블럭을 x로 하고 100으로 사용되는 판블럭을 x^2로 사용한다면, 간단한 다항식의 분배법칙을 설명할 수 있다. 예를 들면, $(x+2)(x+5)=x^2+7x+10$은 <그림 5>에 제시된 12 × 15 직사각형의 가로, 세로, 넓이 사이의 관계를 나타낸다. 딘즈가 직사각형의 구성을 통해 다항식의 곱셈을 파악하는 위와 같은 아이디어를 설명한 이후로 그것은 대수를 다루는 구체적 조작물 활용의 기본적인 아이디어로 자리잡게 되었다. 그러나 십진블럭으로 대수를 할 때 가장 큰 문제점은 음수를 표현할 수 없다는 것과 다항식을 인수분해 할 때에는 그 적용으로 인해 문제점이 발생한다는 것이다. 예를 들어, 십진블럭에서 10의 크기를 갖는 막

대블럭을 변수 x로 취급하면 $x=10$의 규칙이 적용되어 <그림 5>와 같이 $100+7\cdot 10+10$로 표현되는 직사각형 $x^2+7x+10$은 <그림 6>에 제시된 $x(x+8)$의 직사각형으로도 표현 가능해지는 것이다.



<그림 5> 십진블럭을 이용한
$(x+2)(x+5) = x^2+7x+10$



<그림 6> $x=10$ 일 때
$x^2+7x+10 = x^2+8x = x(x+8)$

이것은 하나의 다항식에 대해 두 개 인수분해가 가능해지는 잘못된 결과이다. <그림 5>의 12×15 직사각형은 다항식 $x^2+7x+10$을 올바르게 인수분해 한 $(x+2)(x+5)$을 나타내지만 <그림 6>의 10×18 직사각형은 $x(x+8)$을 나타내어 $x^2+7x+10$의 올바른 인수분해라고 볼 수 없는 것이다. 이와 같은 잘못된 인수분해는 x의 길이가 단위 길이인 1의 정수배가 되도록 선택되었기 때문에 발생된 것이다.

대수타일의 제작 배경은 십진블럭의 활용 범위를 넓히려는 시도에서 출발한 대수 모델화에서 부딪히는 문제점과 제한점들을 개선하기 위한 노력의 흔적에서 쉽게 찾아볼 수 있다.

Mary Laycock는 딘즈의 모델을 확장하여 x가 3, 5, 6 또는 10 이라 할지라도 각 진법 체계에서 똑같은 전개가 가능하도록 다진수 블럭(multi-base blocks)[3]을 사용하기 시작했고 $(x-1)(x+1)$와 같이 마이너스가 포함된 곱을 기하학적으로 나타내기 위해서 마이너스 $(-)$의 표현을 도입하였다[4]

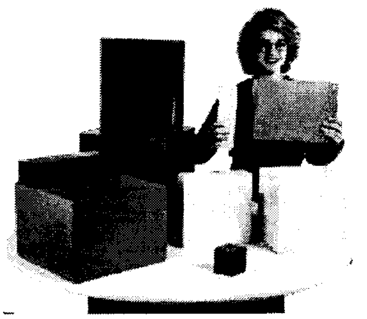
3) multi-base blocks은 multi-base Arithmetic Block을 간단히 칭하는 것으로 이를 '다진수블럭'으로 번역한 것은 강완, 백석윤 ※ 「초등수학교육론」에서의 용어사용에 따른 것이다(강완, 백석윤, 1998, p168).

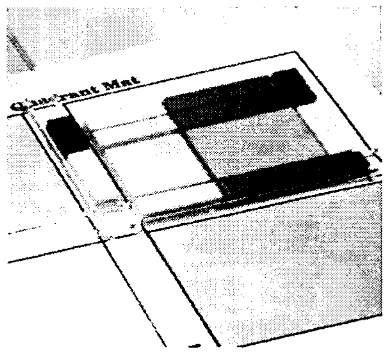
4) 이 단계에서 어떤 방법으로 마이너스를 나타내었는지는 구체적으로 언급되어 있지 않다.

Peter Rasmussen은 3차원을 구현할 수 있는 십진블럭(base-10 blocks)을 2차원적으로만 다룬 MathTiles을 사용하였고 보다 큰 수를 용이하게 다루기 위해서 편의상 5, 25와 50 등을 나타내는 타일을 첨가하였다(<그림 3> 참조). 그가 행한 가장 중요한 일은 변수에 대해 십진블럭을 사용하면서 접하게 되는 잘못된 인수분해의 문제를 해결하기 위해서 같은 단위로 잴 수 없는(non-commensurable) 길이의 x를 사용하기 시작했다는 것이다. 그리고 <그림 5>, <그림 6> 에 제시된 바와 같은 교차선이 그려져 있는 형태의 곱셈판(frame)을 창안하여 학생들이 가로, 세로의 모서리에 놓여진 타일들은 보고 곱셈판의 안쪽에 놓여진 2차원의 직사각형의 넓이에 대한 공식을 쉽게 생각해 낼 수 있도록 하였다. 또한 Mary Laycock의 마이너스 모델을 한층 개선하여 색깔에 기초하여 음수를 구분하는 방법을 도입하였다. 그가 사용한 방법은 1, x, x^2의 각 타일의 한 쪽 면에 모두 그 나름대로을 칠해 놓고 그 타일을 뒤집어 색이 없는 면이 나오면 그것을 음수로 생각한 것이다.

이러한 Peter Rasmussen의 모델 즉, 색에 의한 음수의 구분 및 같은 단위로 잴 수 없는 길이의 x (또는 y)를 사용한다는 원칙 아래 제작된 것이 바로 대수타일이다.

여기서 본 고의 논의의 대상인 '대수타일'의 개념을 우리가 흔히 '대수막대'라고 부르는 것과 구분하여 이해할 필요가 있다. 이는 'algebra-tiles'과 'algeblocks'으로 알려져 있는 교구의 구분을 의미한다. 본 고에서는 algebra-tiles을 '대수타일'로 algeblocks을 '대수막대'로 구분하여 칭하고 있다. 대수막대가 <그림 7>에 제시된 조작활동에서 짐작할 수 있듯이 음수의 처리나 그 적용 방법에 있어서 대수타일의 경우와 다르지 않은 것은 분명한 사실이다.


<그림 8> 3차원을 다룰 수 있는 대수막대 견본 (교실비치용)



<그림 7> 대수막대 사용의 예

---

http://www.picciotto.org/math-ed/manipulatives/alg-manip.html

그러나 대수막대는 <그림 8>의 견본[5]처럼 x^3, y^3, x^2y 등의 3차를 다룰 수 있는 블록이 있어 상수와 변수를 3차원에서 구현해 낼 수 있다. 이것이 바로 2차원에서만 다룰 수 있는 대수타일과 다른 점이다. 따라서 교사들은 우리 나라 수학교실에서 대수타일을 주로 '대수막대'라는 용어로 사용하고 있는 사실에 한 번 쯤은 주목해 볼 필요가 있다. 교구를 칭하는 용어가 실제로 학생들의 학습에 커다란 영향을 준다고는 생각하지 않지만 교구를 다루는 교사는 자신이 사용하고 있는 교구의 특성과 그 활용에 대한 충분한 이해 차원에서 본 고에서 구분하고 있는 '대수막대'와 '대수타일'중 어느 것을 의미하고 있는지를 분명히 하고 지도를 해야 할 것이다.

3. 대수타일의 사용

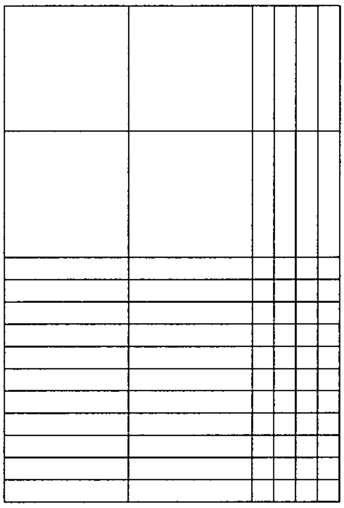
대수타일을 수학수업에 활용하기 위해서는 상품화되어 있는 세트를 사거나 아래의 <그림 9> ~ <그림 11>에 제시된 종이를 확대 복사하여 잘라서 이용할 수 있다. 우리 나라에는 아직 상품화 된 대수타일이 없으므로 자체 제작하거나 종이를 잘라 수업에 이용할 수 있다.

상품화되어 있는 것은 색의 구분이 분명하고 다루기 편하며 견고하다 잇점이 있지만 가격면에서 반의 모든 학생들에게 한 세트씩 주기가 어렵다는 단점이 있다. 또한 같은 크기의 다른 색을 가진 타일을 일찍 접하게 되므로 학생들의 학습속도와 이해수준, 준비도에 상관없이 학생들로 하여금 너무 빨리 음수를 의식하게 하여 음수에 대한 명확한 이해 없이 그것을 다루도록 부추기게 하는 면이 있다.

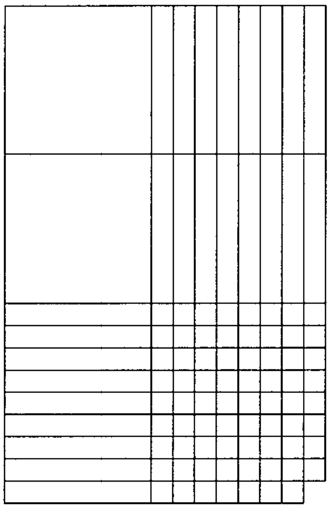
대수타일을 학습에 이용할 때에는 먼저 하나의 변수만을 다루는 기본 셋트를 가지고 조작활동을 하는 것이 바람직하다. 대수타일을 이용해서 하나의 변수를 가진 대수식의 조작을 쉽게 다루게 되면 두 개의 변수가 포함된 대수식을 학습하기 위해서 다른 색과 다른 크기로 된 타일을 첨가한다. 두 개의 변수 예를 들어, x 와 y를 모두 포함하는 대수식을 다루려면 <그림 2>에 제시된 바와 같이 y, y^2, xy를 나타내는 타일을 첨가하여야 한다. 그런데 얼마동안은 이런 타일들을 보여주지 말아야 한다. 대수타일을 전부 주고 학습을 시작하는 것보다는 학습내용과 순서에 맞게 필요한 타일들을 점차로 추가하면서 지도를 해 나가는 것이 바람직하다. 종이를 이용할 때에도 역시 이와 같은 방법을 적용하여야 한다. 종이를 이용하면 비록 견고하지 않다는 단점이 있기는 하지만 모든 학생들이 한 세트씩 가지

5) 견본의 크기는 대수블럭 보통 크기의 650%가 되는 크기이다.

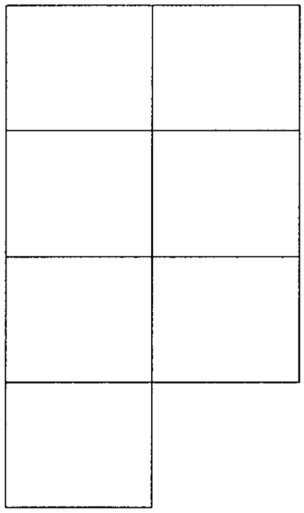
고 직접 조작을 해 볼 수 있는 장점이 있다. 또한 필요한 타일에 해당하는 종이를 학습에 맞게 하나씩 차례로 제시함으로써 교사가 음수의 아이디어를 다루려고 할 때까지 학생들로 하여금 음수에 주목하지 않게 제어할 수 있다는 장점도 있다.



<그림 9> 종이로 만든 대수타일 ($1, x, x^2$용)



<그림 10> 종이로 만든 대수타일 ($1, y, y^2$용)



<그림 11> 종이로 만든 대수타일 (xy용)

III. 대수타일을 이용한 수학학습 지도방법의 예

다항식의 연산 및 다항식의 곱셈과 인수분해 도입에 유용한 지도방법을 제공하는 대수타일은 학생들에게 다항식을 구체적인 대상(a concrete referent) 즉, 타일을 통해 다루게 함으로써 그들이 하는 수학이 실제적인 조작활동 속에서 의미를 갖을 수 있도록 도와준다[6].

대수타일을 수학에 활용하는 방법을 소개하고 있는 몇 가지 지도사례들에는 기본적으로 아주 중요한 교육적 원리가 내재되어 있다. 그것은 어떤 수준에라도 학습이 가장 수월하게 이루어지기 위해서는 우선

6) 다항식은 '세는'수가 아니기 때문에 다항식의 연산은 학생들이 그 동안 '수들'위에서 행했던 더하고 빼고 곱하고 나누는 방법과 동일하지는 않다.

구체적인 행동에서 출발하여,
행동에 대한 영상적 표현이 있은 후,
기호적 표현을 구성하고,
기호들 위에서 형식적인 행동들이 수행되는

것이 가장 바람직하다는 것이다. 일반적으로 소개되는 대수타일을 이용한 아래의 4가지의 학습 단계에는 위와 같은 교육적 원리가 그대로 함의되어 있음을 알 수 있다.

단계 1: 타일 그 자체를 다루는 행동
단계 2: 타일을 다룬 행동의 묘사
단계 3: 행동의 묘사에 대한 기호 사용
단계 4: 기호 위에서 행해지는 전통적인 대수 조작

대수타일을 이용한 바람직한 수학학습의 예로 소개되는 아래의 지도사례들은 바로 위와 같은 학습단계를 토대하고 있다는 것을 쉽게 짐작할 수 있다.

1. 교사를 위한 일반적인 지도순서

아래의 예는 교사가 대수타일을 수학수업에 이용할 때 적용해 볼 수 있는 지도방법과 적절한 지도의 순서를 학생들과 할 수 있는 일련의 활동을 통해 설명하고 있다. 제시된 예들을 교사가 학생들을 가르치기 위한 의도로 다룰 수 있는 실제적인 문제들이다.

(1) 타일의 이름 정하기

교사가 학생들과 대수타일을 다루기 위한 첫 단계는 각 타일의 이름을 정하는 것이다. 이름을 지울 때 강조해야 할 점은 각 타일들에 대하여 어떤 정해진 이름이 미리 존재하는 것은 아니라는 사실과 우리가 타일을 가지고 수학의 내용을 다루려면 그것들에 관해 이야기를 할 수 있는 어떤 이름들이 반드시 필요하다는 것이다[7]. 이름짓기 규약은 수학 사회에서 중요한 것으로 학생들이 정한 규약에 따라 수학의 내용을 전개하는 경험을 해 보는 것은 상당히 의미있는 학습이라고 할 수 있다.

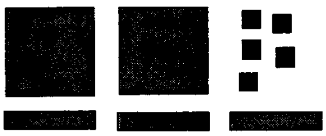
---

7) 사물에 대해 적당한 이름을 지정하면 학습의 진전이 보다 용이하게 일어날 수 있다.

처음 시작할 때는 우리가 보통 1로 생각하는 가장 작은 정사각형들을 '이름이 없는 것[8]' 이라고 칭한다. 교사는 수업 첫날 학생들에게 타일의 이름이 무엇이라고 정해져 있지 않은 이유를 그들이 이해할 수 있는 방식으로 설명해 주어야 한다. 그것은 수학의 내용에 적절히 통합될 수 있는 규약을 우리가 정할 수 있다는 것을 의미한다. 학생들이 타일에 어떤 식의 이름을 붙이길 원하는가를 알아보는 것도 좋다. 각 반별로, 각 그룹별로 타일의 이름을 다르게 결정하는 것도 허용된다. 그러나 같은 크기와 같은 색깔의 타일에는 같은 이름을 주어야 한다는 사실을 학생들이 인식할 수 있도록 지도해야 한다. 왜냐하면 그것들이 수학에서 같은 방식으로 사용되기 때문이다. 이런 지도과정 속에서 수학에서 무언가를 대신하는 이름으로서 사용되는 변수의 개념의 지도가 포함될 수 있다.

(2) 합의 구성 및 표현

학생들로 하여금 세 종류의 기본적인 타일들을 적당히 합한 후에 그에 대한 이름을 써 보도록 한다. 그 과정을 통해 '합'에 들어 있는 모든 성분들을 잘 나타낼 수 있는 적절한 이름을 정하는 규칙을 만들게 한다. 장황한 언어적 표현보다는 축약어나 기호를 사용하는 것이 효과적임을 지도한다. 예를 들어, 아래 그림의 합은 다음과 같이 여러 가지 표현으로 나타낼 수 있다.



2BS + 3R + 5[9]

2 R ^{2} + 3R + 5

$2x^2 + 3x + 5$

학생들로 하여금 타일들을 여러 가지 방법으로 합해 보도록 하고 그 합에 대한 기호 표현을 써 보도록 한다. 아래에서는 이 후의 수학학습을 위해 각 타일의 이름을 편의상 1, x, x^2으로 통일하여 부를 것이다.

(3) 다항식의 합과 차의 지도

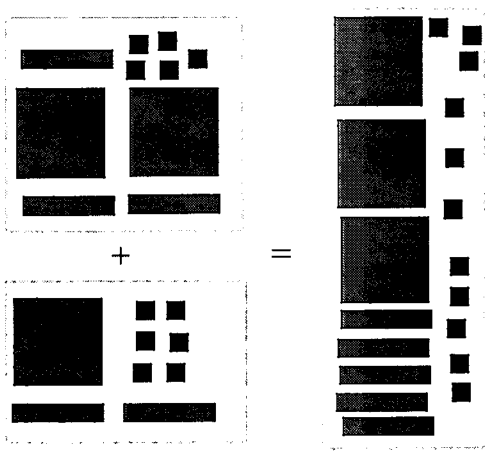
각 학생(혹은 각 그룹)이 만든 타일의 합과 다른 학생(혹은 다른 그룹)이 만든 타일의 합을 합쳐보도록 한다. "그 결과를 어떻게 부를 것인가? 그것들을 합하는 행위를 어떻게 나타

8) 아직 이름이 정해져 있지 않다는 의미로 해석하는 것이 좋다.
9) BS: big squares, R: rectangles

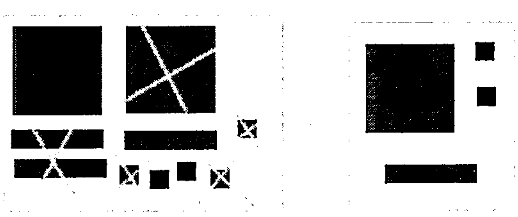
낼 것이며 어떻게 기록할 것인가?" 이제 어떤 합에서 몇 개의 타일을 제거해 보도록 한다. "그 결과를 어떻게 부를 것인가? 어떤 합에서 몇 개를 빼는 행위를 어떻게 나타낼 것이며 어떻게 기록할 것인가?" 이러한 문제 제기를 통해 교사는 바로 다항식의 합과 차의 아이디어를 도입할 수 있다.

이의 지도과정은 학생들이 단지 몇 가지의 기호 표현 규정에 동의함으로써 쉽게 진행될 수 있다.

$(2x^2+3x+5)+(x^2+2x+6)=3x^2+5x+11$은 다음을 의미한다.



$(2x^2+3x+5)-(x^2+2x+6)=x^2+x+2$은 다음을 의미한다.[10]



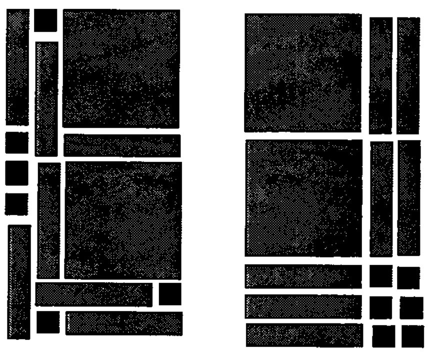
학생들로 하여금 타일을 가지고 위와 같은 활동을 여러 번 해 보도록 하고 합하고 빼는 행동을 위와 같은 그림으로 그려보도록 한 후, 그 행동과 그림에 대한 기호표현을 써 보도

10) 그림에서 X 표시를 한 것은 표시된 타일을 합에서 제거한다는 것을 의미한다.

록 한다. 몇몇 학생들은 행동을 그림으로 그리는 것을 하지 않고 기호로만 쓰려고 할 수도 있다. 그렇다면 그것을 허용할 수 있으나 이로 인해 학생들이 타일을 옮기고 그것을 그림으로 그려보는 행동들이 '좋지 않은' 학습방법이라는 생각을 갖게 되지 않도록 교사가 신경을 써야 한다. 그 이유는 어떤 수준에라도 학습이 가장 수월하게 이루어지기 위해서는 우선 구체적인 행동에서 출발한 영상적 표현이 있은 후 그러한 행동에 대한 기호적 표현이 있고 기호들 위에서 형식적인 조작이 이루어지는 것이 바람직하기 때문이다.

(4) 주어진 타일로 직사각형 구성하기

2개의 x^2, 7개의 x, 6개의 1로 하나의 집합을 만들어보자. "이 집합을 어떤 이름으로 칭할 것인가?" 그것이 x^2+7x+6으로 표현될 수 있다는 것은 이전의 학습을 통해서 쉽게 이해할 수 있다. 이제, 학생들로 하여금 그 집합이 직사각형의 모양이 되도록 타일을 다시 배열해 보도록 한다.



왼쪽에 제시된 두 가지 직사각형은 모두 같은 타일들로 만들어진 것이다. 앞으로 다항식의 인수분해 지도를 위해 교사는 학생들에게 오른쪽 경우의 배열이 훨씬 더 바람직한 경우임을 지도해야 한다. 그 이유에 대한 설명으로 직사각형 구성의 심미적 규칙을 제시하는 것이 가장 적절하다. 학생들에게 대수타일로 직사각형을 구성할 때 따라야 두 가지 규칙은 다음과 같다.

[규칙 1] 큰 정사각형(x^2)과 작은 정사각형(1)은 서로 같은 행이나 열에 놓일 수 없다.

[규칙 2] 작은 정사각형(1)들은 모두 함께 모여 있어야만 한다.

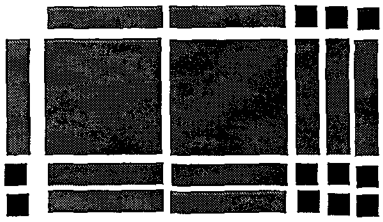
(5) 직사각형의 가로, 세로 측정

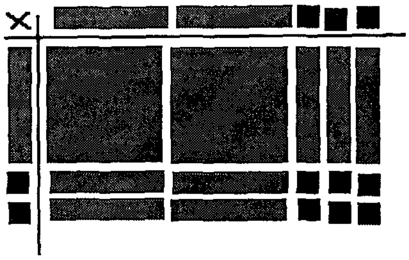
x를 나타내는 직사각형 타일과 1을 나타내는 작은 정사각형 타일을 이용해서 직사각형의 가로 길이와 세로 길이를 측정할 수 있다. 예를 들면, 아래의 왼쪽 그림의 안쪽에 놓여진 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $2x+3$, $x+2$이다. 직사각형에 바로 인접해 있는 타일들을 가지고 가로의 길이와 세로의 길이를 측정을 한다는 것이 학생들에게

는 이해하기 어려운 사실일 수도 있다. 학생들의 이해를 용이하게 해 주기 위해서 아래의 오른쪽 그림에서 보는 바와 같이 직사각형과 인접한 타일을 서로 구분하는 '교차선(crossed lines)'을 사용하는 것이 도움이 될 수 있다. 교차선의 왼쪽 모퉁이에 써 있는 X 표시는 인접한 타일들을 서로 '곱한다(crossed)'는 것을 의미하기 위해 사용된다. 예로 제시된 직사각형에 대해서는 그것의 가로와 세로의 길이를 이용해 수식

$$2x^2+7x+6=(x+2)\times(2x+3)$$

을 만들 수 있다.





(6) 다항식의 인수분해 지도

교사는 학생들이 주어진 타일로 직사각형을 만들어 보고, 그 행위를 그림으로 나타내 보고, 직사각형의 가로와 세로의 길이를 측정한 것을 기호로 써보는 연습을 충분히 할 수 있도록 얼마간의 시간을 제공해야 한다. 만약 학생들이 구성된 직사각형을 그림으로 그리는 작업에 싫증을 낸다면, <표 1> 과 같은 기호 표현을 소개할 수도 있다. 이것은 직사각형이 어떻게 만들어지며 그것의 가로와 세로의 길이가 각 각 무엇인지를 보여주는 표이다. 이 단계까지 이르면 교사는 학생들에게 직사각형을 분석하는 아이디어를 지도하게 된 것이다. 직사각형의 분석을 통해 직사각형의 넓이와 가로 및 세로 길이 사이의 관계를 대수식으로 표현할 수 있게 되면 학생들은 구체적 조작을 통해서 2차식의 인수분해 아이디어를 경험하게 되는 것이다. 이 단계에서 인수분해 및 인수의 개념과 용어에 대한 지도가 반드시 필요한 것은 아니다. 이의 지도는 학생의 학습단계와 교사의 지도계획에 따라 적절한 시기에 도입될 수 있다. 분명한 것은 대수타일을 통한 구체적 조작의 경험이 학생들이 인수분해의 개념을 형식적으로 다루게 될 때 인수분해를 실제적인 조작의 의미와 관련

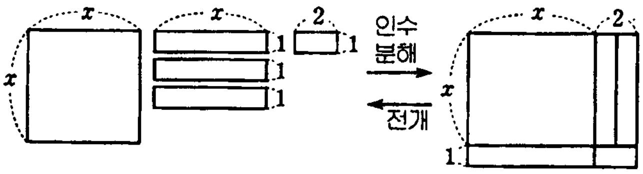
<표 1> 인수분해 표현

×	$2x$	3
x	$2x^2$	$3x$
2	$4x$	6

지어 쉽게 파악할 수 있게 된다는 것이다.

아래의 <그림 12>는 우리나라 중학교 수학 교과서에서 다항식의 인수분해 과정을 지도하는 방법의 하나로 대수타일을 이용한 조작활동의 아이디어를 제시하고 있는 예이다.

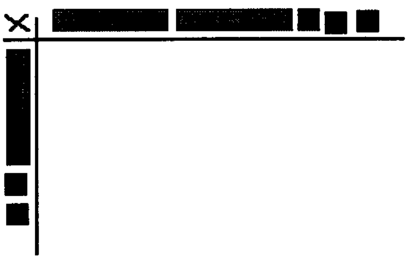
문2 다음 그림을 참조로 하여 x^2+3x+2를 인수분해하여라.



<그림 12> 중학교 3학년 수학교과서의 예 (김연식, 김흥기, 1996, p.62)

(7) 다항식의 전개[11]

학생들에게 적당한 시간을 주고 몇 가지 쉬운 작업을 시켜보도록 하면 다항식의 곱셈 결과 즉, 전개식을 쉽게 구하게 할 수 있다. 학생들에게 타일을 이용하여 두 가지의 길이를 주고 "이 각 각을 가로와 세로의 길이로 하면 어떤 타일모양으로 직사각형이 구성될까?"라는 문제를 제기해 보자. 예를 들어 먼저 아래의 왼쪽 그림에 제시된 바와 같이 교차선을 따라 수직 수평 위치에 길이를 나타내는 타일을 각각 놓도록 하고 교차선 안쪽 위치에 적절한 직사각형[12]을 구성하도록 한다. 그 결과를 <표 2> 와 같이 기호로 표현하거나 그림을 그려서 나타내도록 한다.



<표 2> 다항식의 전개

×	$2x$	3
x	$2x^2$	$3x$
2	$4x$	6

마지막 단계에서 그 결과를 식 $(x+2)\times(2x+3)=2x^2+7x+6$와 같이 형식적인 방법으로 표현해 보도록 한다.

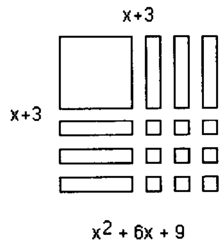
---

11) 다항식의 곱셈(전개)과 인수분해의 학습은 그 지도순서가 서로 바뀌어도 상관없다.
12) 주어진 두 길이를 가로 길이와 세로 길이로 하는 직사각형

이러한 지도방법의 한 예로 중학 수학에서 다루어지는 곱셈공식의 지도를 생각해 볼 수도 있다. 그 방법은 대수타일을 이용하여 일차식의 제곱을 직사각형 모양으로 배열해 보도록 하고 그 최종결과를 식으로 표현해 보도록 하는 것이다.

$$(x+1)^2,\ (x+2)^2,\ (2x+1)^2,\ (2x+3)^2,\ (3x+1)^2,\ (3x+2)^2,\ (4x+5)^2$$

와 같은 문제[13]를 제시하고 학생들로 하여금 <그림 13>과 같이 대수타일로 결과를 알아보는 연습을 충분히 하도록 하면 학생들은 $(a+b)^2$꼴의 곱셈결과에서 규칙을 발견하는 경험을 할 수 있고 이를 통해 형식화된 곱셈공식을 실제적인 조작의 의미를 통해 쉽게 받아들일 수 있게 된다.



<그림 13>
$(x+3)^2$의 전개

여기까지가 대수타일을 이용하여 음수(혹은, 음의 계수)가 포함되지 않은 다항식의 덧셈과 뺄셈 및 인수분해와 전개를 지도하는 일반적인 방법이다. 이 시점에서 교사의 지도는 아래의 두 가지 방향으로 구분되어 진행될 수 있다.

하나는 다른 크기의 타일들을 사용하여 새로운 변수를 도입하는 것이고,
다른 하나는 음의 계수를 가진 다항식을 도입하는 것이다.

전자를 위해서는 <그림 2>의 타일들을 이용하거나 <그림 10>과 <그림 11>에 있는 종이를 잘라 사용하여야 한다. 이때 학생들로 하여금 이제까지 다룬 타일들과 구별되는 타일들에 새로운 이름을 선택하도록 할 필요가 있다. 두 개의 변수가 있는 다항식의 지도는 앞에 제시된 내용의 범위에서 그 지도방법이 크게 차이가 나지 않으므로 본 고에서는 생략한다. 새로운 변수를 사용하는 것은 어쩌면 학생들 스스로가 쉽게 해 낼 수 있을지도 모른다.

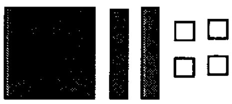
음의 계수를 가진 다항식의 지도가 그것을 다루는데 있어서 약간의 기교를 요하기 때문에 교사들에게는 쉽지 않은 지도방법이 될 수도 있다. 따라서 아래에서는 음수를 다루는 그 지도방법의 예를 간단히 소개해 보고자 한다.

(8) 음의 계수를 다루는 뺄셈

"3에서 7을 빼는 것은 어떻게 해야 할까?"와 같은 문제 해결에서 기존의 학습 경험은 자

13) http://www.visi.com/%7Edethier/activities/algebra-tiles/sq-bin.htm

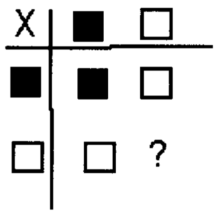
연스럽게 "작은 정사각형 타일 3개에서 어떻게 7개를 제거할 수 있을까?"라는 의문을 일으킨다. 정수의 개념을 다루어야 할 상황에 있는 교사는 이제까지 대수타일을 다루었던 방식과 다른 방식으로 접근해야 할 필요성이 있다. 만약 대수타일을 사서 사용하고 있다면, 색깔이 다른 것을 음수로 사용하고 종이를 잘라 사용하고 있다면 자른 종이의 뒷면을 어둡게 색을 칠해서 음수로 사용할 수 있다. 학생들에게 음수로 지정할 타일이 무엇인지에 대한 설명을 해주고 " $(2x^2-3x-7)-(x^2-5x-3)$의 결과는 어떻게 될까?" 라는 문제를 던져보자. 위의 문제를 모든 학생들이 대수식으로 바르게 써 낼 수 있는지는 확실치 않지만 아마 대부분의 학생들이 앞에서 경험한 다항식의 뺄셈조작에서의 타일 제거 행동을 함으로써 왼쪽의 그림과 같은 결과를 얻어낼 것이다.



<그림 14>

(9) 음수의 곱셈 규칙

이제 학생들로 하여금 교차선이 있는 타일판 위에 적당한 타일들을 놓으면서 새롭게 도입된 음수타일이 곱셈을 하는 경우에 어떻게 조작되는지를 이해시켜야 한다. 몇 가지 경우를 그려보거나 필요하다면 기호를 사용해서 지도해 볼 수도 있다. 학생들이 양의 계수를 가진 다항식의 곱셈과 정수의 개념에 이미 익숙해 있다면 이 과정은 상당히 수월하게 진행될 것이다. 만약 학생들이 정수끼리 곱하는데 약간의 어려움을 갖고 있다면, 학생들에게 간단한 예를통해 곱셈의 의미를 상기시켜 음수의 곱셈을 이해시켜 본다.



<그림 5> 대수타일로 표현된 음수의 곱셈

$$\begin{array}{l} \vdots \\ (-1)\times 1=-1 \\ (-1)\times 0=0 \\ (-1)\times(-1)=1 \\ \vdots \end{array}$$

<그림 6> 음수의 곱셈 규칙 발견과정

1×1 은 1이 하나 있음을 의미하므로 그 결과를 1로 나타내고, $(-1)\times1$은 -1이 한 개 있음을 의미하니까 그 결과를 -1로 나타낸다는 식의 설명과 함께 <그림 5>와 같이

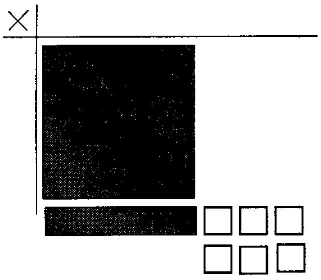
대수타일의 곱셈 조작을 설명한다. 일단 이렇게 설명을 하고 나면 $(-1)\times(-1)$의 곱셈 결과를 결정해야 할 단계에 접하게 된다. 오른쪽 그림의 네 자리중 세 자리에 무엇을 놓아야 할 지를 이해하는 것은 비교적 쉬웠지만 마지막 네 번째 자리에 무엇을 놓아야 할 지에 대한 설명은 쉽지 않다. 학생들에게 알고 있는 지식을 정리하여 <그림 6>과 같은 식을 나열해 보게 하고 귀납적 사고를 유발시켜 피승수가 음수일 때 승수가 1씩 감소하면 그 결과가 1씩 증가한다는 규칙을 발견하게 하고 이를 일반화하여 $(-1)\times(-1)$의 곱셈 결과가 1이 되어야 함을 인식하도록 한다. 이를 통해 학생들은 <그림 5>에 제시된 타일판의 네 번째 자리에는 빨간색 타일이 와야 한다는 사실을 자연스럽게 받아들일 수 있게 된다.

(10) 음의 계수를 가진 다항식의 인수분해 지도

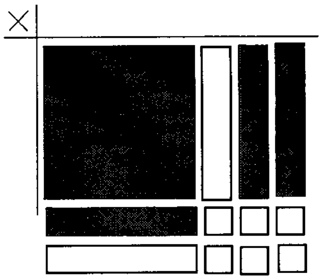
대수타일을 가지고 직사각형을 만들고 직사각형의 가로와 세로의 길이를 이용해 넓이에 관한 식을 구성함으로써 2차식의 인수분해 아이디어를 경험한 학생들은 음의 계수를 가진 다항식의 인수분해를 할 때, 직사각형을 구성하는 과정에서 어려움에 부딪치게 된다. 여기서 교사가 음수가 포함된 다항식의 곱셈을 직사각형으로 구성해내는 과정을 설명하기 위해서는 약간의 기교를 써야 한다. 아래 지도 방법의 예를 보자.

먼저 학생들에게 x^2+x-6과 같이 음수를 가진 다항식을 주고 이 식을 나타내는 타일들을 가지고 교차선 안쪽에 직사각형을 구성해 보도록 한다. 대부분의 학생들은 약간의 조작을 해 본 후에 곧바로 직사각형이 구성되지 않는다고 할 것이다. 이 때 교사는 어쨌든 다시 한 번 노력해 보도록 학생들을 격려한 후 그들이 적절한 방법을 발견할 수 있도록 어느 정도의 활동시간을 준다. 학생들에게 문제해결의 욕구가 일어나도록 분위기를 조성한 후 문제해결을위한 첫 번째 단계로 앞에서 언급되었던 직사각형 구성의 심미적 [규칙 1], [규칙 2]를 떠올려 보도록 한다.

학생들은 심미적 [규칙 1], [규칙 2]를 적용하여 <그림 7>과 같은 직사각형을 만들 것이다. 이 때 직사각형이 되기 위해서 채워져야 할 남은 공간을 어떻게 해야하는가의 문제가 생기는데 이의 해결을 위해 교사는 "식에 0을 더하는 것을 생각해보고 타일을 이용하여 0을 적용하는 방법을 생각해 보아라"라는 안내를 해 줄 수 있다. 학생들은 위의 예에서 식에 0을 더해 직사각형을 채우려면 양의 x 두 개와 음의 x 두 개가 첨가될 수 있음을 쉽게 알 것이다. 그러나 교사는 첨가되는 x타일을 놓는 위치가 학생들마다 서로 다르게 나타난다는 것을 발견하게 될 것이다. 예를 들어, x타일이 <그림 8>과 같이 놓이는 경우가 있을 수 있다.



<그림 7>



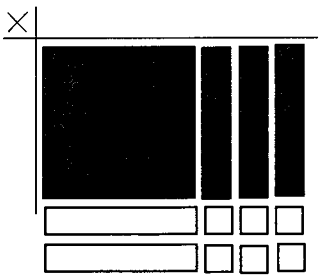
<그림 8>

<그림 8>과 같은 상태에서는 직사각형의 가로와 세로의 길이를 측정하기가 어렵다. 문제는 학생들이 '직사각형의 가로와 세로의 길이를 명확히 볼 수 있는 배열이 어떤 것인가 즉, 인수를 찾기 쉬운 타일의 배열은 어떤 것인가'의 문제를 해결해야 하는 것이다. 이의 문제해결을 위해 교사는 직사각형 구성에 대한 새로운 심미적 규칙이 필요함을 설명할 수 있다. 새롭게 적용될 심미적 규칙은 다음과 같다.

[규칙 3] 직사각형 안에 x타일이 있는 어떤 열이나 행을 보아도 모두 같은 색의 x타일이 놓여져 있어야 한다.

이제 이러한 규칙이 적용되면, 위의 <그림 8>에 새로 첨가해 놓은 4개의 x타일은 <그림 9>과 같이 재배열된다.

위와 같은 방법으로 학생들은 음수가 포함된 다항식의 인수분해를 해결하기 위해 주어진 타일과 0의 개념을 이용해 직사각형을 만들고, 그 행위를 그림으로 나타낸 후, 직사각형의 분석을 통해 $x^2+x-6=(x-2)\times(x+3)$과 같은 형식적인 대수식을 기호로 써보는 연습을 충분히 할 수 있어야 한다. 여기서도 교사는 <표 3>과 같은 기호 표현을 소개할 수 있다.



<그림 9>

<표 3> 인수분해

×	x	3
x	x^2	$3x$
-2	$-2x$	-6

2. Suzanne 교사의 지도 사례[14]

다음의 예는 미국의 Suzanne Alejandre 교사가 다항식 인수분해와 관련된 내용의 지도과정에서 필요한 핵심활동을 제시한 것이다.

(1) 대수타일의 소개

여러 타일을 구분하여 제시하면서 학생들이 타일의 모양과 길이를 확인하면서 그크기에 주목할 있도록 한다. 다음과 같은 질문을 던질 수 있다.

 "이 타일은 무슨 모양입니까?" (정사각형)

 "이 타일은 무슨 모양입니까?" (직사각형)

 "이 타일의 세로길이는 얼마일까요?" ('1')

 "이 타일의 가로길이는 얼마일까요?" ('x')

대수타일을 이용한 수학학습을 계속하는 동안에, 학생들은 자신이 아래와 같은 모양과 크기의 타일조각들을 가지고 수업활동을 하고 있다는 사실을 분명히 인식할 수 있어야 한다.

 가로, 세로가 단위길이 1인 정사각형

 세로가 1이고, 가로가 x인 직사각형

 가로, 세로가 x인 정사각형

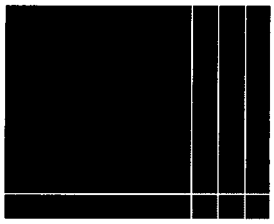
(2) 다항식의 곱셈과 인수분해의 관계 인식

대수타일을 이용하여 $(x+1)(x+3)$ 이 <그림 20>와 같이 표현될 수 있음을 보인다(자세한 지도방법은 앞의 사례에서 다룬 지도방법과 같으므로 생략한다).

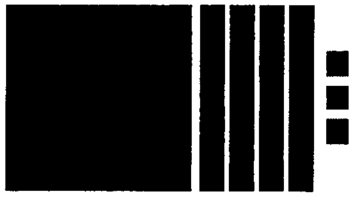
---

14) http://forum.swarthmore.edu/alejandre/algfac1.html, 저자의 자료는 1996년 1월에 만들어진 것이다.

<그림 20>의 직사각형에 포함된 타일들을 <그림 21>과 같이 모두 늘어놓는 방식으로 다시 배열해 보도록 한다.



<그림 20>



<그림 21>

<그림 20>의 배열을 가리키며 "이것은 무엇을 나타내는 것인가? 어떤 타일들의 집합인가?"라는 문제를 제기하고 학생들로 하여금 그것은 가로, 세로가 x인 정사각형 1개, 세로가 1이고, 가로가 x인 직사각형 4개, 단위 1인 정사각형 3개로 구성되는 것이고 이를 기호로 쓰면 x^2+4x+3과 같이 표현될 수 있다는 사실을 이해할 수 있도록 지도한다.

(3) 다양한 예를 통해 익히기

이제부터는 학생들이 $(x+4)(x+2)$, $(x+5)(x+1)$ 등의 식을 대상으로 직접 위와 같은 과정을 실제로 해 볼 수 있도록 한다. 이러한 조작활동을 통해 일단 학생들이 대수적으로 인수분해 하는 것이 실제로 무엇을 의미하는 것인지를 이해하고 나면 형식적인 방법으로서의 인수분해 도입이 보다 의미 있을 것이다.

3. 다항식의 곱셈과 인수분해의 지도사례[15)]

다음은 미국 시카고의 Curie Metro High School에서 대수타일을 이용하여 수학수업을 실행한 R. Marshall이라는 교사가 다른 교사들에게 추천하는 지도방법이다. 앞에서 소개된 방법들과 크게 다르지 않지만 타일의 이름을 주고 수학의 내용을 지도해 나가기 이전에 '직사각형 게임'이라는 활동을 도입하여 학생들에게 대수타일을 다루는 충분한 경험을 시키는 것이 특징이다.

15) http://www.iit.edu/%7Esmile/ma8711.html

(1) 목표

① 대수타일의 사용을 통하여 학생들이 다항식의 전개와 인수분해활동에서 갖게되는 좌절감이나 불안을 없앤다.

② 대수타일을 가지고 정확하고 바른 조작활동을 함으로써 이를 통해 수학을 이해해 나가도록 한다.

(2) 필요한 자료

① 대수 타일

② 교차선이 그려져 있는 타일판

③ 학생들이 학습할 내용이나 문제를 담은 활동지

(3) 지도 전략

먼저, 대수타일을 가지고 학습하기 이전에 먼저 '직사각형 게임(The Rectangle game)'을 시도해 본다. 학생들에게 세 종류의 타일을 적당한 개수만큼 주고 "이 타일들만을 이용해서 가장 큰 직사각형을 만들어 보아라"라는 문제를 내준다. 학생들로 하여금 그들 나름대로의 방법으로 직사각형을 구성해 보도록 한 후, 앞으로의 수업에서 필요한 직사각형 구성의 기본 규칙을 알려준다.

① 모든 타일이 타일판 위에 놓여져야 한다.

② 타일은 한 층으로만 놓여져야 한다

③ 직사각형은 그 내부가 완전히 채워져야 한다.

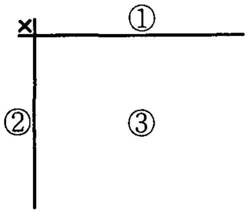
교사는 학생들이 타일을 가지고 직접 이 게임을 실제로 해보는 경험을 통해서 가능하면 가장 큰 직사각형[16]을 빨리 만드는 전략을 개발할 수 있도록 안내해야 한다.

학생들이 '직사각형 게임'을 하는 것으로 대수타일을 다루는 충분한 경험을 하게 되면 그것을 이용한 학습활동을 하는데 의욕 갖게 되고 이때 타일에 이름을 주는 과정을 도입할 수 있다. 이름은 앞에서 제시된 바와 같이 타일의 크기와 관련된 이름으로 정하며 교사는 타일의 크기와 이름간의 상관관계를 기하학적인 그림과 함께 칠판 위에 제시해 놓는다.

일단 학생들이 타일의 이름을 받아들이고 나면, 다항식의 곱셈(전개)을 도입할 수 있다. <그림 22>과 같이 교차선이 그려져 있는 타일판 위의 둘레 부분 ①, ②의 위치에 인수들이

---

16) 여기서, '가장 큰'의 의미는 넓이가 가장 큰 것을 의미한다. 이런 의미를 사용하면, 가장 큰 직사각형은 언제나 '남은 타일'의 개수가 가장 적은 경우가 될 것이다.



<그림 22> 타일판

놓이는 과정, ①, ②에 놓인 타일의 크기와 개수에 따라 타일판 안쪽 부분 ③에 직사각형을 구성해내는 방법을 학생들이 시각적으로 파악할 수 있게 하는 것도 중요하다. 더불어 ①과 ②의 위치에 놓인 인수들로 직사각형의 가로와 세로의 길이가 결정된다는 것이 강조되어야 한다. ③ 위치에 구성되는 직사각형을 만들 때에는 앞에서 '직사각형 게임'을 했을 때 사용했던 전략을 사용하여야 한다는 것도 인식해야 한다. 교사는 우선 학생들에게 직사각형을 만들 충분한 시간을 주고 학생들이 행한 실제 문제과정을 서로 비교해 보도록 한 후, 그들의 결과를 분석할 수 있도록 도와준다. 구체적인 지도방법은 앞에서 언급되었던 방법과 크게 다르지 않다.

이렇게 다항식의 곱셈 내용을 학습시키고 나면 대수타일을 가지고 다항식의 인수분해를 하는 방법을 도입한다. 대수타일을 통해 교사들이 가장 큰 도움을 얻는 지도내용은 아마도 다항식의 인수분해일 것이다. 타일을 이용하면 다항식의 인수분해가 상당히 쉽게 되기 때문에 어려운 문제라도 간단한 퍼즐 유형의 문제로 바뀌게 된다. 인수분해의 활동을 통해서 학생들은 앞에서 다룬 '직사각형 게임'이 실제로는 이차 다항식의 인수분해의 실례였다는 것을 파악할 수 있을 것이다. 이러한 일련의 활동들이 순조롭게 잘 진행될 수 있다면 구체적 조작물의 사용을 통해 학생들은 적절한 때에 그 동안 수학과 관련하여서 가졌던 어려움과 불안을 떨쳐버리면서 수학을 쉽게 받아들이고 이해하게 될 것이다.

IV. 맺음말

본 고에서는 수학교구로서 많이 알려져 있는 대수타일에 대한 소개와 이를 이용하여 지도할 수 있는 수학의 내용을 중심으로 대수타일을 활용한 일반적인 지도방법을 소개하였다. 따라서 본 고에서의 논의 내용은 주로 수학교구인 대수타일의 소개와 대수타일을 수학수업에 활용하는 방법에 초점이 맞추어져 있다.

그러나 교구에 대한 올바른 이해와 효과적인 활용을 위해서는 교구의 조작활동을 통해 얻을 수 있는 학습의 효과는 무엇이며 이와 더불어 발생할 수 있는 학습의 부정적인 영향은 무엇인가를 명확히 파악하는 작업이 더불어 행해져야 할 것이다. 대수타일의 활용에 있어서 교사는 그 이용방법에 대한 이해 뿐 만 아니라 대수타일의 활용학습에 개입될 수 있는 교수학적인 문제점들을 고려하여 수업활동을 계획하여야 하는 것이다.

이러한 관점에서 연구자는 실제로 대수타일을 자체 제작하고 그것을 수업에 활용한 실험수업의 경험과 본 고의 이론적 논의를 토대로 대수타일의 수업 효과를 분석해 보았다. 실제로 대수타일을 수업에 활용하려는 교사는 본 고에서의 논의와 더불어 '교구 이용에 대한 교수학적 논의(김남희, 2000)'의 내용을 참고해 주길 바란다. 이를 통해 대수타일 활용에 대한 안목을 얻고 바람직한 교구 이용 수업을 계획하길 기대한다.

참 고 문 헌

강완, 백석윤(1998). 초등수학교육론. 동명사

김남희(1999). 수학의 기본 구조 지도와 딘즈블럭. 대한수학교육학회지 학교수학 제 1권 제 1호, pp.305-324

김남희(2000). 교구 이용에 대한 교수학적 논의 - 대수 모델의 활용 사례를 통한 교구의 효과 분석을 중심으로 -. 대한수학교육학회지 학교수학 제 2권 제 1호

김연식, 김흥기(1996). 중학교 수학 3. 동아출판사

김효정(1995). 구체적 조작물을 이용한 활동 지향적 수학 수업에 관한 연구. 교육학 석사 학위 논문, 이화여자 대학교 교육대학원

Moser, J. M.(1992). Arithmetic operations on whole numbers: Addition and subtraction, In T. R. Post (Ed), *Teaching mathematics in grades K-8: Research-based methods(2nd ed)*(pp.123-155). Allyn and Bacon.

http://www.picciotto.org/math-ed/manipulatives/alg-manip.html

http://www.visi.com/%7Edethier/activities/algebra-tiles/sq-bin.htm

http://members.xoom.com/makearney/archmath002D.html

http://www.lat-olm.com.au/algebra.htm

http://www.ucs.mun.ca/~mathed/t/rc/alg/tiles1.htm

http://forum.swarthmore.edu/alejandre/algfac1.html

http://www.iit.edu/%7Esmile/ma8711.html