대한수학교육학회지<학교수학>제2권 제1호
Journal of the Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics, Vol.2, No.1, 243~257, March 2000

수학사

제논의 역리의 재음미

한 대 희 (서울대 대학원)

I. 서론

새로운 단원에 들어가기에 앞서, 교사는 학생들의 동기와 흥미를 유도하기 위해 흔히 그 단원과 관련된 역사적 에피소드나 문제를 제시하고는 한다. 제논의 역리는 극한 단원 특히, 무한 급수와 관련하여 언급되는 소재의 하나이다. 아킬레스가 거북이를 따라 잡을 수 없다는 명백히 잘못된 주장은 학생들의 주의를 끌기에 충분하며, 이 문제에 대한 해설은 대체로 무한 급수의 수렴으로 설명된다. 그러나 이와 같이 제논의 역리를 다루는 것에는 문제가 있다. 설명의 편의상 4가지 제논의 역리 중 첫 번째인 '이분법' 문제를 생각해 보자. 이분법은 다음과 같다.

> 당신은 지금 있는 곳에서 저 벽에 도달 할 수 없다. 왜냐하면 전체를 다 가기 전에 그것의 반을 가야하고, 나머지 반을 가기 위해서는 또 반을 지나가야 하는 데, 아무리 이 과정을 계속해도 여전히 '반'이 남기 때문이다.

이제 이것을 무한 급수로 설명해 보자(금종해 등, 1998, p.93).
움직인 거리 S는

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots$$

이고, 무한 등비 급수의 이론에 의해,

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

따라서, 총 이동한 거리가 1이 된다. 즉 벽에 도달하게 되는 것이다. 여기서 설명의 근거

는 무한 급수의 이론이다. 즉, 공비 r인 수열 $\{r^n\}$에 대해서, $-1 < r < 1$ 인 경우, 그 무한 합이

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{r}{1-r} \quad ....①$$

이라는 정리에 기반을 두고 있다.

그런데 ①은 공비 r인 수열 r^n에 대해서, $-1 < r < 1$ 인 경우,

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0 \quad ....②$$

라는 것에서 유도된다. 또 ②는 고등학교 수준에서 증명 할 수 있으나, 대체로

$$(\tfrac{1}{2})^n,\ (\tfrac{1}{3})^n \text{ 등이 0으로 수렴함}$$

을 기초로 이해된다.[1)]

결국, 제논의 역리를 설명하는 근거는 $(\frac{1}{2})^n$이 0으로 수렴한다는 것에 있으며, 이것은 다시 직관적으로 설명할 수 밖에 없다. 그런데 이를 직관적으로 설명한다는 것은,

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$$

이 계속되면, 그 값이 점점 작아져서 0에 무한히 가까워 진다고 설명하는 것이다. 그런데 바로 이 논법을 제논이 문제 삼는 것이다. 즉, 아무리 작아져도 0이 될 수는 없다는 것이 제논의 역리가 주장하는 것이다. 따라서 제논의 역리를 직관적인 극한의 개념을 바탕으로 하는 무한 급수를 통해 설명하는 것은 말을 마차의 뒤에 달려고 하는 것과 다르지 않다.

그렇다면, 제논의 역리를 어떻게 설명해야 하는가? 그리고 이 제논의 역리가 학교 수학에서 어떻게 사용되어야 하는가? 이를 위해서는 먼저 제논의 역리의 의미를 명확히 이해하고 제논의 역리의 현대 수학적 해석 및 제논의 역리와 관련된 쟁점이 무엇인지를 이해해야 한다. 이하의 이 글에서는 제논의 4가지 역리를 확인하고, 이 제논의 역리의 의도 및 문제의 근원을 살펴본 후 현대 수학에서 제논의 역리는 어떻게 설명되는지를 고찰한다. 이어서 제논의 역리와 둘러싼 쟁점를 살펴본 후 제논의 역리의 교육적 의미를 고찰하도록 한다.

---

1) 이것의 증명은 ③ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이면, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = 0$을 기반으로 한다. 그런데 ③은 고등학교 과정에서 증명하기는 어려우며, 귀납적 직관적으로 설명될 수 밖에 없다.

II. 제논의 역리의 내용과 의도

1. 제논의 역리의 배경과 내용

제논의 역리의 진정한 의미와 목적에 대해서는 여러 이견이 있다. 제논 자신의 저작은 전해 내려오지 않고 있으며, 플라톤, 아리스토텔레스 그리고 중세기의 심플리셔스(Simplicius)의 인용과 비평을 통해 그 내용이 알려져 있다. 플라톤은 제논의 논의를 다루지는 않았지만, 그의 의도에 관해 언급했는데, 그것은 그의 스승인 파르메니데스(Parmenides)의 이론을 지지하기 위한 것으로 '다수성'을 부정하기 위한 것이라고 한다. 아리스토텔레스는 아주 간결한 형태로 제논의 운동에 관한 4가지 논의를 우리에게 전하고 있다. 좀더 명확한 뜻을 알기 위해 브르넷(Burnet)이 쉽게 바꾸어서 쓴 것을 인용하면 다음과 같다(Cajori, 1915, pp.2-3, 재인용).

① 이분법(Dichtommy) : 당신은 무한개의 점을 유한의 시간으로 지나갈 수 없다. : 전체를 다 가기 전에 그것의 반을 가야하고, 나머지 반을 가기 위해서는 또 반을 지나가야 하는 데, 아무리 이 과정을 계속해도 여전히 '반'이 남기 때문이다.
② 아킬레스(Achilles) : 아킬레스는 거북이를 따라 잡을 수 없다. : 거북이가 간 거리 만큼 아킬레스가 갔을 때는 이미 거북이는 앞서 가 있고, 그 만큼을 따라 잡으면 거북이는 또 조금 더 나아가 있는 과정이 무한히 계속되기 때문이다.
③ 화살(Arrow) : 화살은 날아가지 않는다. : 한 순간에 화살은 한 점에 위치하는 데, 그 때 화살은 정지해 있다. 따라서 모든 점에서 정지해 있으므로 화살은 날아갈 수 없다.
④ 운동장(Stade) : A, B, C의 3개의 열이 아래 그림과 같이 있다. A는 왼쪽으로 움직이고, B는 정지해 있으며, C는 오른쪽으로 A와 같은 속력으로 움직인다. B에 대한 A의 속력은 C에 대한 A의 속력의 두 배이다. 따라서 한 순간이 한 점에서 다른 점으로 이행하는 과정(passage)이 될 수 없다.

← A : aaaaaaaa
B : bbbbbbb
C : cccccccc →

2 제논의 역리의 의도에 대한 테널리(Tannery)의 해석

아리스토텔레스나, 심플리셔스는 제논의 주장이 엉터리라고 평하였고, 이후 19세기에 이르기까지 제논의 주장이 틀렸다고 생각되었다. 수세기 동안 많은 수학자와 철학자들이 이 논의의 틀린 곳을 찾으려고 노력하였다. 그러나 그것은 각의 삼분법 등의 고대 그리스의 난제처럼 해결되지 못하였다.

19세기 말 무렵 제논의 역리가 불충분하고 부정확하게 전달되었다는 주장이 등장한다. 즉, 제논의 역리의 진정한 의미는 지식에 회의적인 소피스트에 의해 바뀌게 되고, 그것을 아리스토텔레스가 기록하게 되었다는 것이다. 이러한 주장은 그리스 사상의 해석을 주도했던 테널리 등에 의해 제기되었는데, 이것에 따르면, 제논의 역리는 논리적으로 엄격한 방법으로 수행된 훌륭한 노작이라고 평가된다. 이들은 제논의 역리를 제논의 논의로 부르고 있다.

테널리는 제논의 논의에 내적인 일관성을 주고 있어 주의를 끈다. 그에 의하면 제논은 운동을 부정한 것이 아니라 공간(선)이 점으로 이루어져 있다는 생각 아래에서는 운동이 불가능함을 보여주려 하고 있다는 것이다. 당시 피타고라스 학파는 점을 '위치를 가진 단위'라고 했는데, 이는 수가 단위의 합이 듯이 물체는 점의 합이라는 주장이다. 제논은 이 생각에 반대하여 피타고라스 학파를 비판함으로써 그의 스승 페르메디우스의 학설을 옹호하려 하였다고 한다.[2] 제논은 물체가 점의 모임이라는 생각, 혹은 점을 위치를 가진 단위로 생각하면, 어떤 모순이 생겨나는 지를 보여 주고 있는데, 심플리셔스가 기록한 그 내용을 테널리가 대화식으로 재구성해서 보여 주고 있다. 다음의 대화를 살펴보자(Cajori, 1915, pp.4-6, 재인용).

피타고라스 : 유한한 물체는 계속해서 나누어 가면, '더 이상 나누어질 수 없는 부분'에 도달한다. (물체는 '더 이상 나누어질 수 없는 부분'의 합이다.)

제논 : 물체를 계속해서 반으로 나눌 수 있다는 것은 인정한다고 하자. 그러면 분명히 그 크기는 점점 줄어들 것이고, 그 마지막 부분의 크기는 0이 될 것이다. 그러나 그 각각의 크기가 0 인 '더 이상 나누어지지 않는 것'의 합은 역시 0이다. 따라서 물체의 크기는 없다.

피타고라스 : 왜 '더 이상 나누어질 수 없는 부분'은 크기를 가지면 안 되는가?

제논 : 만약 그것이 크기를 가진다면, 그 부분들은 무한히 많으므로 모두 다 합한 물체는 무한히

---

2) 이 배경에 대해서는 여러 이견이 있다. 헤라클레이토스의 운동과 생성 개념에 반대하였다는 설과 데모크리투스의 원자론에 반대하였다는 설이 있다.

커지게 된다. 이것 또한 모순이다. 따라서 유한한 양은 '더 이상 나누어질 수 없는 부분'의 합이라고 간주될 수 없다.

이상의 대화에서 알 수 있듯이 제논은 단순한 역설가가 아니라 치밀한 논증가로 보아야 한다. 이제, 운동에 관한 제논의 4가지 역리를 테널리가 어떻게 해석하고 있는가를 살펴보자. 점을 위치를 가진 단위로 파악하면 다음과 같은 이중의 모순를 만나게 된다.

제논 : 공간이 이분법을 무한히 시행한 결과로 확인되듯이, '더 이상 나누어질 수 없는 부분'으로 이루어 졌다면, 그것의 개수는 무한함으로, 그것들은 유한한 시간 내에 모두 지나칠 수 없다.

피타고라스 : 아리스토텔레스가 주장했듯이, 그러한 이분법은 실제로 무한히 시행되는 것이 아니라 잠정적으로만 무한한 것이다. 따라서 유한한 시간에 통과할 수 있다.

제논 : '아킬레스'에서는 시간 또한 공간과 마찬가지로 무한히 나누어지고 있지 않은가?

피타고라스 : 그럼, 많이 양보해서 유한의 시간으로 궁극적인(무한의) 조각으로 나눌 수 있다고 하자. 순간의 합이 없는가? 각 순간을 각각의 연속적인 위치에 대응시킬 수 없는가?

제논 : '화살'의 경우를 생각하자. 화살은 각 순간에 한 위치에 있다. 그런데 그 순간에 화살은 정지해 있다. 그러므로 화살은 날고 있는 모든 순간에서 정지해 있는 것이 아닌가?

피타고라스 : 각 순간이 위치가 대응된다는 것은 사실 각 순간이 한 위치에서 다음 위치로 이행하는 과정에 대응된다는 뜻이다.

제논 : 그렇다면, '운동장'의 경우를 생각하자. A에서 다음 점으로의 이행은 한 순간이 필요하다. C에서 다음 순간으로 진행하는 것도 역시 한 순간이 필요하다. 그러므로 C에 대한 A의 속도는 상대적으로 B에 대한 A의 속도의 두 배이다. 그러므로 각 순간을 한 위치에서 다음 위치로 넘어가는 과정에 대응시킬 수 없다. 왜냐하면, 만약 그렇다면 하나가 둘과 같아지기 때문이다.

테널리의 이러한 해석은 제논을 치밀한 논증가로 만든다. 그의 해석을 지지하는 사람도 있으며, 그의 생각이 진정 제논의 생각이었는지에 대해 회의를 품는 사람도 있다. 제논이 진정 어떤 생각을 했는지는 현재 남아 있는 자료로는 정확히 알 수 없다. 그러나 테널리의 이러한 해석은 제논의 논의에 내적 일관성을 주며, 글자 그대로 '제논의 역리'에서 '제논의 논의'라는 관점의 전환으로 이끈다.

III. 제논의 역리의 근본 문제

테널리의 해석에서 주목해야 할 것은 제논의 역리가 발생하게 되는 문제의 근원이다. 즉, 시간, 공간, 운동 등과 같은 직관적인 의미의 연속체는 직관의 단순함에 비해 아주 복잡한 문제를 내포하고 있다. 연속체는 분명 무한히 분할 가능해야 한다. 그러나 그 무한 분할이 어떤 궁극적 실체에 도달한다면, 제논이 보여 주고 있듯이 모순에 빠지게 되고, 그러한 궁극적인 원소가 없이 끝없이 계속 분할되어 간다면, 연속체란 실존적인 것이 아니라 관념적 현상에 불과 한 것이 된다. 따라서 제논의 역리는 무한 분할 가능한 연속체의 존재성에 관한 문제를 포함하고 있다. 이러한 문제는 수학적인 문제와 철학적인 문제를 제기한다.

1 수학적인 문제

수학적 관점에서의 제논의 역리가 가지는 문제는 그 논의의 내용을 떠난 형식과 관련된다. 다시 말해 제논의 역리가 제기하는 수학적인 문제는 시간, 물질, 운동, 공간 등과 같은 물리적 대상이 아니라 그것을 설명하는 형식인 수, 점, 수직선 등과 같은 개념과 그것을 사용하는 형식과 관련되어 있다.[3] 물론 이러한 형식과 내용의 분리는 19세기에 와서야 생겨나는 것으로 이 분리를 통해 제논의 여기는 수학적으로는 완전하게 설명된다.

제논의 역리가 언급하고 있는 상황을 수학적으로 번역하면 수, 수직선, 극한과 관련된 문제가 된다. 여기서는 제논의 역리가 제기하는 수학적 문제를 무한 수열의 완결의 문제와 실직선의 존재의 문제로 나누어 고찰해 보자.

(1) 무한 수열 완결의 문제

이미 서론에서 언급 했듯이 제논의 역리는 무한 수열이 완결될 수 있는가 하는 문제를 제기 한다. 예를 들어보자. n이 무한히 커지면 $\frac{1}{n}$이 0에 도달하는가? 유한의 세계에서는 명백하게, n이 아무리 크다 하더라도 $\frac{1}{n}$은 0이 될 수는 없으며, 또한 n이 커질수록 $\frac{1}{n}$는 점점 0에 가까워진다. 따라서 우리는 '무한히'라는 말에 주목하여 이 문제를 다음의 두 가지 형태로 생각할 가능성이 생긴다. 즉

---

3) 따라서 수학적인 문제는 주로 이분법과 아킬레스와 관련되어 논의된다.

① n이 무한히 커지면 $\frac{1}{n}$은 0에 도달한다.

② n이 무한히 크다 해도 $\frac{1}{n}$은 결코 0이 될 수 없다[4)]

이와 같이 무한 수열이 극한에 도달하는가 혹은 무한 수열이 완결될 수 있는 가 하는 문제가 제논의 역리에서 발견되는 첫 번째 수학적 문제이다.

(2) 실직선의 존재

테널리가 지적한 것과 같이 제논의 역리는 물체 혹은 공간을 점의 모임으로 파악하는 가정에서 생겨난 문제이다. 이미 언급한데로 시간, 공간, 운동 등은 직관적으로 연속체로 파악되며 그러한 연속체를 크기가 없는 점의 모임으로 파악하는 것에서 제논의 역리가 등장한다. 연속체는 수학적으로 실수의 모임 즉, 실직선으로 파악된다. 여기서 수학적인 연속체의 본성에 관한 문제가 제기된다. 이 문제에 관해 홉슨은 다음과 같이 기술하고 있다(Cajori, 1915, p.219, 재인용).

> 연속체는 실수를 모아놓은 것으로서, 연속된 양을 표현해 준다. 이 연속체는 수란 근본적으로 이산적이다 라는 이유에서, 수의 영역에서 연속을 찾고 있다는 비난을 받았다. 이런 반론은 '연속적인 것'이라는 독립된 개념이 존재한다는 가정을 하고, 이것과 실수계를 비교하는 것이다. 실수계가 만들어질 당시 실수계 이외의 현존하는 연속체는 직관에 의한 것밖에 없었다. 그러나 그것은 정확한 수학적인 사고를 담기에는 너무나 부족한 것이어서, 그러한 순수한 직관적인 자료는 정확한 정의와 공리에 의해 수정되어야 했다. 이것에 의해 우리는 이산적인 형태로 주어지면서 동시에 복합된 면을 가진 어떤 종류의 현상에 '단위의 개념'과 시각적인 '연속성'을 부여하게 된다.

다시 말해, 실직선은 크기가 없는, 이산적인 점의 모임인 동시에 크기가 있는 연속적인 것이다. 이와 같는 실직선은 무한 분할이 가능한 존재가 과연 실재로 존재하는 것인가?와 같은 문제를 제기한다.

---

4) 여기서 무한을 해석하는 두 가지 방식을 확인할 수 있다. (1)에서 나타나는 완결된 무한의 개념이 실무한이며, (2)에서 무한은 끝없이 계속 진행되는 무한의 개념을 가무한이라고 할 수 있다.

2. 철학적 문제

제논의 역리가 제기하는 두 가지 종류의 철학적인 문제가 있다. 그 하나는 앞서 언급한 수학적 문제의 해결 과정에서 생겨나는 것이며, 다른 하나는 제논의 역리가 언급하고 있는 현상과 관련된 것이다. 전자에 관해서는 수학적 문제가 어떻게 해명되는 가를 살펴 본 이후에 다룰 것이며, 여기서는 후자을 간략하게 언급하고자 한다.

수학적인 문제가 현상을 다루는 형식과 관련된 문제 였다면, 철학적 문제란 내용과 관년된 문제라 할 수 있다. 즉, 직관적으로 연속적이라고 생각되는 대상인 시간, 공간, 운동, 물질 등이 어떻게 해석되어야 하는가 하는 문제이다. 예를 들어 시간과 공간이 실직선과 같은 연속체인가?[5] 혹은 운동이 실재로 연속적인가?[6] 하는 문제는 현대 과학의 발달을 통해 보다 복잡한 문제를 제기한다. 이러한 문제들은 수학적인 의미에서 제논의 역리가 해명되고 난 이후에도 여전히 문제로 남아 있다고 할 수 있을 것이다.

IV. 현대 수학에서의 제논의 역리: 극한과 연속체의 정의

이 장에서는 제논의 역리가 제기한 수학적인 문제가 어떻게 해명되며 그것이 제논의 역리를 어떻게 설명할 수 있게 되는가를 살펴 본다.

1. 무한 수열 완결 문제

먼저 무한 수열의 완결과 관련된 문제를 고찰해 보자 이미 3-(1)절에서 논의하였듯이, 무한 수열은 '무한히'라는 말을 어떻게 해석하는가에 따라 두 가지 방식으로 설명될 수 있다.

이들을 형식화에서 기술하면 다음과 같다.

---

5) 근대 과학은 절대적인 시간과 공간의 개념을 가졌으며, 이는 칸트에 의해 철학적으로 정당화 되는데 그는 시간과 공간을 직관의 선험적 형식으로 파악하였다. 그러나 비유클리드 기하학과 상대성 이론 등에서 상대적인 시간과 공간의 개념이 등장하여 철학적인 문제를 제기하고 있다. 이러한 두 가지 시간과 공간의 개념을 기초로 제논의 논의가 어떻게 전개될 수 있는가 하는 것은 흥미로운 문제가 될 수 있겠으나 이 논문의 범위를 벗어난다고 하겠다.

6) 운동의 연속성의 문제 또한 현대 과학의 발전으로 새롭게 조명되고 있다. 양자 물리학에서 소위 '불확정성의 원리'에 따르면 전자가 에너지를 발출하면서 괘도를 바꿀 때 이 전자의 운동을 연속적으로 설명할 수 없다고 하며, 이 때의 운동은 불연속적인 것으로 파악된다고 한다.

① 임의의 양의 실수 ε에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여, $n > N$인 모든 자연수 n에 대해 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$을 만족한다.

② 임의의 자연수 n 에 대해서, 적당한 양의 실수 ε 존재하여 $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| > \varepsilon$을 만족한다.

①은 수열 $(\frac{1}{n})$이 향하는 결과(극한 값, 0)를 미리 가정하고, 그 값이 주어진 임의의 오차에 대해, 유한 개의 항을 제외한 나머지 항과 그 결과 사이의 차이가 그 오차 보다 작아진다는 의미를 가진다. 반면에 ②는 수열을 기준으로 각 항에 대응하여 항상 오차가 생김을 보여준다.

전자는 무한 시행의 결과를 미리 가정하고 있으며, 후자는 무한히 시행되는 과정에 기초한다. 이것을 비유적으로 설명하면 전자는 고정된 기준치를 가지고 가깝고 먼 정도를 판별하고 있다면, 후자는 기준치를 수열의 각 항에 따라 변화시키면서 오차를 판별하고 있다. 후자는 마치 한 항씩 수열의 값이 정해질 때마다 보다 더 성능 좋은 돋보기를 이용하여 그 항이 0에 얼마나 떨어져 있는가를 조사하고 있는 것과 같다.

무한 수열에 대해 두 가지 설명 중에서 어느 것이 옳은가? 논리적으로 둘 다 옳다고 보아야 한다.[7] 그러나 극한의 정의는 전자를 따르고 있다. 왜 후자를 이용하지 않는가? 아마도 후자를 이용해서 어떤 개념을 정의할 수 있을 지도 모르지만, 그러한 정의는 쓸모가 없을 것이다. 왜냐하면 그것으로는 어떠한 운동 현상도 설명할 수 없을 것이기 때문이다. 결국 수학에서 극한 개념은 제논의 역리와 같은 일이 일어나지 않도록 정의되었다고 보아야 할 것이다. 결국, 실무한을 받아들이는 것은 논리의 문제가 아니라 타당하고 유용하다는 데 근거하여 선택해야할 공준의 문제이다.

후자와 같은 형식적인 극한의 정의는 보다 근본적인 문제와 연결된다. 극한이 수렴함을 증명하기 위해서는 적당한 N에 대해서, $n > N$인 모든 자연수 n에 대한 a_n의 성질을 고려해야 한다. 그런데 가령 N을 100이라고 가정하면, 100보다 큰 무한히 많은 자연수에 대한 항 하나 하나에 대해 $|a_n - \alpha|$를 계산할 수는 없는 것이다. 만일 무수히 많은 항 하나 하나를 다 계산해서 확인한다면 무한히 많은 시간이 걸릴 것이고 결국 수렴은 사실상 판별할 수 없는 문제가 될 것이다.

바로 여기서 극한 개념은 무한집합을 한꺼번에 규정해 주는 성질을 필요로한다. 요컨데,

---

7) 전자는 무한 시행이 실재로 완결될 수 있다는 실무한의 주장을 함의하고 있으며, 후자는 무한이란 완결될 수 없는 과정일 뿐이라는 가무한의 주장을 함의하고 있다.

$\frac{1}{n}$이 0에 수렴한다는 것을 보이기 위해서는 실수 집합이 만족하는 공리인 아르키메스 공리가 전제되어야 한다. 임의의 양의 실수 ε에 대하여, $N\varepsilon > 1$인 적당한 자연수 N의 존재를 개별적인 N과 ε 하나 하나를 계산해서가 아니라 실수 전체의 집합에서 만족되는 공리로 받아들이는 것이다. 이와 같이 '모든' 원소들에서 만족하는 공리를 기반으로 해서 극한의 완결성 문제가 해결된다. 바로 이것이 집합론의 본질이며 실무한의 수학적 해석이다. 또한 극한의 수렴을 보장해 주는 아리키메데스 공리는 다시 실수의 연속성 문제와 결부된다.

2. 수학적 연속체의 문제

제논의 역리의 두 번째 수학적 문제는 이미 언급한대로 수학적 연속체의 존재와 관련이 되어 있다. 연속체가 고정된 존재의 모임이라고 파악하면 곧 바로 제논의 역리와 마주치게 된다. 그러나 고대로부터 연속체를 그 자체로 존재하는 것으로 파악하려는 시도는 끊임없이 있어 왔고, 그 예로 연속체를 원자의 모임으로 파악하거나 무한소로 파악하려는 노력 등이 있었다. 원자론이나 무한소는 제논의 역리뿐 아니라 다른 여러 가지 문제점으로 인해 역사에서 살아지게 되고, 현대에 이르러서는 칸토어의 집합론에 기반을 둔 실수의 정의를 받아들이고 있다.

칸토어나 데데킨트, 바이어스트라스 등은 실제로 제논의 논의를 다루지 않았지만, 그들의 이론이 제논의 논의가 제기하는 수학적 문제 곧 수학적 연속체의 존재의 문제를 해명한다. 이들의 실수에 관한 이론은 현대 수학의 기초가 되는 것으로 대체로 두 가지 형태의 실수 이론이 있다. 그 하나는 수학적 연속체를 공리적으로 정의하는 것이며, 다른 하나는 실수보다 이론적으로 분명한 유리수를 이용해서 공리적으로 구성하는 방식이다. 전자는 실수의 연속성의 핵심이 되는 아르케메데스 공리나 이와 동치인 공리를 실수의 공리로 받아들이는 것이다. (즉, 아르키메데스 공리를 포함은 일군의 공리를 만족하는 집합이 실수라고 정의한다.) 후자의 한 예로, 유리수로 구성된 무한 수열을 이용해서 실수를 정의하는 방식이 있다. 이 경우는 다시 무한 수열이 완결된 실체인가 하는 문제로 되돌아 가게 된다. 어느 경우에서나 실수계를 완성된 실체로 파악하는 관점을 포함하고 있다. 다시 말해 이는 무한 수열의 완결 문제에서 극한의 정의와 관련해서 언급한 것(실무한 개념)과 같이 제논의 역리가 생겨나지 않도록 실수를 정의하고 있는 셈이다.

이상의 논의를 통해 알 수 있는 것은 제논의 역리가 제기하는 수학적인 문제들은 극한의 정의와 실무한 그리고 아르키메데스 공리에 기초한 실수 개념 등을 통해 해소된다. 그러

나 그것은 제논의 역리를 현대 수학적인 관점에서 바라볼 때 의미를 가질 뿐이다. 다시 말해 현대의 추상 수학은, 원칙적인 의미[8]에서 정의와 공리를 임의적으로 선택하는 것이다. 극한의 정의나, 실무한, 그리고 아리키메데스적 연속체 등은 우리가 어떤 정의나 공리를 받아들이느냐에 하는 문제에서 선택된 것이며, 이들 개념은 제논의 역리가 일어나지 않도록 만들어져 있다.[9] 결국 제논의 역리로부터 지금과 같은 여러 수학적인 개념이 발전하게 되었다고 할 수 있을 것이다.[10] 제논의 역리가 수학적으로 어떻게 해명되는가에 대한 간결한 답변은 케조리의 다음과 같은 언급에서 찾을 수 있다(Cajori, 1915, p.216).

> 문제의 핵심은 논리의 문제가 아니라, 합리적이고 유요한 것이기 때문에 받아들이는 공리의 문제이다. 직관 혹은 상상력에 부합되지 않는 것을 받아들이지 못하는 사람은 칸토어 식의 실무한과 실연속체에 만족하지 못할 것이며 이들에게 제논의 역리는 영원히 수수께끼일 것이다.

V. 제논의 역리에 대한 철학적 문제

지금까지 제논의 역리가 제기하는 수학적 문제를 살펴보았다. 이 문제에 대한 해결은 새로운 문제를 야기한다. 즉, 실무한의 승인 여부가 새로운 문제로 떠오르게 된다. 현대 수학은 일반적으로 실무한 승인하고 있으나, 일부에서는 이를 거부하는 경향이 있다.[11] 그러나 실무한과 관련된 문제는 수학에서 그렇게 주목을 받지 못하고 있다고 보아야 할 것이며, 이들은 수학적 존재를 문제 삼는 수리 철학의 문제로 논의되고 있다. 이와 관련된 논재의 한 예로 보이스-레이몬드(Bois-Reymond)의 다음과 같은 언급을 들 수 있다(Cajori, 1915, p.253,

---

8) 여기서 원칙적이라고 하는 것은 현대 수학을 공리 체계로 바라보는 관점이 현대 수학에 대한 일반적인 시각이라는 점을 표현하고자 한 것이다. 물론 개인적인 견해에 따라 현대 수학을 추상적인 공리 체계가 아닌 다른 관점에서 파악하는 것도 가능할 것이다.

9) 원칙적으로 실무한을 부정하는 견해나 비아르키메데스적 연속체를 기초로 하는 수학이 가능할 것이며, 실제적으로도 그러한 수학이 존재한다. 전자의 예로는 소위 직관주의라고 불리는 학파가 있으며 후자의 예로는 비표준 해석학이 있다. 이들 이론에서 제논의 역리가 어떻게 다루어 지는가 하는 것도 하나의 흥미로운 주제가 될 수 있을 것이다.

10) 이것을 다른 말로 표현하면, 극한이나 실수가 제논의 역리어 같은 일이 일어 나지 않도록 정의 되고 선택되었다는 의미에서, 수학을 통해 제논의 역리를 해명한다는 것은 원인과 결과를 뒤바꾸어 놓는 것이라고 할 수 있을 것이다.

11) 실무한을 거부하는 수학 기초론의 학파로는 직관주의를 들 수 있다. 이들은 직관으로부터 분명한 것(예를 들어 자연수)에서 구성적으로 증명될 수 있는 것만을 받아들이고자 한다. 따라서 인간의 구성적 활동으로 검증 불가능한 완결된 실체로써의 무한을 거부한다.

재인용).

극한 개념(실무한)의 어려움은 그 특성상 수학적인 것이 아니며, 인간 사고의 가장 간단한 부분인 어떤 개념이나 이미지에 근원을 두고 있다. 이상주의자와 경험주의자가 있을 수 있으며, 그들은 엄격한 과학이란 관점에서 둘 다 타당하다. 이상주의자는 상상할 수 있는 것뿐만 아니라 상상할 수 없는 것의 존재를 지지한다. 그는 십진 전개가 끝에 도달한다고 생각한다. 경험주의자는 상상할 수 없는 것은 거부한다. 무한 십진 전개의 극한을 인정할 수 없으며, 수는 원하는 만큼 십진 전개 가능하다는 것만을 받아들인다. 따라서 그들은 칸토어의 연속체를 부정한다.

이제, 제논의 역리가 제기하는 이와 같은 문제와는 다른 관점에서의 문제를 고찰해 보자. 이미 언급한 대로 위의 논의는 제논의 역리를 수학적으로 번역함으로써, 즉 그 형식적 측면에 주목함으로써 생겨난 문제였다면, 이제 논의할 문제는 제논의 역리가 다루는 내용과 관련된 문제이다. 즉, 제논의 역리는 달리기나 화살이 날아가는 것과 같은 현상을 설명하기 위해 동원되는 연속적인 개념들 즉, 시간, 공간, 운동 물체 등과 관련된 문제를 제기한다. 이들 연속적인 개념들이 무한분할 가능한 것인 동시에 어떤 것(위치, 혹은 단위)의 모임이라고 할 수 있는 것인가? 이들이 수학적인 연속체와 같은 것인가? 이미 언급했듯이 시간, 공간, 운동 등의 문제는 현대 과학의 발전과 함께 많은 논란이 있었으며, 여러 철학적인 입장에서 이것을 해명하려는 노력들이 있다. 예를 들어, 에블린(Evellin)은 실무한에 대항하여 공간과 시간을 불연속적인 것으로 설명하였으며(Cajori, 1915, p.257), 베르그송은 일련의 불연속적인 특수한 순간들 속에서 운동의 실재성을 파악 하고자 하는 사고의 결함을 지적했다. 그에 의하면 정지된 점들에 한정된 역학이 우리에게 운동의 연속성을 근본적으로 알게 하는 어떠한 수단도 제공해 주지 못한다. 이러한 인위적인 수학적 수단 대신에 그는 내적인 실재성에 호소한다. 그는, 만일 우리에게 내적 연속성에 대한 직관이 없다면 운동에 대한 실증적인 검토는 결코 우리에게 연속성을 줄 수 없을 것이며, 외부적인 검토가 상세하면 상세할수록 우리는 제논의 역설에 마주칠 것이라고 주장한다(Bachelard, 1951, p.77).

직관적인 연속체와 관련된 철학적인 논의가 어떻게 진행되고 있으며, 그 결과 제논의 역리가 어떻게 해명되고 있는지에 관해서는 보다 전문적인 연구가 필요할 것이다. 그러나 본 연구에서는 제논의 역리가 제기하는 철학적인 문제가 있으며, 철학적인 문제에 대한 완전한 해답은 있을 수 없다는 평범한 이유에서 제논의 역리가 아직도 역리라고 불리는 근거가 있음을 지적하는 정도로 만족하고자 한다. 다만 한가지 언급하고 지나가야 할 것은 제논의 역리는 수학의 발전과 밀접한 관계가 있으며, 이것은 또한 수학, 과학, 그리고 철학적 문제의

분화 과정과도 밀접한 관계 있다는 점이다. 따라서 제논의 역리는 무한, 극한과 관련된 수학의 발전과 그 과정에서 수학과 다른 분야와의 분화 과정을 명확히 이해하지 않고는 설명될 수 없는 문제라고 할 수 있을 것이다.

VI. 요약 및 제언

지금까지 논의를 요약하면 다음과 같다. 먼저 제논의 역리의 내용과 테널리가 제시한 제논의 역리의 의도에 관해서 고찰하였다. 이 과정에서 제논의 역리는 단순한 엉터리 주장이 아니라 논리적이고 일관성이 있는 주장으로, 직관적 연속적이라고 생각되는 시간, 공간, 운동의 개념 등이 위치를 가진 단위로써의 점으로 구성되어 있다는 가정을 하면 운동이 불가능하다는 주장임을 확인할 수 있었다.

이어서 제논의 역리가 제기하는 문제를 수학과 철학적 관점에서 파악하고 그 문제가 어떻게 논의되었는가를 확인하였다. 제논의 역리가 제기하는 수학적 문제는 무한 수열의 극한과 실수계와 관련된 것으로, 현대적인 극한의 정의와 실무한 그리고 실수의 정의 등을 통해 해결되었다. 여기서 중요한 것은 이 개념들의 정의가 수학이 다루는 '내용'과는 무관한 형식적인 것이었으며, 또한 논리적인 이유에서라기보다는 공리의 유용성에 근거하고 있다는 점이다. 즉, 현대 수학에서 점이나 실직선은 공간, 시간, 운동과 같은 개념과 무관하게 논의되고 있다. 또한, 현대 수학은 실무한과 가무한의 두 가지 가능성 중 후자를 받아들이는 정의나 공리를 선택하게 되는 데, 이는 제논의 역리에서의 같은 일이 일어나지 않도록 하기 위한 것으로 보아야 한다.

제논의 역리에 대한 수학적인 문제에 이어, 제논의 역리를 시간, 공간, 운동 등과 같은 경험적 실재와 관련해서 아직도 논쟁의 여지가 남아 있음을 확인할 수 있었다. 실무한의 개념이나 공리의 선택의 문제 등은 순수 수학의 영역을 벗어나 지속적으로 논의되고 있으며, 시간과 운동의 본성에 대한 논의는 철학적인 문제를 안고 있다.

제논의 역리는 이미 서론에서 언급하였듯이 극한의 도입에서 흥미로운 제재가 될 수 있다. 그러나 제논의 역리를 고등학교 수준에서의 극한 이론으로는 설명할 수 없는 것이다. 뿐만 아니라 위의 고찰에서 알 수 있듯이, 현대의 무한 급수 이론은 제논의 역리가 일어나지 않도록 공리가 선택되고 여러 개념들이 정의된 것이므로, 수학으로 제논의 역리를 해결한다고 하는 것은 특별한 의미를 가지는 것으로 일반적인 의미에서의 해결이라고 하기 힘들다고 볼 수 있다.

그렇다면 제논의 역리가 가지는 교육적인 의미는 무엇인가? 이상의 고찰에서 제논의 역리가 가지는 교육적인 가치는 직관적인 극한의 단계에서 엄밀한 극한으로 이행해야 하는 이유를 제기하는 것이나 직관적으로 분명해 보이는 실수를 현대 수학에서와 같이 정의해야 하는 이유를 제기하는 데 있다. 또한 이 과정에서 수학이 다루는 문제가 어떻게 과학적, 철학적 문제로 분화되는 지를 보여주는 것도 제논의 역리가 가지는 교육적 의의일 것이다. 그러나 이와 같은 것들이 고등학교 과정에서 가능한 것인지, 혹은 필요한 것인지는 논의의 여지가 있을 것이다. 만약, 수학을 지도하는 목적이 어떤 명확한 지식을 전달하는 것만이 아니라 수학에 대한 관심과 안목을 길러 주는 것을 포함한다면, 제논의 역리는 열린 문제로 제시될 수 있을 것이다. 또한 이홍우가 말하는 '부정적 수업'의 가치를 생각한다면 제논의 역리가 제기하는 직관적인 극한이나 연속체의 문제는 충분한 교육적 의미가 있을 것으로 생각된다.

제논의 역리와 관련해서 마지막으로 언급해야 할 것은, 제논의 역리를 학교 수업에서 구체적으로 제시하는 문제와는 별개로 학교 수학에서 제논의 역리와 관련이 있는 내용에 대해서 고찰할 필요가 있다는 점이다. 학교 수학에서 제논의 역리와 관련을 맺고 있는 영역은 극한 단원뿐만이 아니라, 제논의 역리는 이미 무한 소수의 등장에서 시작되며, 선과 점등을 다루는 상황은 모두 제논의 역리와 관련이 있다. 또한 실제적 문제 상황을 수학적 모델링으로 해결하는 과정에서 제논의 역리와 관련된 문제를 만나게 될 수 있다. 특히 운동하는 물체를 시간에 따르는 연속함수로 파악하는 경우, 운동은 곡선으로 표현되며, 그 곡선은 각 시점에서의 위치를 표현하게 된다. 물론, 대다수의 학생이 제논의 역리와 같은 문제를 느끼지는 않을 것이다. 그러나 학교 수학은 형식 수학적으로 설명될 수 없으며, 제논의 역리가 문제시 될 수 있는 상황이 얼마든지 있음을 간과해서는 안될 것이다. 따라서 교사는 제논의 역리의 정확한 의미와 의도 그리고 수학적 해명과 남겨진 쟁점에 관한 명확한 이해를 필요로 한다고 하겠다.

참 고 문 헌

금종해, 정순영, 박평순(1998). 수학 I. 한샘출판사.

Whitehead, A. N.(1926). *Science and the mordern world.* 오영환(역)(1991). 과학과 근대 사회. 서광사.

Fiedlein, C.(1980). *Geschichte der philophie.* 강영계(역)(1985). 서양철학사. 서광

사.

Cajori, F.(1915). The history of Zeno's arguments on motion. *American Mathematical Monthly*, 24.

Bachelard, G.(1951). *L'activite rationaliste de la physique contempoaraine.* 정계섭(역)(1998). 현대 물리학의 합리주의적 활동. 민음사.

Weyl, H.(1926). *Philosophie der mathematics und naturWissenschaft.* 김상문(역)(1990). 수리철학과 과학철학. 민음사.

Hirschberger, J.(1965). *Geschichte der philophie.* 강성위(역)(1996),서양철학사. 이문출판사.

Guillen, M.(1983). *Bridges to infinity.* 박영훈(역)(1998). 인간적인 너무나 인간적인 수학. 경문사.

Davis, P. J.,&Hersh, R.(1983). *The mathematical experience.* 양영오, 허민(역)(1995),수학적 경험. 경문사

Courant, R., &Robbins, R.(1960). *What is mathematics*? Oxfort University Press.

Rucker, R.(1982). *Infinity and the mind.* Bantam Books.