

Mathview를 도구로한 고등학교 함수 단원 구성¹⁾

류 희 찬 (한국교원대)

지 현 희 (경북부개여고)

조 민 식 (한국교원대)

I. 서론

1970, 80년대에 보급되기 시작한 CAI 학습 자료는 내용 구성의 단조로움과 일방향적인 인터페이스 환경으로 교육현장에서 외면되어 왔으며, 미래 정보화 사회를 지향하는 교육 발전 방안에서 항상 지적되어온 문제점인 교육방법의 획일화의 문제를 해결하는 데 큰 도움을 주지는 못하였다. 그러나, 1990년대에 들어서 컴퓨터 기술의 급격한 발달로 기억용량이 증가되고, 실행속도가 신속하며, 다양한 매체를 통합 지원하는 멀티미디어 환경이 가능해지고 학교 수학에 보다 효율적으로 활용 가능한 '탐구형' 소프트웨어들이 계속적으로 개발 소개됨으로써 학교 수학에 컴퓨터가 효율적으로 도입될 수 있는 계기가 마련되고 있다. 이들 탐구형 소프트웨어들은 그래픽, 애니메이션, 시뮬레이션, 오류수정, 역동성 등에 있어서 종래의 CAI를 포함한 다른 어떤 교육매체도 갖지 못하는 독특한 교수·학습 기능을 가지고 있음으로 해서 학생들로 하여금 여러 가지 수학적 개념을 보다 잘 이해 할 수 있고, 다양한 현상을 탐구할 수 있는 수학 실험실적인 환경을 제공해 준다.

현재 함수에 사용되는 탐구형 소프트웨어는 Mathview, Mathematica, Maple, Mathematix, Function Investigator, Green Globbs 등을 들 수 있다. 이 중에서 Mathematica와 Maple은 그 기능이 너무 풍부하여 중·고등학교 학생들은 극히 일부분만의 기능을 사용한다는 점에서 다소 낭비적인 측면이 있고, 구입비도 비싸며, 그 기능을 익히기에도 쉽지

1) 본고는 한국학술진흥재단이 지원하는 1998년도 대학부설연구소 지원 연구 과제인 「창의성 신장을 위한 컴퓨터 통합 수학교육과정 개발에 관한 연구」의 2년차 보고서(미간행)의 일부의 일부를 간추린 것이다.

않으며, Mathmatix는 국내에 소개는 되어 있으나(박한식, 1997; 문해순, 1998) 구하기가 용이하지 않다. Function Investigator는 함수를 실생활과 연결시킬 수 있는 시뮬레이션 효과가 뛰어나며, Green Globes는 수학교육에 활용될 수 있는 보기 드문 게임형 소프트웨어라는 특징을 지니고 있지만, 문자 조작 활동을 포함한 대수 전 영역을 다룰 수 있는 ‘컴퓨터 대수 체계(computer algebra system : CAS)’ 라고 보기는 힘들다. 이에 비해, Mathview는 대수, 해석학, 해석 기6하에서 활용 가능한 전형적인 CAS로, 뛰어난 그래픽과 애니메이션 효과, 문자 변환 기능을 이용하여 함수식과 그래픽과 관련된 수학적 개념을 보다 구체적으로 인식시킬 수 있으며, 팔레트(palette)와 메뉴 방식을 사용하기 때문에 교사와 학생이 쉽게 수학 기호를 입력하고 조작할 수 있다.

함수 지도와 관련하여, Mathview는 함수 수업을 보다 설득력 있게 강화시킬 수 있다. 그래프와 함수식을 쉽게 조작할 수 있으므로 해서 지필 방법으로는 힘들었던 함수에 대한 직관력을 기를 수 있으며, 방정식의 근을 수치 해석적으로 근사하게 구할 수 있게 하며, 함수와 방정식의 연계를 더욱 강화시킬 수 있다. 따라서, 함수 교육의 개선 방향 즉, 그래프를 통한 함수의 시각적 측면을 보다 강조하며 함수와 관련된 내용은 가능한 한 그래프와 결부시켜서 생각하도록 지도함으로써 함수적 감각을 발달시켜야 한다는 함수 교육의 최근 방향과도 밀접히 관련된다(우정호, 1998).

그래프를 통한 함수 학습은 지필 환경에서는 도구와 시간의 제약으로 한계가 있으며, 이런 제약을 극복하기 위한 탐구형 소프트웨어의 탐구 기능에 관심이 고조되고 있다. 이러한 맥락에서, 컴퓨터를 활용한 함수 교육이 학업성취도를 높이고 학습 동기 유발에 도움이 되며 컴퓨터 활용 인식 능력을 향상시킨다는 연구 논문들이 제시되고 있다(박래홍, 1997; 안윤상, 1997; 곽정원, 1996; 이대현, 1995; 용환섭, 1994; 신순애, 1994; 장경윤, 1998; 노지화, 1996; 안미선, 1995; 황미정, 1996; Poson, 1988). 그러나, 탐구형 소프트웨어라는 새로운 도구를 활용하였을 때 교육과정 상에 어떤 변화가 초래될 수 있는가에 대한 연구는 아직 미약한 실정이다. 따라서, 본 연구에서는 Mathview를 도구로 새로운 함수 단원의 지도 계열을 고찰하고 그 계열 속에서 학습내용을 선정하여 학습프로그램 자료를 개발하고자 한다.

II. Mathview의 특성과 활용방안

1. Mathview의 기능적 특성

Mathview는 기호연산 조작 프로그램(symbolic manipulation program)으로 직관적 인터페이스 구성과 'click and solve'방식으로 작동되어 조작이 쉽고 수식 입력과 연산을 손쉽게 사용할 수 있다. 재조작 실행으로 실시간에 연산 결과와 그래프를 연동시켜 변화를 관찰할 수 있고, plug-in을 제공받아 web browser에서 학습할 수 있는 장점을 가지고 있다. 하나의 notebook안에 계산 명령과 텍스트를 함께 저장하여 수업안을 작성하여 단계별로 재현할 수 있으며, 학습자의 의도대로 자유롭게 실험과 탐구가 가능한 소프트웨어이다(박용범, 김한희, 박일영, 1999)

Mathview의 기능적 특성을 간추리면 다음과 같다.

- ① 자유로운 한글 입출력, 복잡한 수식 기호를 마우스 클릭으로 누구나 쉽게 입력할 수 있는 수학용 워드프로세서이다.
- ② 교사가 제시한 문제나 변수를 학생들이 임의로 재편집 할 수 있다.
- ③ 뛰어난 그래픽, 애니메이션 환경으로 인해 역동적으로 수업을 진행할 수 있다.
- ④ World Wide Web 상에서 수식과 그래프를 구현할 수 있을 뿐 아니라 집에서 개별 컴퓨터를 통해 off-line상태에서도 일부 기능이 사용 가능하여 개별학습, 반복학습이 가능하다.
- ⑤ 작성된 자료를 파일로 저장가능하며 필요시 불러내어 사용하거나 교사나 학생의 의도대로 재편집이 가능하다.

2. Mathview의 활용 방안

함수교육에 있어서 중요한 목표 중 하나는 그래프를 해석하는 법과 그래프에 포함된 정보들로부터 함수의 성질을 인식하는 방법을 익히는 것이다. 임의의 함수를 표와 그래프로 나타내는 것은 대단히 중요한 내용이지만 실제 표를 작성하고 그래프를 그리는 것은 상당한 시간과 노력이 필요하다. 그러나, 그 시간과 노력은 그래프의 특징을 파악하는데 있다기 보다는 x 에 대응하는 함수 값에 대한 계산과 그것을 정확하게 모눈종이 등에 옮기는데 소요되는 것이다. 더구나 지필 환경에서는 예를 들 수 있는 함수도 일차, 이차 함수 정도의 단순한 것일 수밖에 없다. Mathview를 이용해 x 의 값이 변함에 따라 y 의 값이 결정되고 그것이 어떻게 변하는지 관찰하도록 하면, 이는 실제 계산에 소요되는 시간을 절약할 수도 있다. Mathview의 그래픽 기능은 대학교 이상의 고등 수학에서의 함수를 표현할 수 있을 만큼 강력하여 고등학교에서 다루지는 모든 함수 학습에 유용하게 이용할 수 있다.

Mathview를 이용했을 때의 수학 교수 학습 과정상의 이점을 정리하면 다음과 같다.

① 함수의 기본적인 개념을 이해하기 위하여 단순히 반복되는 그래프를 필요로 하는 경우에 Mathview의 그래픽 기능을 이용함으로써 수업시간에 학생들이 보다 잘 집중하게 만들고 또 학습자들의 흥미를 유발시킬 수 있으며, 칠판에서 표현할 수 있는 한계를 넘어선 정확한 그래프를 그릴 수 있다.

② 수학의 기본적인 개념을 이해하기 위하여, 단순히 반복되는 계산을 필요로 하는 경우에 계산기의 역할을 가지고 있는 Mathview를 이용함으로써, 학생들의 관심이 분산되지 않고 수업시간을 효율적으로 쓸 수 있다.

③ 수학의 중요한 개념을 이해하기 위하여 단순히 반복적인 풀이과정이 필요로 하는 경우에 중간 과정을 신속하게 처리하는 Mathview의 대수적 기능을 이용함으로써 학습자들이 시간을 효율적으로 사용할 수 있다. 그리고, 학생들이 계산과정이 끝난 후 즉시 답을 비교·검증하기에도 편리하다.

④ 여러 가지 그래프를 빠른 시간 내에 그릴 수 있기 때문에 어떤 류(class)에 속하는 함수의 성질을 알기 위해서 학생들은 그래프를 통해서 이를 탐구하고 발견할 수 있다.

⑤ Mathview의 계산 기능을 이용하여 복잡한 방정식이 사용되어야하는 실용적인 문제를 다룰 수 있다.

3. Mathview 활용시 유의 사항

Mathview와 같은 소프트웨어를 이용한 수학 수업은 교사의 역할을 더욱 증대시킨다. 컴퓨터는 어디까지나 기계에 불과하므로 교사가 이 프로그램의 기능을 충분히 이해하고 학습 자료를 미리 개발하여 학습 상황을 예측하고 대비하여 실제 수업에서 적절한 통제를 부여하여야만 효과적인 수업을 진행할 수 있을 것이다. 그러나, 너무 지나치게 교사 주도로 수업을 진행해도 또 다른 형태의 설명식 수업에 지나지 않을 것이다.

Mathview를 이용시 주의사항을 구체적으로 정리하면 다음과 같다.

① 컴퓨터와 Mathview의 기능에 대한 숙달이 먼저 이뤄져야 한다. 비교적 사용법이 쉬운 소프트웨어이지만, 기능을 충분히 숙달하여야 예기치 못한 상황에 대처할 수 있다.

② 학생들이 지나치게 Mathview에 의존하지 않도록 세심하게 지도한다. 컴퓨터를 이용하더라도 기본 계산 능력의 중요함을 인식시키고 답을 알기 전 결과를 예측하도록 하는 정신적 습관을 길러줄 필요가 있다. Mathview는 수학적 개념 형성을 도와주는 보조 도구로서 사용해야 할 것이며 학생들이 효과적인 학습을 할 수 있도록 적절한 문제 상황 및 과제

를 제시하여야 한다.

③ 주제별로 학습 보조 자료를 준비하여 활용할 수 있게 하며, 여러 교사들과 협의를 통해 자료를 공유·발전시킬 수 있도록 하여야 한다.

④ 학생들이 자발적으로 활동하도록 격려할 필요가 있다. 수학의 지식이나 기능의 전수에 치중했던 지금까지의 교수방법에 익숙해져 있는 학생의 대부분은 교사의 지시에 따라 행동하는 일은 잘하는 반면, 문제를 스스로 찾아보거나, 해결 방안을 스스로 탐구하거나, 보다 나은 해결방법을 스스로 알아보거나, 해결한 문제를 바탕으로 새로운 문제를 탐색해보는 능력과 태도는 형성되어 있지 않다. 학생들은 Mathview와 같은 소프트웨어를 이용하여 수학 수업에서 자발적으로 다양한 수학적 개념을 학습할 수 있도록 하여야 한다.

⑤ 학생들이 직접 그래프를 그리는 것을 경시하거나 기본적인 그래프를 그려봄으로써 그 함수를 이해할 수 있다는 사실을 간과해서는 안될 것이다. Mathview의 기능을 수업시간에 도입할 때는 충분히 그래프 개념을 갖춘 단계에서 쓸 수 있도록 하여야 할 것이다.

⑥ 항상 컴퓨터의 이용이 지필 환경보다 우수하다고는 할 수 없으므로, 지필 환경에서도 충분히 학습 가능한 내용들은 굳이 컴퓨터 화면으로 구성하려고 하지 않아야 한다.

III. Mathview를 도구로 한 함수단위 개발방안 모색

Mathview를 도구로 한 함수 단위 지도 계열 개발과 학습 프로그램 자료 개발을 위해 현행 교육과정상의 함수 영역을 분석하고 국내의 교과서의 내용전개 절차를 분석한 후 함수 단위 구성 및 학습프로그램 자료 개발 방향을 설정하였다.

1. 고등학교 함수 단위의 계열 분석

제 7차 교육과정은 제 6차 교육과정의 방대한 학습량을 고려하여 고등학교 1학년 과정에 서 지수·로그함수 부분을 고2로 이동시켰음이 특징적이며, 전반적으로 난이도가 높다고 여겨지는 학습내용을 삭제하거나 학년 이동시키고 있다. (<표 1> 참조).

국내 6, 7차 교육과정, 일본, 미국, 영국, 러시아, 뉴질랜드의 교육과정을 <표 2>와 같이 제시하였다. 또한, 연계성을 살펴보기 위해 중학교 교육과정에서부터 비교 제시하였다. <표 2>에서 살펴보면 우리 나라와 일본은 학습내용과 지도계열이 유사함을 알 수 있다. 반면에 미국·영국·뉴질랜드에서는 실생활과 연계한 학습내용 위주로 컴퓨터와 계산기의 사용을

적극 권장하고 있다. 또한, 함수족의 일반 연산이나, 구간별로 정의된 함수, 재귀적으로 정의된 함수, log-log, semi-log 함수 등을 실생활과 연관시켜 강조하고 있다. 이러한 학습내용의 도입은 컴퓨터나 계산기의 사용을 허용하기 때문에 가능하다고 본다. 따라서, 소프트웨어를 활용한 함수 단원을 구성할 때 이러한 학습 내용이 시사하는 바가 크다고 본다.

<표 1> 제 6 차 교육과정과 제 7 차 교육과정의 계열 비교

학습내용	계열의 변화
지수함수, 로그함수	제 6 차 교육과정에서 고등학교 1 학년 ⇒ 제 7 차 교육과정에서 고 2로 이동
함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법	제 6 차 교육과정<수학 I> ⇒ 제 7 차 교육과정<수학 II>로 이동
삼각함수와 복소수, 함수의 극한, 미분법, 적분법	제 6 차 교육과정<수학 II> ⇒ 제 7 차 교육과정<미분과 적분>으로 분리, 복소수의 극형식을 삭제

2. 국내외 교과서의 내용 전개 분석

학습프로그램 자료 개발 방향을 설정하고 구성체계를 설계하기 위한 이론적 자료를 갖기 위해 국내 교과서 5개 출판사와 외국 교과서의 함수 단위 내용 전개절차를 분석하였다. 국내 모든 교과서가 대단원·중단원·소단원으로 구성되어 있는데, 소단원에서 실제적인 학습내용이 전개된다. 또한, 중단원별로 연습문제, 단원의 배경, 학습목표, 기본문제, 심화문제가 제시되고 있다. 구체적으로 국내 교과서 5개 출판사의 함수 단위 내용전개 절차를 제시하면 다음 <표 3>과 같다.

각 교과서의 함수 단원은 첫 페이지에 걸쳐 관련 단원의 간략한 수학사를 싣고 있고 새로운 학습내용이 시작될 때에는 학습을 유발하는 물음을 두고 있다. 본문에서는 각 단원을 공부하기 위한 기초학습으로서 준비학습이 전제되어있다. 학습요소 설명을 위한 예제와 문제들이 있으며 단원의 끝에는 단원의 복습을 위한 연습문제, 기본문제, 심화문제가 있고 심화자료로 연구학습이 제시되기도 한다. 따라서, 학습프로그램 자료 개발에서도 단원명과 학습목표를 먼저 제시하고 학습내용을 소개하는 것이 효과적임을 알 수 있다. 또한, 학생들의 개별능력에 따른 심화학습의 과정이 필요하고 효과적일 수 있음을 알 수 있다.

<표 2> 국내외 교육과정 함수 단위 계열 비교

구분	중학교	고등학교
제7차 교육과정	<ul style="list-style-type: none"> •7학년: 함수와 그래프, 함수의 활용 •8학년: 일차함수와 그래프, 일차함수와 일차방정식의 관계, 일차함수의 활용 •9학년: 이차함수와 그래프 	<ul style="list-style-type: none"> •10학년: 함수, 이차함수의 활용, 유리함수와 무리함수, 삼각함수와 그래프, 삼각형에 응용 •수학 I: 수열의 극한, 지수함수, 로그함수 •수학 II: 함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법 •미분과 적분: 삼각함수, 함수의 극한, 미분법, 적분법
제6차 교육과정	대응, 함수, 그래프	<ul style="list-style-type: none"> •공통수학: 함수, 유리함수와 무리함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수 •수학 I: 수열의 극한, 함수의 극한과 연속성, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법, •수학 II: 삼각함수와 복소수, 함수의 극한, 미분법, 적분법
일본	변화와 대응, 좌표, 그래프, 비례, 반비례	<ul style="list-style-type: none"> •수학 II: 지수함수, 삼각함수, 함수값의 변화, 미분계수, 도함수의 변화, 적분 •수학 III: 함수의 극한, 미분법, 적분법
미국	패턴 익히기, 계산기 도입, 지수패턴, 성장패턴, 그래프, 일차함수, 산술 수열, 기하 수열, 극한의 기초절대값 함수, 지수함수, 역함수, 삼각함수	<ul style="list-style-type: none"> •9~12학년: 방정식·부등식과 표와 그래프, 실세계 현상을 함수로 표현 함수족의 일반적 특성과 함수족 위에서의 연산, 정비례, 반비례, 일반다항식, 지수·로그함수, 다항함수, 유리함수, 초월함수, 구간별로 정의된 함수, 재귀적으로 정의된 함수, 비선형 함수, log-log, semi-log변환, 그래프의 덧셈과 합성, 역함수 •Alabama주 고급수학: 복소수, 원형함수의 이해(복소수와 극좌표), 수열, 급수, 극한, 미적분의 기본 개념
영국	일차함수, 함수, 그래프	6개의 삼각함수, 함수(유리함수, 로그함수, 지수함수, 삼각함수 등), 미분과 응용, 적분의 공식, 정적분, 넓이, 회전체의 부피
러시아	함수, 일차함수, 이차함수, 삼각함수, 함수그래프의 변환	(대수와 기초해석) <ul style="list-style-type: none"> •10학년: 삼각함수, 삼각방정식, 도함수, 미분의 응용 •11학년: 적분과 응용, 유리수 지수의 거듭제곱, 지수함수와 로그함수
뉴질랜드	<ul style="list-style-type: none"> •3~5 수준: 자료를 그래프로 나타내기, 구간별 그래프 그리기, 상황 그래프 그리기, 일차 그래프와 기울기, 이차 그래프, 다양한 패턴 그래프 그리기, 그래프 해석하기, 기울기 해석, 실제적 상황의 그래프 그리고 해석하기 	<ul style="list-style-type: none"> •6수준: 일차, 2차 그래프, 지수함수, 삼각함수, 직각쌍곡선, $x^2 + y^2 = r^2$, $xy = c$ 꼴 관계 탐구, 그래픽계산기와 컴퓨터 사용하여 그래프 성질 탐색(극대, 극소, 기울기, 극점, 대칭성, 주기성, 비연속성, 증감 등) •7수준: 방정식, 부등식의 근과 그래프 관계탐구(최대, 최소값, 변곡점, 점근선, 불연속성 등) 스프레드시트, 그래픽계산기와 컴퓨터사용, 1차, 2차, 3차 다항식, 원, 직각쌍곡선, $y = a^x$ 식 지수함수, $y = \log_a x$ 식의 로그함수, $y = \sin(bx + c)$, $y = \tan x$ 식의 삼각함수의 그래프 유형과 방정식 사이 관계탐구(대칭성, 주기성, 극대, 극소, 극한값, 불연속성, 점근선 등 곡선 족 통해 탐구) •8수준: 복소수 계산과 극좌표에 그래프 표현, $y = x^a$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 구간별 함수탐구하고 그래프 그리기, log-log, semi-log모델링 해석, 분석하기, 역함수, 역수함수의 그래프, $y = \tan^{-1}x$

<표 3> 국내 교과서의 내용 전개 절차

분류	A	B	C	D	E
대단원 목표	×	◎	◎	×	×
단원 배경	◎	◎	◎	◎	◎
중단원명	◎	◎	◎	◎	◎
중단원 목표	×	◎	×	×	×
소단원명	◎	◎	◎	◎	◎
소단원 목표	◎	◎	◎	◎	◎
물음	◎	◎	×	◎	◎
내용 설명	◎	◎	◎	◎	◎
참고(주의)	◎	◎	◎	×	◎
보기	◎	◎	◎	◎	◎
문제	◎	◎	◎	◎	◎
예제	◎	◎	◎	◎	◎
연습문제	◎	◎	◎	◎	◎
학습 길잡이	×	×	◎	◎	×
단원 정리	◎	◎	◎	◎	◎
단원 문제	◎	◎	◎	◎	×
심화	◎	◎	◎	◎	◎
읽을 거리	×	◎	◎	◎	×

외국 교과서 중에서 특히 소프트웨어를 활용한 교과서의 내용전개 절차를 살펴보면, 실생활에서 얻어지는 복잡한 값들을 갖는 문제나 지필 방식으로는 풀기 어려운 문제들도 제시하여, 학생들이 직접 탐구하여 나갈 수 있도록 단계별로 발문을 하고 그래픽 계산기나 컴퓨터를 활용할 수 있도록 구성되어 있다. 미국과 일본의 전형적인 두 교과서인 수학B(藤田宏외, 1995)와 Algebra I(William Collins 외, 1998)의 구체적으로 내용전개 절차를 살펴보면 다음 <표 4>와 같다.

<표 4> 일본과 미국 교과서의 내용 전개 절차

일본	단원에 관한 읽을 거리→ 물음→ 예제→주의나 참고→문제→학습요소 정리→연습문제→발전·전망
미국	본시 학습목표→ 본 학습요소의 중요성이나 필요성→ 실생활 속의 물음→예제→ 모델링(구체적인 조작활동제시)→탐구(테크놀러지의 활용법과 예문도 제시)→ 이해→ 연습문제→적용·문제해결→ 수학잡지나 올림피아드 출제 문제 등 본 학습요소와 관련된 문제 제시

일본 교과서 수학B(藤田宏외, 1995)를 살펴보면 국내 교과서와 유사하게 각 학습 요소를 <표 4>처럼 전개하고 있다. 특이한 점은 제 4장이 BASIC 프로그램의 사용법과 적용·연습 예제만으로 위 전개 절차에 맞춰서 구성되어 있다는 점이다. 미국 교과서 Algebra I

(William Collins 외, 1998)에서는 각 차시마다 그래픽계산기나 컴퓨터 소프트웨어의 활용법을 소개하고 있다. <표 4>의 '모델링'이나 '탐구'과정에서 BASIC 프로그램의 활용방법, 연습 문제를 제시하고 각 소단원의 끝에 나오는 '연습 문제'에도 이러한 테크놀러지를 이용하여 해결할 수 있는 문제를 따로 소개하고 있다. 제시되는 문제들은 대부분 실생활 문제이며 컴퓨터 활용과 자연스럽게 연결되고 있다.

특히, 미국 교과서는 국내교과서에 비해, 학습 요소 설명 후 문제 제시가 이뤄지기보다는 물음 제시를 통해 학습 요소를 발견하는 절차를 따르고 있으며, 테크놀러지 활용이 강조된다는 것이다. 따라서, Mathview를 활용한 학습프로그램 자료 구성 시에도 활동을 통한 탐구 과정 속에서 학습 요소를 발견하도록 하고 심화 과정을 통해 수학 학습의 흥미를 증진시키는 방안이 요구된다. 또한, 일본 교과서처럼 테크놀러지의 사용법을 뒤에 따로 제시하는 것이 컴퓨터나 계산기의 활용을 적극 권장하는데 효과적이라 본다.

3. 함수 단원 구성 및 학습 프로그램 자료 개발 방향 설정

(1) 함수 단원 구성 방향 설정

본 연구에서는 다음과 같은 것에 목적을 두고 함수 단원을 구성하였다.

① 지식을 자주적으로 구성하는 자기 주도적 학습을 가능하게 한다. Mathview의 여러 가지 기능을 이용해 학생들이 직접 컴퓨터를 조작해봄으로써 직관적이고 창의적인 방법으로 문제를 해결하는 탐구 활동에 초점을 둔다.

② 기본 개념을 컴퓨터와 구체적인 활동을 통해 학습할 수 있게 한다. 함수의 그래프는 중등 수학의 함수 학습에서 중요한 부분을 차지하나, 현행 교육과정에서는 주로 해석학적 풀이를 통해 그래프를 관찰하고 있다. 이러한 그래프를 컴퓨터를 조작하거나 직접 그려봄으로써 계산을 통한 기존의 문제 풀이 방법과 비교할 수 있다.

③ 재귀적, 귀납적 사고 경험의 기회를 제공한다. Mathview를 이용하여 다양한 함수의 유형을 제시하고, 재귀적 형식의 일반화에 앞서 분석적으로 관찰, 사고할 수 있는 기회를 제공한다. 귀납적 추론의 가치를 인정하는 것을 중시하여 학생 활동을 통하여 귀납적으로 발견한 수학적 사실들을 논리적 증명과정 없이도 가치를 인정하게 한다. 재귀나 반복 등 컴퓨터의 도입으로 새롭게 중요성이 인식된 개념들에 대해서도 수학적 가치를 인식시킨다.

④ 수학 학습에 긍정적인 태도를 기른다. 컴퓨터를 통한 구체적 조작 활동을 통해 수학 학습에 흥미와 호기심을 증진시키며, 함수에 관한 문제 해결의 다양한 측면을 알게 한다.

또한 학생 스스로 Mathview를 이용해 문제를 풀어 가는 동안 여러 가지 반응(문제 풀이 전략 결과가 예상과 다를 때의 해결 등)을 불러일으킨다.

⑤ Mathview를 교수-학습에 적극적으로 활용한다. Mathview가 교수-학습에서 접목될 수 있는 구체적인 주제 및 내용을 제시한다.

(2) 함수 단위 목표 설정

함수 단원의 내용 제시와 학습 프로그램 개발이 가능할 수 있도록 고등학교 1학년 함수 단위 목표와 단위 성취 목표를 제시하였다.

가. 개발 단위 목표

- 수학과 실생활 사이의 관계를 깨닫고 이로부터 일반화할 수 있다.
- 추상적으로 사고하는 능력을 발달시키고 기호, 개념, 그래프, 도표를 수학적 관계, 개념, 일반화를 의사소통하고 표현하기 위해 사용하는 능력을 개발한다.

나. 개발 단위 성취 목표

① 함수

- 선형과 비선형, 다른 함수적 관계를 실제적 문맥 속에서 발견하여 그래프를 그리고 해석하기
- 함수와 관계라는 수학적 구성물을 사용하고 기호적인 언어를 사용해 다양한 상황에 대해 추론하고 기술하기
- 함수들에 대한 합성, 역변환, 함수들간의 연산을 통해 이미 익숙한 함수들로부터 만들어진 새로운 함수를 그래프 표현, 대응표에 의한 표현, 공식에 의한 표현으로 나타내고 추론하기
- 역함수, 역수 함수의 그래프를 그리고 원함수와의 관계를 추론하기

② 다양한 함수의 그래프

- 실제적 상황에서 다양한 함수적 관계를 발견하고 그래프와 그래프를 그리는 규칙을 발견하고 정당화하기
- 주어진 수식으로부터 그래프를 정확히 그리기 위해 계산기나 컴퓨터를 사용하기
- 일차함수, 이차함수, 다항함수, 유리함수, 지수함수, 로그함수, 삼각함수, 구간별로 정의된 함수 등을 이용해 광범위한 현상을 모델링하고 함수의 국소적인 특징과 전반적인 특징

을 기술하기

- 모델링하려는 상황에 관한 질문에 답하면서 구두표현, 수치적 표현, 기호에 의한 표현, 시각적 표현들의 장·단점을 검토하기

- 다양한 함수에 대한 구두표현, 기호에 의한 표현, 수치적 표현, 그래프에 의한 표현에 익숙해지기

③ 함수 그래프의 변형

- 수학적 모델링 과정에서 함수의 변형을 이용하기
- 변형된 그래프를 기존의 그래프와 비교하여 그래프의 중요한 성질들, 예를 들면, 최대, 최소, 기울기, 대칭성, 주기성, 증가와 감소 등을 설명하고 해석하기

④ 함수 그래프의 응용

- 그래프 유형과 함수 식, 방정식, 부등식, 연립방정식 등 여러 가지 표현의 관계를 이용하여 문제 상황을 해결하기

- 실제적 상황의 자료를 탐색하여 상황을 설명하는 그래프를 그리고 해석하기

- 함수, 관계, 수식간의 동치성을 인식하고 함수의 다양한 표현들 사이를 유연하게 변화시키기

- 그래프끼리의 교점, 함수의 점근선 등을 추정하고 찾고 그러한 결과를 주어진 문맥에서 해석하기

- 실제 자료에 대한 적당한 모델을 선택하고 log-log, semi-log 결과를 해석, 분석하기

- 그래프가 간단한 경우에는 지필로 그리고 보다 복잡한 경우는 컴퓨터를 이용해 조작하며 얻은 결과가 옳은지 의미 있게 해석하기

(3) 학습 프로그램 자료 개발 방향 설정

Mathview를 도구로 한 함수 단원의 학습 프로그램 자료 개발을 위해 현행 국내의 교과서의 내용 전개 절차를 분석한 후 학습 프로그램 자료 개발 방향을 설정하였다. Mathview를 도구로 한 고등학교 1학년 함수 단원의 학습 프로그램 개발 방향은 다음과 같다.

① 기존 교과서를 참고로 개발자가 새로운 체계로 구성한다.

② 산술적이고 계산적이 방식보다는 시각적이고 직관적인 방식을 유도한다.

③ 학생들의 적극적인 사고 활동과 능동적인 학습태도를 유도하기 위해 기본적으로 발견 학습 관점에서 출발하지만, 보다 효율적으로 본래의 학습 목표에 도달시키기 위해 교사의 적절한 조언을 첨가한다.

- ④ 학습자 중심의 활동을 강조한다. 그래픽이나 애니메이션이 학생의 판단에 의해 작동되어지고 학생들간의 상호작용이 이뤄지게 한다. 학생의 사전 경험이나 직관을 중시하여 함수의 개념이나 원리를 구체적에서 추상적으로 심화시킨다.
- ⑤ 학생의 구성적인 사고 활동이 원활해지게 도전할만한 적당한 수준의 문제를 부여하고 적절한 발문과 피이드백을 통한 다양한 발견술 습득, 수학적 개념 형성이 자연스럽게 이뤄지게 한다. 또한, 오류 수정을 통한 개선이 일어날 수 있는 반례와 예시를 제시한다.
- ⑥ 학생들의 인지 수준에 적합한 Mathview의 기능과 사용법을 소개하고 활용한다.
- ⑦ 수업 방법을 다양화한다. 토론, 프로젝트 수업, 탐구 활동, 소집단 활동, 능력별 이동 수업 등 다양한 수업 활동에서도 활용 가능하게 구성한다. 심화과정의 문제도 첨가한다.
- ⑧ 교사가 실연하는 행동과 학생이 Mathview를 활용해야 하는 활동을 적절하게 구분하여 제시한다.

(4) 학습 프로그램 자료 구성 체계 설계

Mathview를 도구로 한 함수 단원의 학습 프로그램 구성 체계를 현행 고등학교 1학년 교과서와 소프트웨어를 활용하고 있는 외국 교과서의 내용 전개 절차를 고려하여 전문가의 조언을 받아 설계하였다.

본 학습 프로그램에서는 기본적인 함수 내용을 논리적으로 사고할 수 있도록 구성하였다. 기초적이고 보편적인 내용으로써 실생활과 관련 있는 내용을 학생들이 지루하지 않고 흥미를 가질 수 있도록 탐구 활동 위주로 학습 프로그램을 구성하였다. 우선, 단위명과 학습 목표를 제시하고 기본 3~4개의 활동을 통하여 학습 내용과 기본 개념을 발견, 이해하게 구성하였다. 가능한 학생들의 직접적이고 구체적인 조작 활동 위주로 구성하고 컴퓨터를 이용한 활동도 같이 소개한다.

* 단위명: 대단원, 중단원, 소단원, 학습 주제를 제시한다.



학습목표: 본시 학습에서 학습할 주제의 학습 목표를 제시한다.



활동: Mathview를 이용한 본시 학습 목표와 관련된 활동, 간단한 활동에서 점 진적으로 복잡한 활동으로 분리하여 단계별로 제시한다.

▶ 조작활동: 학생들의 구체적인 활동방법을 소개한다. 활동시 주의할 사항이나 컴퓨터 작업의 안내 등을 한다.



탐구: Mathview를 이용한 활동에 대한 탐구 과정, 활동을 통해 해결 가능한 탐구적 문제를

제시한다.

 **힌트:** 활동을 통한 학습 문제 해결에 도움이 될만한 단서를 제공한다.

 **학습요소:** 활동 내용의 정리, 학습 목표와 연계하여 기본 개념, 원리, 법칙을 일반화하여 설명한다.

 **발견:** 선택적으로 학습 가능한 개별 학습용 과제를 제시하거나 본시 학습의 내용을 심화시킬 수 있는 문제나 활동을 제공한다. 교재 또는 단위 학습과 관련된 내용 중 다양한 탐구력을 배양하고 흥미를 가지며 시야를 넓힐 수 있는 문제를 제시한다.

Mathview : Mathview를 이용해 본시 학습 목표에 도달할 수 있도록 사용법을 설명한다.

기본적으로 위와 같은 구조에 맞춰 설계하지만 내용에 따라서는 생략되는 단계도 있다. Mathview의 활용에서는 앞 차시에서 설명된 사용법은 생략하고 제시한다.

IV. Mathview를 도구로 한 함수단위 개발

1. 함수 단위의 지도계열 설계

Mathview를 도구로 개발한 고등학교 1학년 함수 단원은 대단원, 중단원, 소단원으로 구성되어 있고 현재 제 6 차 교육과정에서 다루는 내용의 대부분을 포함하고 있다. 본 실험 단원의 계열과 제 6 차 교육과정을 비교하면 다음 <표 5>와 같다.

<표 5> 제 6 차 교육과정과 본 실험 단위과의 비교 대조표

6차	실험단원
1. 함수 함수, 합성 함수, 역함수	1. 함수 함수의 뜻, 함수의 연산
2. 유리함수와 무리 함수 이차 함수와 그 활용, 삼차 함수, 유리 함수, 무리 함수	2. 다양한 함수 다항 함수, 유리 함수, 무리 함수, 지수 함수, 로그 함수, 삼각 함수, 구간별로 정의된 함수
3. 지수 함수 지수 함수와 그래프, 지수 방정식, 지수 부등식	3. 함수 그래프의 변형 대칭 이동, 평행 이동, 확대와 축소
4. 로그 함수 로그 함수와 그래프, 로그 방정식, 로그 부등식	4. 함수의 응용 방정식과 함수, 부등식과 함수, 실생활과 함수
5. 삼각 함수 삼각 함수, 삼각 함수의 그래프, 삼각 함수의 성질, 삼각형에의 응용	

2. 프로그램 자료의 실제

1. 함수

§2. 함수의 연산

① 합성함수



함수를 합성할 수 있고 그 합성함수의 그래프를 그릴 수 있다.

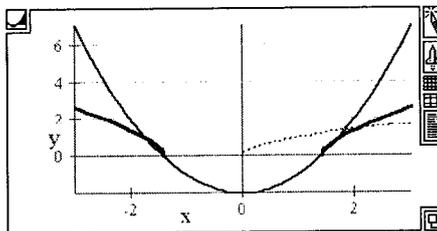


여러 함수의 합성함수 $y = g(f(x))$ 를 구해보자.

▶ $y = g(f(x))$ 의 그래프를 그려보자. $f(x) = x^2 - 2$ 의 그래프는 실선으로, $g(x) = \sqrt{x}$ 의 그래프는 점선으로, $y = g(f(x))$ 의 그래프는 굵은 선으로 나타낸다.

$f(x) = x^2 - 2$

$g(x) = \sqrt{x}$



$g(f(x))$

$\Delta g(f(x)) = g(x^2 - 2)$ Substitute

$\Delta \sqrt{f(x)} = g(x^2 - 2)$ Substitute

$\Delta \sqrt{x^2 - 2} = g(x^2 - 2)$ Substitute

$y = f(x)$



1. 함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 정역을 써라.

2. 함수 $y = g(f(x))$ 의 정역을 써라.

3. 1번과 2번의 정역에서 같은 점과 다른 점을 찾아라. 같은 경우와 다른 경우 각각의 이유를 써라.

4. 함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프에서 끊어진 부분은 무엇을 의미하는가? 생각하여라.

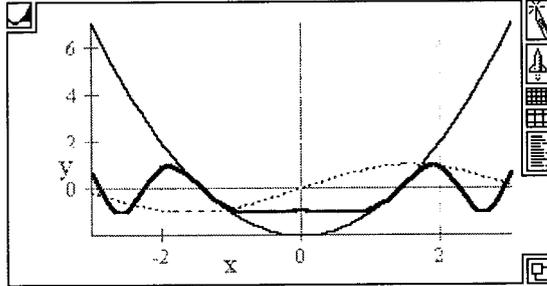


함수를 바꿔서 합성함수를 구하여라.

1. $y = f(x)$ 의 그래프가 위와 같고 함수 $y = \sin(x)$ 라 할 때 합성함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프 개형은 어떻게 될까?

▶ Mathview를 이용해 그려본다.

$f(x) = x^2 - 2$
 $g(x) = \sin(x)$



2. 합성함수 $y = g(f(x))$ 의 그래프(굵은 선)가 위와 같이 나타나는 이유가 될까?

합성 함수의 성질을 알아보자.

합성 함수의 교환법칙이 성립하는지 관찰하자.

- 함수 $y = f(x)$ 와 함수 $y = g(x)$ 식이 위와 같을 때 함수 $y = g(f(x))$ 와 함수 $y = f(g(x))$ 식을 구하여라.
- 함수 $y = g(f(x))$ 와 함수 $y = f(g(x))$ 의 그래프를 추측하여라.
 ☞ 힌트: Mathview를 이용해 그래프를 확인한다.
- 함수 $y = g(f(x))$ 와 함수 $y = f(g(x))$ 의 그래프가 같은가?
- 함수 $y = g(f(x))$ 와 함수 $y = f(g(x))$ 의 정역과 치역을 구하여라. 3번과 같은 결과가 나온 이유를 무엇이라 생각하는가?

합성 함수의 결합법칙이 성립하는지 관찰하자.

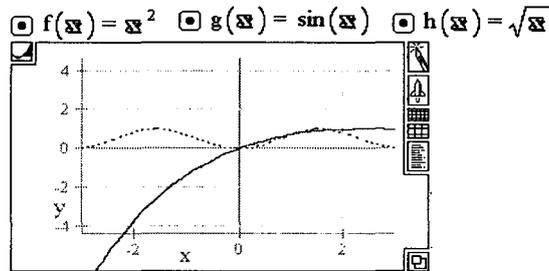
▶ Mathview를 이용해서 직접 그려보고 추측한 그래프와 비교하여라.

- 각각의 함수가 다음과 같이 정의되어 있을 때 합성함수를 구하시오. 합성함수의 결합법칙이 성립하는지 알아봅시다.

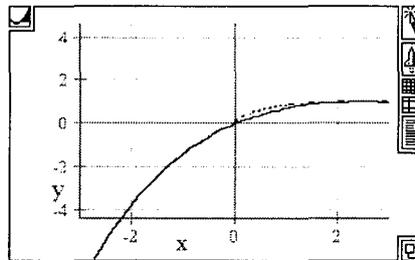
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \sin(x), \quad h(x) = \sqrt{x}$$

$(f \circ g) \circ h$ 와 $f \circ (g \circ h)$ 식을 구하고 그래프를 그려라.

- ▶ 아래 그래프는 순서대로 $(f \circ g) \circ h$ 와 $f \circ (g \circ h)$ 의 그래프를 나타낸다. 점선은 함수 $f \circ g$ 의 그래프, 실선은 함수 $(f \circ g) \circ h$ 의 그래프를 나타낸다.



▶ 점선은 함수 $g \circ h$ 의 그래프, 함수 $f \circ (g \circ h)$ 의 그래프는 실선을 의미한다.



두 합성 함수 $(f \circ g) \circ h$ 와 $f \circ (g \circ h)$ 의 그래프가 같은가?

다양하게 함수 식과 합성 함수의 순서를 바꿔보자.

1. 다음 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ f)(x)$ 를 구하여라.

2. 함수 의 그래프를 그려라.

힌트: Mathview를 이용해 그래프를 확인한다.

3. 함수 $(f \circ f \circ f \dots)(x)$ 의 그래프를 설명하여라.

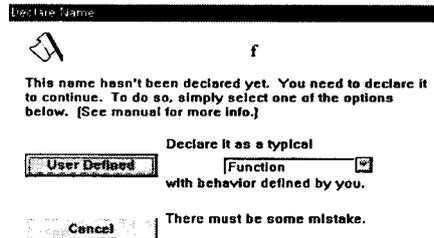
합성 함수의 성질

- ① 함수의 합성에서 교환법칙이 성립하지 않는다.
- ② 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.

Mathview

합성 함수의 그래프를 그리기 위해서는 사용자 정의 함수를 이용한다.

$f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{x}$ 를 입력하고 '='를 눌러서 식을 지정 후 Notebook > Clarify를 선택한다. 아래의 화면이 나타나면 User Defined를 누른다. 연속적으로 함수 g 도 사용자 정의한다.

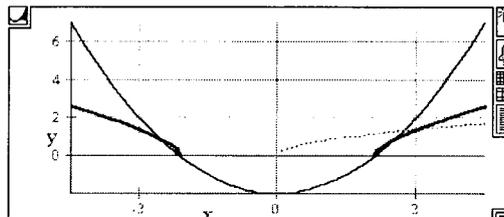


$y = f(x)$ 를 입력하고 '='를 눌러서 식을 선택 후 Graph> $y = f(x)$ > Linear를 선택하여 그래프를 그린다. 그래프가 나타나면 크기 조절 아이콘  을 이용해서 적당히 크기를 줄이고 나서, 그래프 아이콘  을 눌러 그래프를 선택한다. 그 뒤 Graph> Additional> Add Line Plot을 세 번 선택한다. 그래프의 색이 두 번 바뀔을 알 수 있다. 다시 그래프 설명 아이콘  을 눌러서 설명 창이 나타나면 아래와 같이 수정한다.

Declarations

- Line at $(x, f[x])$ where $x = \text{left} \dots \text{right}$ with a **normal** line, colored **Black**
- Line at $(x, g[x])$ where $x = \text{left} \dots \text{right}$ with a **dotted** line, colored **Red**
- Line at $(x, g[f\{x\}])$ where $x = \text{left} \dots \text{right}$ with a **heavy** line, colored **Blue**

합성함수의 그래프가 아래처럼 나타난다.



위 함수 식에서 $g(x) = \sin(x)$ 로 고치면 바로 그래프의 모양이 바뀔을 알 수 있다. 합성 함수 $(f \circ g) \circ h$ 나 $f \circ (g \circ h)$ 의 그래프 역시 위와 같이 사용자 정의 함수를 이용해 그리면 편리하다.

V. 결론 및 제언

본 함수 단원의 지도 계열은 수학과 실생활 사이의 관계를 맺어주는데 있어서 매우 중요한 함수 개념을 Mathview라는 도구를 이용해 탐구함으로써 자연스럽게 기호, 개념, 도표,

그래프를 연관지으며, 수학적 개념과 관계를 표현하는 능력을 개발할 수 있도록 구성하였다. 또한, 현행 교육과정의 내용의 기본 틀을 유지하면서도, 함수간의 연관성을 높이고 학생 중심의 활동을 통해 함수 그래프의 보다 많은 성질을 발견하도록 하며, 실생활의 모델링을 통해 함수 개념의 필요성을 느끼도록 구성하였다.

본 학습 프로그램 자료는 기존 교과서를 참고로 하여 함수에 대한 접근에 있어서 산술적이고 계산적인 방식보다는 시각적이고 직관적인 방식으로 구성하였으며 현행 교과서의 서술식 방식보다는 학습자 중심의 활동을 강조하여 적극적인 사고 활동과 능동적인 학습 태도를 유지할 수 있게 설계하였다. 또한, Mathview에 대해 거부감이 없이 쉽게 친숙해질 수 있도록 매 학습 요소마다 활용법을 제시하였다.

본 연구의 주된 목적은 Mathview를 활용한 함수단원의 지도계열을 재구성하고 그 계열에 근거한 학습 프로그램 자료의 개발이었다. 이와 관련된 지속적인 연구를 위해 다음 몇 가지를 제언하고자 한다. 첫째, Mathview와 같은 소프트웨어의 한글화나 국내에서 개발된 소프트웨어가 시급하다. 둘째, 본 연구는 Mathview를 도구로 한 함수 학습자료 개발에 국한되었지만, 본 연구를 바탕으로 다른 영역의 단원 개발 및 학습프로그램 자료의 개발이 필요하다. 셋째, Mathview와 같은 탐구형 소프트웨어를 활용한 교육이 미래 교육과정에 도입되기 위한 연구가 계속되어야 한다. 넷째, 본 연구는 학습프로그램 자료 개발이었기에 실제 수업을 통한 학업성취도나 태도에 관한 효과를 검증하거나 개발된 자료의 수정·보완에 관한 후속 연구가 뒤따를 필요가 있다.

참 고 문 헌

- 곽정원(1996). 그래픽 계산기를 이용한 함수 수업이 수학 학습에 미치는 효과. 석사학위 논문. 이화여자대학교 교육대학원.
- 노지화(1996). 수학교육을 위한 컴퓨터 활용에 관한 연구. 석사학위 논문. 성균관대학교 교육대학원.
- 교육부(1998). 제7차 수학과 교육과정 별책 8. 대한교과서 주식회사.
- 교육부(1992). 제6차 고등학교 교육과정(I). 대한교과서 주식회사.
- 문해순(1998). 효과적인 함수 지도를 위한 MathematiX의 활용. 석사학위논문. 전남대학교 교육대학원.
- 박래홍(1996). Mathematica를 이용한 함수 지도에 관한 연구. 석사학위논문. 전남대

학교 교육대학원.

- 박용범, 김한희, 박일영(1999). 수학 개념의 자기 주도적 구성을 위한 교수·학습모델개발. 한국수학교육학회 3집.
- 박한식(1997). MathematiX의 수학교육 현장에서의 활용 방안. 「청람수학교육 제6집」. 한국교원대학교 수학교육연구소.
- 신동선, 류희찬(공역)(1998). 수학교육과 컴퓨터. 경문사.
- 신순애(1994). 중등 교육과정에서의 컴퓨터 활용을 위한 Mathematica의 연구. 석사학위 논문. 경상대학교 교육대학원.
- 안미선(1995). 수학학습에서 Mathematica의 활용. 석사학위논문. 전남대학교교육대학원.
- 안윤상(1997). 삼각함수 학습을 위한 멀티미디어 타이틀의 개발 및 구현에 관한 연구. 석사학위논문. 한국교원대학교 대학원.
- 용환섭(1994). 컴퓨터를 활용한 함수교재 개발에 관한 연구. 석사학위논문. 강원대학교 교육대학원.
- 이규옥(1991). 수학 교육과정에서의 컴퓨터의 영향. 석사학위논문. 이화여자대학교 교육대학원.
- 이대현(1995). 특수 함수와 식에 대한 컴퓨터 사용과 효과 측정. 석사학위논문. 전북대학교 교육대학원.
- 임충규(1995). Computer를 이용한 수학적 실험의 가능성에 대한 고찰. 석사학위논문. 서울대학교 교육대학원.
- 우정호(1998). 학교수학의 교육적 기초. 서울대학교 출판부.
- 장경윤(1998). 대수 교육에서의 컴퓨터 활용과 전망. 1998년도 대한수학교육학회 추계수학교육학 연구발표 대회 논문집.
- 황미정(1996). 수학 지도에 있어서 컴퓨터의 활용 방안 모색. 석사학위논문. 경북대학교 교육대학원.
- Collins, W. et. al. (1998). *Algebra 1*. New York: Glencoe/McGraw-Hill, Inc.
- Hoffner, N.S.(1997). *Mathview user's guide*. Waterloo, Canada: Maple, Inc.
- Kaput, J(1998). Mixing new technologies: New curricula and new pedagogies to train extraordinary performance from ordinary People in the next century. *ICMI-EARCOME I Proceeding, 1*. Korean Sub-Commission of ICMI.

- Marshall, J.F (1997). *Mathematics & science with mathview*. Waterloo, Canada: Maple, Inc.
- Ministry of Education(1996). *Courses for senior school*. Wellington, New Zealand: Crown, Inc.
- National Council of Teacher of Mathematics(1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Poson, D. T.(1988). *The impact of computer on the secondary mathematics curriculum with a focus on algebra*. Doctoral dissertation, University of Georgia.
- <http://www.cybermath.com>.

Mathematics Curriculum with Computer Algebra System:
The Development of the Function Curriculum Using 'Mathview'
in the 10th Grade Mathematics

Hee-chan Lew (Korea National University of Education)

Hyun-hee Jee (Bugye Senior High School)

Min-sik Jo (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to restructure the 10th grade mathematics curriculum for teaching the function area under the computer environment using 'Mathview', which is a computer algebra system designed for exploring algebra dynamically. The instructional sequence of the function area was redesigned to highlight the functions and properties of the computer software. And, based on the newly designed sequence, this study develops the sample 'teaching unit' using Mathview. The basic principle of the materials is to encourage students to investigate mathematics by manipulate various experimental tasks by themselves or through group study. And, the draft of the sequence and teaching unit was reviewed by some mathematics teachers and revised through the feedback.